

Sequências e Séries: Padrões Fibonaccianos na Natureza, Quasicristais, Potencial Elétrico e Energia Média em Sistema Quântico

Sequences and Series: Fibonacci Patterns in Nature, Quasicrystals, Electric Potential and Average Energy in Quantum System

Gabriel Costa Vieira Arantes ^a, Clóves Gonçalves Rodrigues ^{a,*}

^a Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia - GO, Brasil

* Autor Correspondente: cloves@pucgoias.edu.br

Resumo: No presente estudo, são investigadas as sequências e séries numéricas, explorando as suas aplicações e contribuições em diversos ramos da Física, com destaque para: padrões fibonaccianos da natureza, sequência de Fibonacci e o número áureo, o número áureo e os padrões espirais das galáxias, quasicristais e as cadeias de Fibonacci, potencial elétrico para N cargas puntiformes num eixo Ox , fórmula de Planck para a energia média de um sistema quantizado. Prezou-se por um método de investigação teórica através do emprego dos conceitos de sequências e séries numéricas, demonstrando resultados fisicamente consistentes com observações experimentais.

Palavras-chave: Fibonacci; Razão áurea; Série harmônica; Série geométrica; Quasicristais.

Abstract: In the present study, numerical sequences and series are investigated, exploring their applications and contributions in several branches of Physics, with emphasis on: Fibonacci patterns in nature, Fibonacci sequence and the golden number, the golden number and spiral patterns of galaxies, quasicrystals and Fibonacci chains, electric potential for N point charges on an Ox axis, Planck's formula for the average energy of a quantized system. It was valued for a method of theoretical investigation through the use of the concepts of numerical sequences and series, demonstrating results physically consistent with experimental observations.

keywords: Fibonacci; Golden ratio; Harmonic series; Geometric series; Quasicrystals.

Classification MSC: 97E10; 97M10

1 Introdução

O conceito que representa a essência da Análise Real é, sem dúvida, a definição de limite, sendo que o estudo das sequências permite apresentar a noção de limite sob a sua forma mais simples [1]. Além disso, diversos fenômenos físicos são modelados com base em sequências de números reais. Assim, nota-se a grande importância do tema, seja em aplicações práticas no campo das engenharias e da física ou no campo da matemática pura.

A noção de série é, possivelmente, uma das mais importantes no que se refere ao estudo de métodos numéricos em física matemática [2]. É claro que as séries numéricas também constituem um assunto inestimável para o estudo da Análise Real, donde são enunciados e demonstrados diversos teoremas clássicos, tais como o critério da comparação, o teorema de Leibniz, o teste de d'Alembert, o teste de Cauchy e o teorema de Riemann [3, 4]. Alguns exemplos clássicos de séries numéricas com grande relevância para a física matemática são: a série geométrica, a série harmônica, a série de Maclaurin, a série de Taylor e a série de Fourier [2].

Assim, existem muitas sequências de grande importância para a Análise que possuem seu valor para o estudo da Física, valendo destacar a sequência de Fibonacci, a progressão aritmética, a progressão geométrica e o método de aproximações sucessivas da raiz quadrada. No presente trabalho, será abordada especialmente a série geométrica e a série harmônica, apresentando suas respectivas contribuições como ferramentas matemáticas no estudo dos fenômenos físicos. Na próxima Seção será apresentada a conceituação de séries e sequência e na Seção 3 serão apresentadas algumas aplicações e exemplos destas, a saber: a) a sequência de Fibonacci e o número áureo, b) padrões espirais das galáxias, c) quasicristais, d) potencial elétrico de cargas puntiformes, e e) a fórmula de Planck para a energia média de um sistema quântico. A Seção 4 se reserva a conclusões e comentários finais.

2 Sequências e Séries

Uma sequência é uma lista ordenada de números, enquanto que uma série é uma soma infinita dos termos de uma sequência. As somas parciais de uma série também formam uma sequência que pode convergir ou divergir [5].

Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa, para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, um número real $x_n \in \mathbb{R}$, denominado n -ésimo termo da sequência. Deste modo, tem-se $x : n \mapsto x_n$. Representa-se uma sequência cujo n -ésimo termo é x_n das seguintes maneiras: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Pode-se considerar que está implícito o fato de que os índices $n \in \mathbb{N}$ de uma sequência de números reais $x_n \in \mathbb{R}$ estão definidos sobre o conjunto dos números naturais, o que nos permite representar uma sequência cujo n -ésimo termo é x_n simplesmente por (x_n) , a fim de simplificar a notação, sem perda de generalidade [3]. Uma sequência (x_n) é limitada superiormente quando existe um número $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De forma análoga, uma sequência (x_n) é limitada inferiormente quando existe um número $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, diz-se que uma sequência (x_n) é limitada quando existe um número $k \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É importante notar que, ao afirmar que uma sequência (x_n) é limitada, está sendo afirmado que esta sequência é limitada superior e inferiormente. Com efeito, se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq k$, então $-k \leq x_n \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pode-se dizer que uma série é a soma de infinitas parcelas. Mais precisamente, toda série é dada por uma soma do tipo $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ com $n \rightarrow \infty$, onde as parcelas a_n , $n \in \mathbb{N}$, da soma são os termos de uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Portanto, toda série numérica é definida com base em uma sequência de números reais. Pode-se escrever esta soma de infinitas parcelas sob a forma de um limite, pondo $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

ou, simplesmente, $s = \lim(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. Uma série numérica pode ser representada utilizando a notação de somatório, a fim de simplificar a sua escrita. Deste modo, tem-se que

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n,$$

que é a notação usual para uma série numérica. Além disso, dada uma sequência (a_n) de números reais, pode-se formar a partir dela uma nova sequência (s_n) das reduzidas, ou somas parciais, da série $\sum a_n$. Para isso, basta tomar $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2, \dots$, $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ e assim por diante. Uma série $s = \sum a_n$ é convergente quando existe o limite $s = \lim(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ e é divergente quando não existe $\lim(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. Utilizando a notação das reduzidas, ou somas parciais, a série $\sum a_n$ converge quando existe $\lim s_n$ e diverge quando não existe $\lim s_n$.

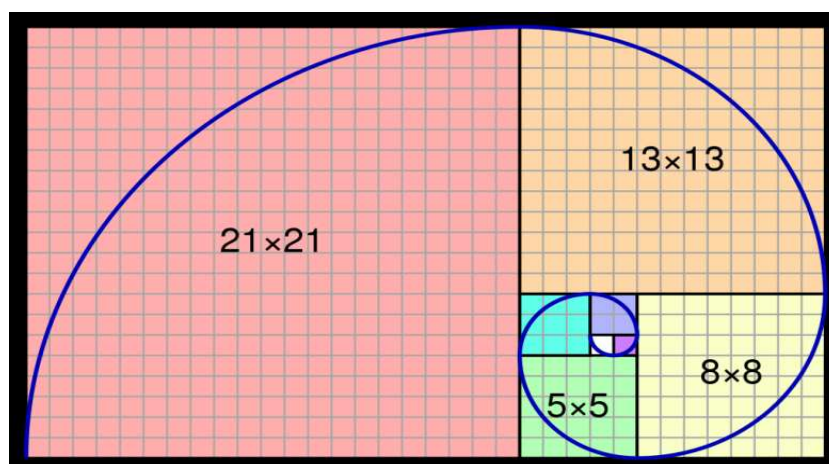
Na próxima seção serão apresentadas algumas aplicações e exemplos concretos das séries e sequências.

3 Exemplos e Aplicações

3.1 Sequência de Fibonacci e o Número Áureo Φ

Uma das sequências mais clássicas da Análise é a sequência de Fibonacci, pensada pelo matemático Leonardo Fibonacci no final do século XII. Muitos fenômenos da natureza estão relacionados a esta sequência como, por exemplo, o padrão de crescimento das conchas de algumas espécies de caracóis [6]. A curiosidade por trás deste fato advém da propriedade de que, tomando quadrados cujos lados crescem de acordo com a sequência de Fibonacci e dispondo-os de maneira geométrica, é possível traçar uma espiral perfeita, como a ilustrada na Figura 1. Existem diversos fenômenos físicos relacionados com a sequência de Fibonacci, como os relacionados a padrões espirais.

Figura 1. Espiral perfeita obtida a partir da sequência de Fibonacci.



Fonte: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?search=Fibonacci&title=Special:MediaSearch&type=image>

Seja a sequência (F_n) de números reais dada por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para todo $n \geq 2$. Definida desta maneira, diz-se que $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$

é a sequência de Fibonacci [7]. Aqui é relevante tratarmos sobre a obtenção do número áureo denotado pela letra grega Φ , o qual está presente em diversas proporções encontradas na natureza. A relação de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n \geq 2$, pode ser reescrita na seguinte forma:

$$F_{n+1} - \lambda \cdot F_n = (1 - \lambda) \cdot (F_n - \lambda \cdot F_{n-1}) + (1 + \lambda - \lambda^2) \cdot F_{n-1},$$

onde foi introduzido o fator multiplicador $\lambda \in \mathbb{R}$. Denota-se por λ_1 e λ_2 as raízes da equação de segundo grau $1 + \lambda - \lambda^2 = 0$. Tem-se então $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Além disso, valem as seguintes igualdades:

$$F_{n+1} - \lambda_1 \cdot F_n = (1 - \lambda_1) \cdot (F_n - \lambda_1 \cdot F_{n-1}) = \lambda_2 \cdot (F_n - \lambda_1 \cdot F_{n-1})$$

$$F_{n+1} - \lambda_2 \cdot F_n = (1 - \lambda_2) \cdot (F_n - \lambda_2 \cdot F_{n-1}) = \lambda_1 \cdot (F_n - \lambda_2 \cdot F_{n-1})$$

que podem ser representadas pelas iterações sucessivas da sequência de Fibonacci:

$$F_{n+1} - \lambda_1 \cdot F_n = (\lambda_2)^n \cdot (F_2 - \lambda_1 \cdot F_1)$$

$$F_{n+1} - \lambda_2 \cdot F_n = (\lambda_1)^n \cdot (F_2 - \lambda_2 \cdot F_1)$$

Subtraindo estas duas últimas expressões membro a membro, tem-se:

$$F_{n+1}(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot F_n = (\lambda_2)^n \cdot (F_2 - \lambda_1 \cdot F_1) - (\lambda_1)^n \cdot (F_2 - \lambda_2 \cdot F_1)$$

donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ resulta em:

$$F_n = \frac{(\lambda_2)^n \cdot (F_2 - \lambda_1 \cdot F_1) - (\lambda_1)^n \cdot (F_2 - \lambda_2 \cdot F_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Resolvendo a equação do segundo grau dada por $1 + \lambda - \lambda^2 = 0$, encontram-se as raízes:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Substituindo as raízes λ_1 e λ_2 na expressão geral obtida para F_n e lembrando que $F_1 = F_2 = 1$ na sequência de Fibonacci, tem-se para todo $n \geq 2$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

Tomando $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ esta última expressão pode ser reescrita como:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \Phi^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (1 - \Phi)^{n+1}.$$

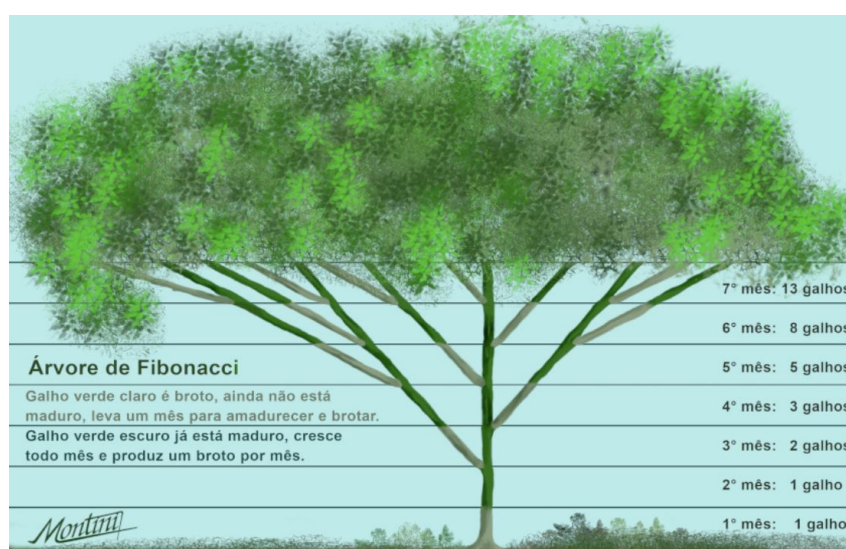
O real positivo $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ é chamado de número áureo. Este número está presente em diversas razões e proporções encontradas na natureza, desde as espirais das conchas calcárias dos *Nautilus* (moluscos cefalópodes), Figura 2, até padrões de crescimento das plantas e árvores, Figura 3. O número áureo Φ também está presente em fenômenos da Física, fato que será examinado nas seções 3.2 e 3.3.

Figura 2. Molusco nautilus.



Fonte: <https://www.shallowsky.com/blog/science/fibonutilus.html>

Figura 3. Crescimento de uma árvore seguindo a sequência de Fibonacci.



Fonte: [8].

É importante ressaltar que a sequência (x_n) definida por $x_1 = 1$ e $x_n = F_n/F_{n-1}$ se $n \geq 2$ converge para o número áureo $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ quando $n \rightarrow \infty$, onde F_n é o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci. Noutra notação, tem-se $\lim x_n = \lim(F_n/F_{n-1}) = \Phi = (1 + \sqrt{5})/2$. O leitor interessado pode verificar a validade desta afirmação como exercício. Basta aplicar a última fórmula de recorrência obtida nesta seção.

3.2 O Número Áureo (Φ) e os Padrões Espirais das Galáxias

Na seção anterior foi verificado que é possível definir uma espiral perfeita a partir da sequência de Fibonacci, conforme ilustrada na Figura 1. Este fato permite relacionar o número áureo Φ com diversos fenômenos da natureza que apresentam padrões espirais, donde merecem destaque as galáxias [9]. A espiral na Figura 1 é obtida tomando o quarto de circunferência inscrito em cada quadrado cujo lado aumenta de acordo com a sequência de Fibonacci, permutando o vértice que define o centro. Este padrão está associado com um tipo especial de curva geométrica, chamada de espiral logarítmica. Ela também pode ser obtida considerando n retas concorrentes num ponto de origem. Então, começando da reta $n = 1$, define-se um raio qualquer sobre ela, e traçando um segmento perpendicular que conecta a extremidade deste raio à reta $n = 2$. Assim, forma-se um novo raio sobre a reta $n = 2$, menor que o primeiro. Prosseguindo com este raciocínio indutivamente e fazendo $n \rightarrow \infty$, obtém-se a espiral logarítmica. Uma propriedade muito peculiar das espirais logarítmicas é que o ângulo formado entre as retas concorrentes e as retas tangentes nos respectivos pontos de interseção com a curva é constante.

Em coordenadas polares, a espiral logarítmica é a curva dada pela equação $r = a \cdot e^{b\theta}$, onde e é o número de Euler, a e b são constantes arbitrárias, θ é a inclinação das retas concorrentes com relação ao eixo Ox das abscissas e r é a distância da curva até a origem num dado instante, ou seja, o raio definido sobre cada reta concorrente. Diversas galáxias podem ser modeladas matematicamente como espirais logarítmicas, a saber, a nossa galáxia a Via Láctea, a Galáxia do Cata-Vento (NGC 5457 ou M101) e a Galáxia de Andrômeda (NGC 224 ou M31), como ilustrado na Figura 4.

Figura 4. Galáxia Espiral de Andrômeda vista pelo Galaxy Evolution Explorer.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Gal%C3%A1xia_de_Andr%C3%B4meda#/media/Ficheiro:Andromeda-galaxy_2.jpg.

Por sua vez, sabe-se que as espirais logarítmicas podem ser descritas em termos da sequência de Fibonacci, de acordo com a Figura 1. Isto nos permite vislumbrar um padrão fibonacciano intrínseco à natureza espiral destas galáxias. De algum modo, o raio variável dos seus braços espirais está relacionado, ao mesmo tempo, com a equação polar $r = a \cdot e^{b\theta}$ que descreve a espiral logarítmica e com a sequência de Fibonacci (F_n) cujo termo geral é definido em função do número áureo $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$. Sabe-se que a sequência (x_n) definida por $x_1 = 1$ e $x_n = F_n/F_{n-1}$ se $n \geq 2$ converge para o número áureo $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ quando $n \rightarrow \infty$, onde F_n é o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci. Considerando a sequência dos raios consecutivos descritos pelos braços espirais das galáxias com relação à origem para uma variação uniforme $\Delta\theta$ pré-fixada, de acordo com a equação polar $r = a \cdot e^{b\theta}$ que define a espiral logarítmica, a razão r_n/r_{n+1} certamente convergirá para o número áureo $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$, pois, pelo padrão fibonacciano, existe uma relação biunívoca entre os termos das sequências (x_n) e (r_n/r_{n+1}) para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, uma bijeção. Para isto, é necessário definir devidamente a variação uniforme $\Delta\theta = \theta_{n+1} - \theta_n$ que resultará no padrão fibonacciano desejado entre os raios consecutivos r_{n+1} e r_n descritos pelos braços espirais das galáxias, analogamente ao que acontece com os quartos de circunferência que descrevem a espiral de Fibonacci na Figura 1.

3.3 Sólidos Cristalinos, Quasicristais e as Cadeias de Fibonacci

Os sólidos cristalinos apresentam padrões geométricos periódicos em virtude das células unitárias. Estas, por sua vez, caracterizam a morfologia ao nível atômico e molecular que definem a forma geométrica do cristal macroscópico [10]. Dentre os tipos mais comuns de sólidos cristalinos, merecem destaque os cristais octaédricos, rômnicos e ortorrômnicos. Em 1982, o físico israelense Daniel Shechtman, professor titular e pesquisador no Instituto Israelita de Tecnologia, através dos seus estudos com ligas metálicas de alumínio e magnésio, descobriu os quasicristais, feito que lhe rendeu o Prêmio Nobel de Química de 2011 [11]. A importância da descoberta dos quasicristais está no fato de que estes sólidos, aparentemente cristalinos, não possuem uma estrutura periódica, apesar de exibirem espectro de difração essencialmente discreto, assim como os cristais clássicos [12].

Existem versões unidimensionais dos quasicristais cujas estruturas microscópicas exibem um padrão de ordenação, apesar de não possuírem simetrias de rotação nem periodicidade. Neste grupo, merecem destaque os quasicristais formados pelas cadeias de Fibonacci. Trata-se de uma sequência colinear e infinita de átomos formada por dois tipos de elementos químicos, denominados por A e B . Portanto, origina-se uma cadeia atômica unidimensional. O padrão de ordenação exibido por este grupo de quasicristais está justamente relacionado com a sequência de Fibonacci. Seja S_n a n -ésima etapa da cadeia atômica de Fibonacci formada pelos elementos A e B nos quasicristais lineares. Define-se a partir daí:

$$\begin{aligned} S_1 &= B, \\ S_2 &= A, \\ S_3 &= AB, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4 &= ABA, \\
S_5 &= ABAAB, \\
S_6 &= ABAABABA, \\
S_7 &= ABAABABAABAAB, \dots
\end{aligned}$$

de tal modo que vale a relação

$$S_{n+1} = (S_n)(S_{n-1}) \text{ para todo } n \geq 2.$$

A quinta etapa, por exemplo, é dada por

$$S_5 = (S_4)(S_3) = (ABA)(AB) = ABAAB,$$

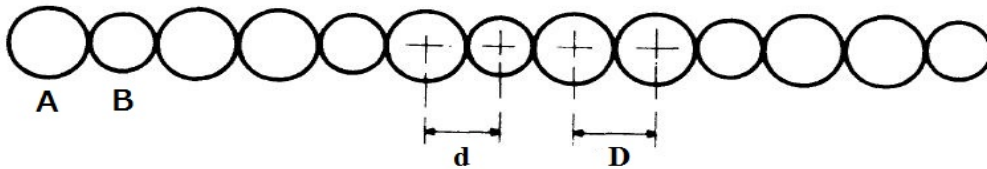
e a sexta etapa por

$$S_6 = (S_5)(S_4) = (ABAAB)(ABA) = ABAABABA.$$

É importante ressaltar que a sequência de átomos formada pelas cadeias de Fibonacci não é periódica e nem simétrica. Ela apenas define a existência de uma ordem na estrutura dos quasicristais pertencentes a este grupo. De fato, para cada etapa S_n da cadeia atômica, o número de átomos dos elementos A e B corresponde ao n -ésimo termo da sequência de Fibonacci. Deste modo, existe uma bijeção $S_n \mapsto F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Novamente, tem-se a sequência (x_n) definida por $x_1 = 1$ e $x_n = F_n/F_{n-1}$ se $n \geq 2$. Sabe-se que (x_n) converge para o número áureo $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, a razão entre o número total de átomos dos elementos A e B para duas cadeias de Fibonacci consecutivas S_n e S_{n+1} na estrutura unidimensional do quasicristal também converge para o número áureo $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ à medida que $n \rightarrow \infty$.

Uma interessante pesquisa na área de dinâmica de rede, em que o conceito da cadeia de Fibonacci é utilizado, consiste no estudo de propriedades estruturais e dinâmicas em um sistema (modelo unidimensional) em que dois tipos de átomos (A e B) alternam de posição entre si em uma sequência de Fibonacci, Figura 5. Neste estudo foram calculadas e analisadas a influência da anarmonicidade das vibrações atômicas nas propriedades dessa cadeia de Fibonacci [13].

Figura 5. Cadeia de Fibonacci consistindo de um átomo A e um átomo B menor que A .



Fonte: os autores.

Observa-se que os quasicristais bidimensionais mais importantes podem ser representados pelos *ladrilhos de Penrose*, outro padrão geométrico presente na natureza que, a princípio, pode parecer abstrato [14]. Este nome é uma homenagem ao físico inglês Roger Penrose, em virtude dos seus estudos e contribuições para o campo da física matemática.

3.4 Potencial Elétrico para N Cargas Puntiformes num Eixo Ox

Seja o problema unidimensional de N cargas elétricas puntiformes idênticas colineares, localizadas no eixo Ox e distribuídas de forma equidistante duas a duas. Então, pela definição do potencial elétrico [15], tem-se:

$$V(x) = V_1 + V_2 + \dots + V_N + \dots$$

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{x_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{x_2} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_N}{x_N} + \dots$$

$$\therefore V(x) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_k}{x_k},$$

sendo que as condições de contorno admitidas implicam em $x_{k+1} = x_k + \Delta x$ e $q_k = q$ para todo $k = 1, 2, \dots, N, \dots$, ou seja, tem-se:

$$x_2 = x_1 + \Delta x,$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = x_1 + 2\Delta x, \dots,$$

$$x_{k+1} = x_1 + k\Delta x$$

$$q_1 = q_2 = \dots = q_N = \dots = q \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, N, \dots$$

Tomando $x_1 = x$, tem-se:

$$x_2 = x + \Delta x,$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = x + 2\Delta x, \dots,$$

$$x_{k+1} = x + k\Delta x$$

$$q_1 = q_2 = \dots = q_N = \dots = q \text{ para todo } k = 1, 2, \dots, N, \dots$$

isto é, tem-se as condições de contorno $x_{k+1} = x + k\Delta x$ e $q_k = q$ para todo $k = 1, 2, \dots, N, \dots$.

Por conveniência, o somatório que define o potencial elétrico $V(x)$ pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$V(x) - V_1 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_{k+1}}{x_{k+1}}.$$

Então, aplicando as condições de contorno estabelecidas para o problema, chega-se em:

$$V(x) - V_1 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x + k\Delta x}.$$

Considerando o potencial elétrico resultante na origem do eixo Ox tem-se $x = 0$. Deve-se lembrar que foi tomado $x_1 = x$ na definição matemática das condições de contorno do problema. Por conseguinte, a carga q_1 está localizada exatamente na origem do eixo Ox . Logo, a sua contribuição para o potencial elétrico resultante na origem é $V_1 = 0$. Portanto

$$V(0) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{k\Delta x} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\Delta x} \right) \times \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}.$$

Obteve-se, deste modo, o somatório que define o potencial elétrico resultante na origem do eixo Ox para o problema de N cargas puntiformes idênticas, colineares e equidistantes entre si duas a duas, onde se definiu a posição da carga q_1 na origem. Se for considerado o caso em que N é finito, então o potencial elétrico

$$V(0) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\Delta x} \right) \times \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

converge, resultando em:

$$V(0) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\Delta x} \right) \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} \right).$$

Se, por outro lado, for considerado o caso em que $N \rightarrow \infty$, então o potencial elétrico na origem do eixo Ox ($x = 0$) para infinitas cargas puntiformes

$$V(0) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\Delta x} \right) \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

é divergente nas condições de contorno admitidas no início do problema. Isto se deve ao fato de que a série harmônica $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ diverge.

Também é interessante analisar o potencial elétrico resultante na origem do eixo Ox para o problema de N cargas puntiformes iguais em módulo, porém com sinais matemáticos alternados. Com isso, tem-se $q_k = q$ se k for ímpar e $q_k = -q$ se k for par. De modo equivalente, pode-se escrever $q_{2n-1} = q$ e $q_{2n} = -q$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando novamente a condição de contorno inicial $x_{k+1} = x + k \cdot \Delta x$ para todo $k = 1, 2, \dots, N$, onde foi tomado $x_1 = x$, tem-se:

$$V(x) = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_k}{x_k}$$

$$V(x) - V_1 = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_{k+1}}{x_{k+1}}$$

$$\therefore V(x) - V_1 = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x + k \cdot \Delta x}.$$

Pelas mesmas razões já discutidas, pode-se dizer que o somatório

$$V(0) = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{k\Delta x} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\Delta x} \right) \times \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$$

define o potencial elétrico resultante na origem do eixo Ox ($x = 0$) para o problema analisado. Então, fazendo $N \rightarrow \infty$, chega-se a:

$$V(0) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\Delta x} \right) \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Foi provado que o potencial $V(0)$ diverge quando $N \rightarrow \infty$ se consideradas N cargas puntiformes idênticas, em virtude da divergência da série harmônica. Entretanto, no caso de N cargas puntiformes iguais em módulo, porém com sinais matemáticos alternados, pode-se notar que a expressão do potencial resultante $V(0)$ está relacionada com a série alternada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot (1/k)$ quando $N \rightarrow \infty$. Pondo $k = n + 1$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right).$$

Além disso, vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right).$$

Tomando $a_n = 1/(n+1)$, segue do Teorema de Leibniz [3,4] que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ converge, pois $\lim(a_n) = \lim[1/(n+1)] = 0$, ou seja, a sequência monótona decrescente (a_n) tende para zero. Como resultado, a série alternada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{k} \right) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

também converge. Isto significa que o potencial elétrico resultante na origem do eixo Ox ($x = 0$) para o problema de N cargas puntiformes iguais em módulo com sinais matemáticos alternados, definido pelo somatório

$$V(0) = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{k\Delta x} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\Delta x} \right) \times \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$$

é convergente quando $N \rightarrow \infty$, nas condições de contorno admitidas. A totalidade da análise realizada nesta seção pode ser resumida em: 1) $V(0)$ diverge quando $N \rightarrow \infty$ se as N cargas puntiformes forem idênticas, e 2) $V(0)$ converge quando $N \rightarrow \infty$ se as N cargas puntiformes forem iguais em módulo, porém distintas duas a duas com relação ao sinal matemático, alternadamente.

3.5 Fórmula de Planck para a Energia Média de um Sistema Quântico

Considere a função de distribuição de Boltzmann [16] para uma variável contínua X arbitrária, onde $\bar{X}$ é o seu valor médio:

$$\bar{X} = \frac{\int_0^\infty X \cdot P(X) dX}{\int_0^\infty P(X) dX}.$$

No ano 1900, o físico alemão Max Planck introduziu seu postulado da quantização da energia, a fim de resolver os mistérios por trás do espectro de emissão da radiação do corpo negro, um problema físico que estava em aberto desde 1860, quando Gustav Kirchhoff iniciou os estudos sobre o tema [17]. O postulado de Planck diz que a energia dos sistemas quânticos (ε) deve ser quantizada, sendo múltipla de um número natural $n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon = nh\nu,$$

o que significa que a variável ε para os sistemas quânticos é discreta, de acordo com o postulado de Planck. A função de distribuição de Boltzmann para a variável discreta ε é análoga à do caso contínuo bastando escrever no lugar das integrais, os somatórios:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^\infty \varepsilon \cdot P(\varepsilon)}{\sum_{n=0}^\infty P(\varepsilon)},$$

onde $\bar{\varepsilon}$ é a energia média do sistema quântico. A fim de prosseguir, devemos introduzir a forma especial da distribuição de Boltzmann, que é dada pela seguinte expressão [18]:

$$P(\varepsilon) = \frac{\exp(-\varepsilon/kT)}{kT}$$

com T a temperatura do sistema e k a constante de Boltzmann. Substituindo a forma especial da distribuição de Boltzmann e o postulado de Planck na função de distribuição de Boltzmann para a variável discreta ε , tem-se:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^\infty nh\nu(kT)^{-1} \exp(-nh\nu/kT)}{\sum_{n=0}^\infty (kT)^{-1} \exp(-nh\nu/kT)}.$$

Definindo $\beta = h\nu/kT$, a expressão anterior fica:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^\infty n\beta \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^\infty (kT)^{-1} \exp(-n\beta)} = \frac{\sum_{n=0}^\infty n\beta \exp(-n\beta)}{(kT)^{-1} \sum_{n=0}^\infty \exp(-n\beta)} = (kT) \left[\frac{\sum_{n=0}^\infty n\beta \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^\infty \exp(-n\beta)} \right].$$

Seja a derivada:

$$D = \frac{d}{d\beta} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^\infty \exp(-n\beta) \right) \right].$$

Temos que,

$$D = \frac{\frac{d}{d\beta} \sum_{n=0}^\infty \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^\infty \exp(-n\beta)} = \frac{\sum_{n=0}^\infty \frac{d}{d\beta} \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^\infty \exp(-n\beta)} = \frac{\sum_{n=0}^\infty (-n) \times \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^\infty \exp(-n\beta)}.$$

Multiplicando por $-\beta$ tem-se:

$$-\beta D = -\beta \left[\frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-n) \times \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta)} \right] = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-n) \times (-\beta) \times \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta)}$$

$$\therefore -\beta D = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\beta \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta)}.$$

Substituindo a expressão que define D , tem-se:

$$-\beta \frac{d}{d\beta} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta) \right) \right] = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\beta \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta)}.$$

Com esta última expressão, e retornando à equação obtida para $\bar{\varepsilon}$, tem-se:

$$\bar{\varepsilon} = kT \left[\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\beta \exp(-n\beta)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta)} \right] = -\beta kT \frac{d}{d\beta} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta) \right) \right],$$

$$\bar{\varepsilon} = -\beta kT \frac{d}{d\beta} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta) \right) \right].$$

Lembrando que $\beta = h\nu/kT$, tem-se que $\beta kT = h\nu$. Fazendo esta substituição na expressão acima, chega-se a:

$$\bar{\varepsilon} = -h\nu \frac{d}{d\beta} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta) \right) \right].$$

Fazendo uma pausa para analisar a seguinte série numérica:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta) = \lim s_n.$$

O somatório s trata-se de uma série geométrica cuja razão é $\exp(-\beta)$. Toda série geométrica, de razão r , converge quando se tem $|r| < 1$, de tal modo que a sua soma total é dada por $s = \lim s_n = 1/(1-r)$. Neste caso, o nosso $r = \exp(-\beta)$. Isto posto, tem-se:

$$\bar{\varepsilon} = -h\nu \frac{d}{d\beta} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\beta) \right) \right] = -h\nu \frac{d}{d\beta} \left\{ \ln \left[\frac{1}{1 - \exp(-\beta)} \right] \right\} =$$

$$= -h\nu \frac{\frac{d}{d\beta} \left[\frac{1}{1 - \exp(-\beta)} \right]}{\left[\frac{1}{1 - \exp(-\beta)} \right]} = -h\nu \frac{\frac{d}{d\beta} [1 - \exp(-\beta)]^{-1}}{[1 - \exp(-\beta)]^{-1}} = \frac{h\nu \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta)} =$$

$$= \frac{h\nu}{\exp(\beta) - 1} = \frac{h\nu}{\exp[(h\nu) \cdot (kT)^{-1}] - 1},$$

e finalmente:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{\exp[(h\nu/kT)] - 1}.$$

Esta foi a fórmula obtida por Max Planck no início do século XX, ao investigar o problema da energia média ($\bar{\varepsilon}$) dos sistemas quânticos [19]. Tal fórmula constitui um marco na história da Física, pois pela primeira vez a energia média de um sistema físico passou a depender da frequência de vibração dos seus constituintes microscópicos (átomos, moléculas, etc.).

4 Comentários Finais

Com base nos resultados teóricos obtidos neste estudo, nota-se que os teoremas da Análise Real refletem a natureza de diversos fenômenos físicos. Em particular, ao explorarmos os fenômenos físicos discretos, tais como aqueles presentes no campo da Física Quântica, nota-se que existem padrões de sequências e séries numéricas intrínsecas. Além disso, atesta-se que os métodos comumente utilizados na Física Matemática, a exemplo das propriedades de convergência das séries geométricas, nada mais são do que teoremas rigorosamente demonstrados pela Análise Real, com grande contribuição para o estudo dos fenômenos naturais. Existem muitos teoremas matemáticos ainda sem aplicação direta na Física, mas que potencialmente podem ser empregados, de modo a esclarecer diversos padrões da natureza. Na opinião dos autores, este é um campo teórico que deve ser continuamente explorado, tanto pelos Físicos, quanto pelos Matemáticos.

ORCID

Gabriel Costa Vieira Arantes  <https://orcid.org/0000-0001-6298-1906>

Clóves Gonçalves Rodrigues  <https://orcid.org/0000-0003-0140-9847>

Referências

1. C. B. Boyer, U. C. Merzbach. *História da Matemática*, 3ª Edição. Editora Blucher, 2012.
2. E. Butkov. *Física Matemática*. Editora Guanabara, Rio de Janeiro, 1988.
3. E. L. Lima. *Curso de Análise*, v. 1. Projeto Euclides, 14ª Edição. IMPA, Rio de Janeiro, 2017.
4. E. L. Lima. *Análise Real: Funções de Uma Variável*, v. 1, 12ª Edição. Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 2017.
5. C. G. Rodrigues. *Tópicos de Física Matemática para Licenciatura*. Editora LF, São Paulo, 2017.
6. M. Zahn. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. Editora Ciência Moderna, 2020.
7. J. P. O. Santos. *Introdução à Teoria dos Números*. Coleção Matemática Universitária, terceira edição, 11ª impressão, IMPA, Rio de Janeiro, 2018.
8. P. L. Montini. *A Sequência Fibonacci*. [Almanaque de metrologia](https://ipemsp.wordpress.com/2019/11/11/a-sequencia-fibonacci/), IPEN, São Paulo, 2019. <https://ipemsp.wordpress.com/2019/11/11/a-sequencia-fibonacci/>
9. C. L. S. Borges, C. G. Rodrigues. “Astronomia: Breve História, Principais Conceitos e Campos de Atuação”. *Brazilian Applied Science Review*, v. 6, n. 2, 545-577, 2022. DOI: <https://doi.org/10.34115/basrv6n2-013>
10. N. W. Ashcroft, N. D. Mermin. *Física do Estado Sólido*. Cengage Learning, São Paulo, 2011.

11. C. Janot. *Quasicrystals: A Primer*, second edition. Oxford University Press, Oxford, 2012.
12. C. Kittel. *Introdução à Física do Estado Sólido*. LTC, Rio de Janeiro, 2006.
13. V. I. Zubov, J. N. T. Rabelo. “Anharmonic effects in the Fibonacci-chain quasicrystals”, *Phys. Rev. B*, v. 49, n. 13, 8671-8678, April 1994. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.8671>
14. L. Bursill, P. J. Lin. “Penrose tiling observed in a quasi-crystal”. *Nature*, v. 316, 50–51, 1985. DOI: <https://doi.org/10.1038/316050a0>
15. D. Possa, J. A. Nogueira. “Alguns Problemas de Eletromagnetismo Envolvendo Séries Infinitas”. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 25, n. 4, 384-387, 2003.
16. G. J. Damião, C. G. Rodrigues. “A Função de Distribuição de Velocidades de Maxwell-Boltzmann em Detalhes”. *Physicae Organum*, v. 7, n. 2, 134-149, 2021.
17. L. M. A. Gontijo, C. G. Rodrigues. “Sobre a Evolução do Conceito de Calor e Energia Térmica”. *História da Ciência e Ensino: Construindo Interfaces*, v. 24, n. 1, p. 19-51, 2021. DOI: <http://dx.doi.org/10.23925/2178-2911.2021v24p19-51>
18. L. M. A. Gontijo, C. G. Rodrigues. “Radiação Térmica e a Fórmula de Planck”. *Quím. Nova*, v. 45, n. 10, 1303-1314, 2022. DOI: <https://dx.doi.org/10.21577/0100-4042.20170942>
19. R. Eisberg, R. Resnick. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*. second edition. John Wiley e Sons, New York, 1985.