

Sobre um processo de difusão com reinícios não-estáticos sujeito a um campo potencial variante com o tempo

On a diffusion process with non-static restarts subjected to a time-varying potential

Telles Timóteo da Silva ^{a,*}

^a Universidade Federal de Juiz de Fora, Ouro Branco - MG, Brasil

* Autor Correspondente: timoteo@ufsj.edu.br

Resumo: Consideramos uma única partícula difusiva que sofre reinícios não-estáticos, i.e. variantes no tempo, e está imersa num campo potencial também variante no tempo, sob a hipótese de que os reinícios não afetam o potencial. Exibimos alguns resultados novos referentes a momentos e auto-correlação do processo. Observamos que o processo mantém uma correlação sempre positiva entre passado e futuro. Ademais, discutimos sobre uma medida do custo envolvido para reiniciar o processo até que o mesmo atinja um objetivo definido. Além disso, ilustramos o comportamento do processo em exemplos elucidados tanto analiticamente quanto por meio de simulações computacionais, verificando a importância da relação entre a forma funcional do potencial e da função de reinício. Em particular, notamos nos exemplos simulados que a existência do campo potencial pode impedir o processo de atingir um objetivo, mesmo que haja reinício.

Palavras-chave: Movimento Browniano num Campo Potencial; Reinício Estocástico; Auto-Correlação; Custo Quadrático; Tempo de Primeira Passagem.

Abstract: We consider a diffusive particle subjected to non-static resetting, i.e. the resetting positions vary with time. The particle is also immersed in a time-dependent potential field, which is not affected by the resetting. We exhibit new results concerning the moments and the auto-correlation of the process. We observe that a positive correlation always exists between the past and the future. Moreover, we discuss the cost that is needed to keep restarting the process until a defined task is performed. Furthermore, we give examples of the process behavior in various situations using either analytical results or computational simulations, verifying an important relationship between the potential and the resetting function. In particular, the examples indicate that the existence of a potential field may hinder the accomplishment of a task, even in the presence of resetting.

keywords: Brownian Motion in a Potential; Stochastic Resetting; Auto-Correlation; Quadratic Cost; First-Passage Time.

1 Introdução

Desde a publicação do trabalho seminal de Evans & Majumdar [1, 2], o estudo sobre difusões com reinício vem se firmando como um tópico relevante de pesquisa, encontrando aplicações em diversas áreas, tais como, na física [3, 4], em processos químicos [5], em sistemas biológicos [6–8] e em análise econômica [9, 10]. Veja-se [11, 12] para uma revisão de avanços relevantes na área. Dentre os modelos que são estudados, encontram-se aqueles em que a partícula está sujeita a uma força (estando imersa num campo potencial) [13, 14]. Ademais, outra característica que tem recebido atenção recentemente diz respeito a permitir que a posição em que a partícula é reiniciada varie com o tempo [15], sendo que esta posição pode, inclusive, ser aleatória [16–18].

Tendo em vista essas características, neste trabalho vamos, portanto, estudar um novo modelo de difusão em que a partícula

1. é reiniciada numa posição que varia com o tempo e está sujeita a um ruído aleatório
2. e se difunde num campo potencial variante com o tempo. O detalhe adicional consiste em supor que o campo potencial não é afetado pelos reinícios.

O modelo decorrente não possui, conseqüentemente, a propriedade de renovação, a qual, quando presente, é extremamente útil na resolução exata de problemas [19, 20]. Desta forma, neste trabalho, quando um desenvolvimento exato não pode ser realizado, utilizamos simulações computacionais para elucidar propriedades do processo.

Primeiramente vamos formalizar o modelo na Seção 2 para, em seguida, analisar algumas de suas propriedades. Na Seção 3 obteremos propriedades associadas à função geradora de momentos e à auto-correlação. Em particular, veremos que a auto-correlação é sempre positiva. A seguir, na Seção 4, introduzimos a medida do tempo que a partícula leva para atingir um objetivo, que no caso se trata de ultrapassar uma dada barreira pela primeira vez. Também discutimos o custo envolvido para reiniciar o processo até um tempo t ou até o tempo em que o objetivo do processo tenha sido alcançado. Na Seção 5, ilustramos o comportamento do processo em alguns exemplos elucidados tanto analiticamente quanto por meio de simulações computacionais. Em particular, notamos nos exemplos simulados que a existência do campo potencial pode impedir o processo de atingir o objetivo, mesmo que haja reinício. Posto de outra forma, a inserção de reinícios no modelo de difusão sob potencial não garante que o processo atinja um dado objetivo. Simulações computacionais também são utilizadas na Seção 6 para observarmos como um dos parâmetros usados para descrever o processo influencia o tempo e o custo para atravessar uma barreira. Na situação que pode ser considerada como de “equilíbrio dinâmico” (Seção 7) algumas conseqüências teóricas decorrentes deste tipo de equilíbrio são exploradas.

Notação

Para o que se segue, vamos denotar por Z uma variável aleatória (VA) cuja função densidade de probabilidade é $p_Z(x) = \frac{\sqrt{\beta/D}}{2} \exp \left[-\sqrt{\beta/D} |x| \right]$, para $\beta, D > 0$, e cuja função geradora de momentos (MGF) é dada por $\mathbb{E}[e^{\theta Z}] = \frac{\beta}{\beta - \theta^2 D}$.

O símbolo $\mathbf{I}_A$ representa a função indicadora do evento A : $\mathbf{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$

2 Formalização do processo

Fixemos $\beta > 0$ e seja $\{\tau_i\}$ uma seqüência de VAs independentes e identicamente distribuídas (IIDs), cuja distribuição é exponencial de parâmetro β , tais que $\mathcal{P}(\tau_i \leq u) = (1 - e^{-\beta u})\mathbf{I}_{[0, \infty)}(u)$, para cada $i = 1, 2, \dots$. Definamos os instantes de reinício $T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$, para $i = 1, 2, \dots$. Ponhamos convenientemente $T_0 = 0$. Seja $\mathcal{B}(t)$ um movimento Browniano uni-dimensional independente de τ_i , para todo i . Também tomemos $\{\Phi_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, uma seqüência de VAs reais IIDs, independentes de $\{\tau_i\}$ e de $\mathcal{B}(t)$, tais que $\mathbb{E}[\Phi_i] = 0$ e $\mathbb{E}[\Phi_i^2] = \sigma^2$. Suponhamos que Φ_i tem MGF $\phi(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta\Phi_i}]$. Seja Φ_0 uma VA real com $\mathbb{E}[\Phi_0] = 0$ e $\mathbb{E}[\Phi_0^2] = \sigma_0^2$, e MGF dada por $\phi_0(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta\Phi_0}]$. Os parâmetros σ_0 e $\phi_0(\theta)$ podem ser diferentes, respectivamente, de σ e $\phi(\theta)$.

Consideremos a função potencial $V(x, t) = H(t)x$, para $x \in \mathbf{R}$ e $t \geq 0$, tal que $F(x, t) = -H(t)$ seja a força externa exercida sobre a partícula. Definamos $a(t) = \int_0^t H(u)du$. A função $H(t)$ é determinística (não-aleatória). Também consideremos a função determinística adimensional $G(t)$, para $t \geq 0$, tal que $G(0) = 0$. Fixemos $\bar{x} \in \mathbf{R}$.

O processo sujeito a reinício não-estático com ruído aleatório $X(t)$ será definido como se segue. O valor inicial de X é distribuído segundo a VA $X(0) = \Phi_0$. Em cada instante T_i o valor que X assume é $X(T_i) = \Phi_i + \bar{x}G(T_i)$ (reinício não-estático com ruído). Para $t \in (T_i, T_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots$, o valor de $X(t)$ é dado por

$$X(t) = \Phi_i + \bar{x}G(T_i) - a(t) + a(T_i) + \sqrt{2D}[\mathcal{B}(t) - \mathcal{B}(T_i)]. \quad (2.1)$$

O potencial e, conseqüentemente, a força exercida sobre a partícula não são afetados pelos reinícios.

A Figura 1(a) exemplifica uma possível realização do processo. Note que em cada instante de reinício T_i , a posição $X(T_i)$ é escolhida de acordo com a posição não-estática $\bar{x}G(T_i)$. As linhas vermelhas verticais indicam o “salto” que o processo faz para reiniciar. Além disso a escolha da nova posição $\bar{x}G(T_i)$ pode ser perturbada pelo ruído aleatório gerado pela VA Φ_i (esta característica não está sendo levada em conta na Figura 1)

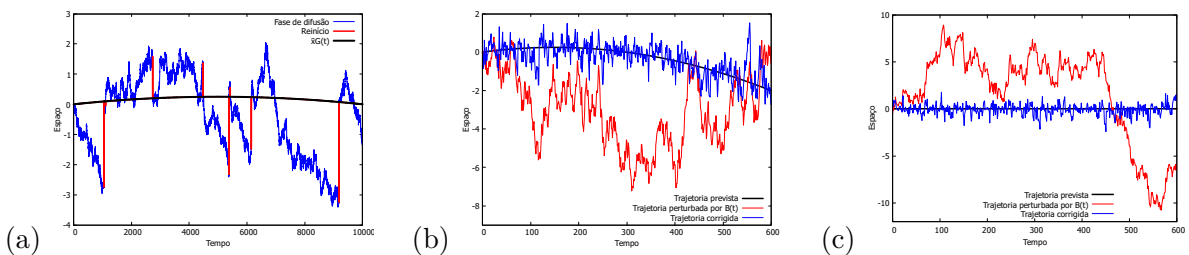


Figura 1. Ilustrações de caminhos amostrais. Na parte (a) em azul se encontra delineado o caminho amostral do processo na fase de difusão. Em instantes aleatórios T_j o processo “salta” para a posição não estática $\bar{x}G(T_j)$, como vemos nas marcações em linhas vermelhas verticais. A função $\bar{x}G(t)$ está desenhada com a linha preta contínua. Na parte (b) a trajetória pré-definida, delineada pela linha preta, sofre perturbação aditiva. A trajetória perturbada é mostrada pela linha vermelha. O reinício do processo leva a uma trajetória corrigida (linha azul). Na parte (c) temos um caminho amostral para o processo de Evans-Majumdar com $\Phi_1 = 0$. A linha vermelha representa uma realização de um movimento Browniano que se inicia em $x = 0$. A linha azul indica o caminho amostral do processo de Evans-Majumdar subjacente à realização do movimento Browniano. Nota-se em particular que a flutuação do processo de Evans-Majumdar em torno de $x = 0$ se apresenta de forma mais controlada do que a flutuação do movimento Browniano que lhe dá origem.

A presença do campo potencial tem o efeito de conduzir a trajetória do processo X para a direção indicada pela força $F(x, t)$. Já os reinícios tendem a concentrar o processo em torno de $\bar{x}G(t)$. A Figura 2 ilustra estes efeitos nos instantes iniciais de simulação de um processo em três situações. Na situação da Figura 2(a), há reinícios não-estáticos, mas não há atuação do campo potencial, e se percebe as trajetórias de $X(t)$ tendem a se concentrar em torno de $\bar{x}G(t)$. Na Figura 2(b) há tanto reinícios não-estáticos, quanto atuação do campo potencial, tal que $\bar{x}G(t) + a(t) \neq 0$, e se percebe que o campo potencial atua de forma a dirigir as trajetórias de $X(t)$ para longe de $\bar{x}G(t)$. Na Figura 2(c) também há tanto reinícios não-estáticos, quanto atuação do campo potencial, mas neste caso $\bar{x}G(t) + a(t) = 0$. Aqui se percebe um certo “equilíbrio” na atuação de $\bar{x}G(t)$ e de $a(t) = -\int_0^t F(x, t)dt$, que impele as trajetórias a se concentrarem em torno de $\bar{x}G(t) = -a(t)$.¹

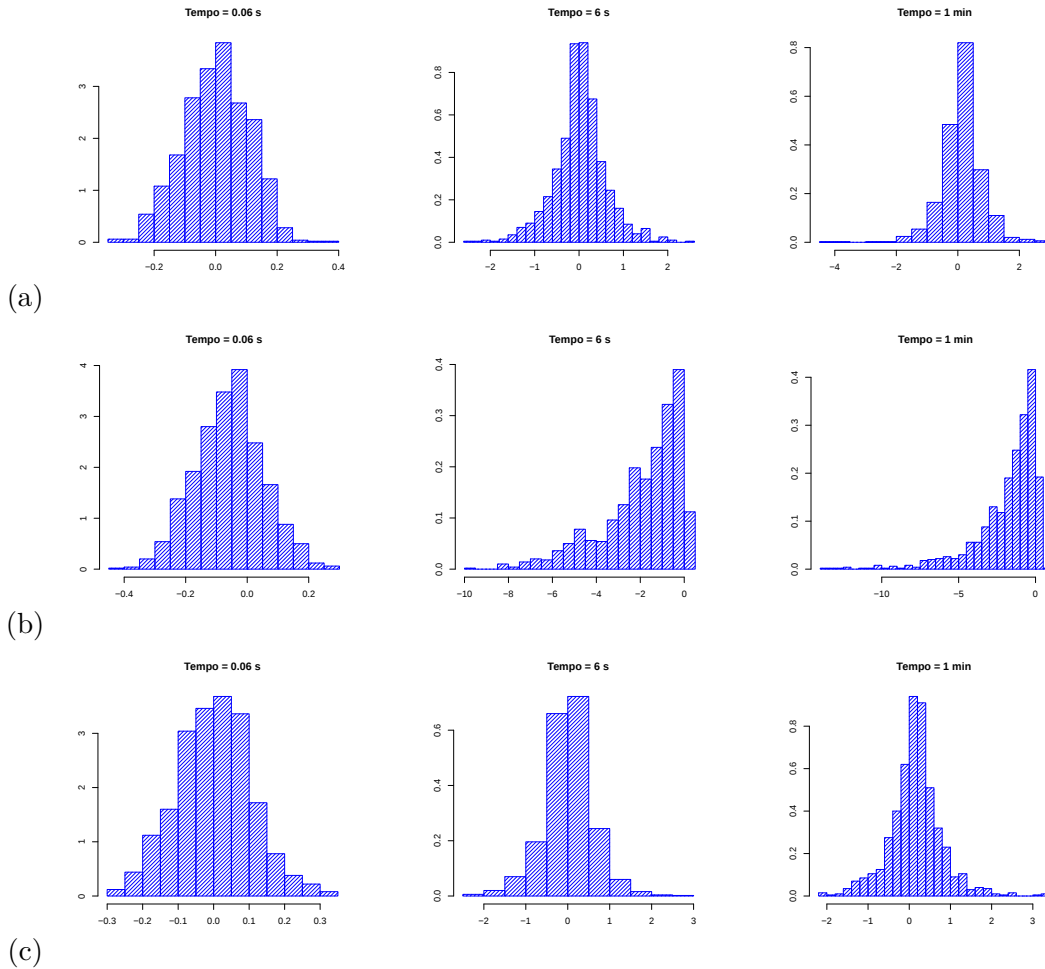


Figura 2. Os histogramas ilustram a densidade do processo $X(t)$ em três instantes do início de um processo (0,06s, 6s e 1min). Na situação (a), há reinícios não-estáticos, mas não há atuação do campo potencial. Na situação (b) há tanto reinícios não-estáticos, quanto atuação do campo potencial, tal que $\bar{x}G(t) + a(t) \neq 0$. Na situação (c) também há tanto reinícios não-estáticos, quanto atuação do campo potencial, mas neste caso $\bar{x}G(t) + a(t) = 0$.

¹ Este “equilíbrio” terá impacto também na média do tempo de primeira passagem a ser visto na Tabela 1.

Recapitulando o Processo de Evans-Majumdar

Antes de continuarmos, vamos recapitular algumas características do processo de Evans-Majumdar [1] com o objetivo de estabelecermos comparações. O processo de Evans-Majumdar pode ser obtido a partir do processo apresentado acima se particularizarmos a escolha de alguns parâmetros, pois devemos fazer $H(t) \equiv 0$, para nos livrarmos do termo de *drift*, e $\bar{x} \equiv 0$ para manter estáticos os reinícios. Também devemos tomar $\phi_0 = \phi$. Desta forma, denotando por X^{EM} o processo de Evans-Majumdar, sua MGF é dada por

$$\mathbb{E} \left[e^{\theta X^{EM}(t)} \right] = \frac{\phi(\theta)}{\beta - \theta^2 D} \left[\beta - \theta^2 D \exp \left(-\beta t + \theta^2 D t \right) \right]. \quad (2.2)$$

O processo $X^{EM}(t)$ tem média zero e variância dada por

$$\text{VAR}[X^{EM}(t)] = \sigma^2 + \frac{2D}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \quad (2.3)$$

Ele possui uma distribuição estacionária cuja MGF é dada por $\frac{\beta\phi(\theta)}{\beta - \theta^2 D}$, o que corresponde à MGF da VA $Z + \Phi_1$ (para Z e Φ_1 VAs independentes). A Figura 3(a) ilustra a forma da densidade de probabilidade da distribuição estacionária, no caso em que $\Phi_1 = 0$.

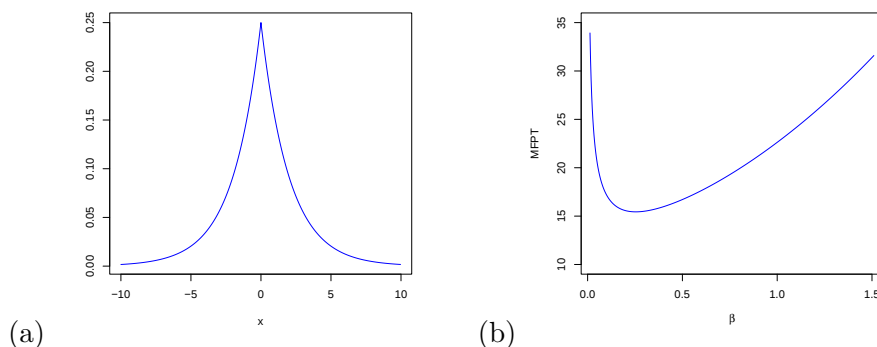


Figura 3. Ilustrações para o processo de Evans-Majumdar (com $\Phi_1 = 0$). A parte (a) corresponde à densidade da distribuição estacionária, que é simétrica em torno de 0, cuja expressão analítica é $p_{st}(x) = \frac{\sqrt{\beta/D}}{2} \exp \left[-\sqrt{\beta/D} |x| \right]$. A parte (b) corresponde ao MFPT para diversos valores de β .

A Figura 1(c) ilustra um caminho amostral do processo de Evans-Majumdar, também no caso em que $\Phi_1 = 0$, juntamente com o caminho amostral do movimento Browniano que lhe dá origem. Note que o processo é de fato um movimento Browniano (que se inicia em $x = 0$), o qual em instantes aleatórios é reiniciado em $x = 0$.

3 Auto-covariância e auto-correlação

Escrevendo $X(t)$ como

$$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} X(t) \mathbf{I}_{[T_j, T_{j+1})}(t) \quad (3.1)$$

obtemos $e^{\theta X(t)} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{\theta X(t)} \mathbf{1}_{[T_j, T_{j+1})}(t)$. Ao calcularmos a MGF de $X(t)$, encontramos

$$\mathbb{E}[e^{\theta X(t)}] = \exp[-\beta t + \theta^2 D t - \theta a(t)] \left\{ \phi_0(\theta) + \beta \phi(\theta) \int_0^t \exp[\beta y - \theta^2 D y + \theta [\bar{x}G(y) + a(y)]] dy \right\}. \quad (3.2)$$

A partir da Equação (3.2), podemos calcular a média e a variância, obtendo

$$\mathbb{E}[X(t)] = -a(t) + \beta \int_0^t e^{-\beta(t-y)} [\bar{x}G(y) + a(y)] dy \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X(t)] &= \sigma_0^2 e^{-\beta t} + \left(\sigma^2 + \frac{2D}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta t}) + \beta \int_0^t e^{-\beta(t-y)} [\bar{x}G(y) + a(y)]^2 dy \\ &\quad - \beta^2 \left\{ \int_0^t e^{-\beta(t-y)} [\bar{x}G(y) + a(y)] dy \right\}^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observação 3.1. Os efeitos de $\bar{x}G(t)$ e de $a(t)$ são simétricos quando analisados do ponto de vista da função $\text{VAR}[X(t)]$, como também do custo médio $\mathbb{E}[C(t)]$ dado na Equação (4.5). Porém, esta equívoca de efeitos não estende a outras propriedades do processo, como será visto na Seção 5 e na Tabela 1.

Observação 3.2. Se fizermos $G(t) = \frac{-a(t)}{\bar{x}}$ e $\sigma_0 = \sigma$ na expressão da variância, Equação (3.4), então obteremos exatamente a Equação (2.3) que representa a variância do processo de Evans-Majumdar $X^{EM}(t)$. Este é um cenário de “equilíbrio” que será estudado mais detidamente, juntamente com algumas de suas conseqüências, na Seção 7. Vemos, através da Equação (3.4), que a variância de $X(t)$ fica minimizada em torno de seu caminho médio, quando $\bar{G}(t) + a(t) = 0$. Ademais, supondo que $\Phi_j = 0$ para $j = 0, 1, \dots$, pode ser mostrado que $X(t) = X^{EM}(t) - a(t)$.

Utilizando a representação de $X(t)$ dada na Equação (3.1), podemos calcular a covariância entre $X(t)$ e $X(t+u)$, para $u > 0$, o que resulta em

$$\begin{aligned} \text{COVAR}[X(t), X(t+u)] &= \left[\sigma_0^2 e^{-\beta t} + \left(\sigma^2 + \frac{2D}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta t}) \right] e^{-\beta u} \\ &\quad + \beta \int_0^t e^{-\beta(t-y)} [\bar{x}G(y) + a(y)]^2 dy e^{-\beta u} - \beta^2 \left\{ \int_0^t e^{-\beta(t-y)} [\bar{x}G(y) + a(y)] dy \right\}^2 e^{-\beta u}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De (3.4) e (3.5), vemos que esta covariância está relacionada com a variância de uma forma bem simples:

$$\text{COVAR}[X(t), X(t+u)] = \text{VAR}[X(t)] e^{-\beta u}. \quad (3.6)$$

Esta relação entre a variância e a auto-covariância é independente da forma funcional do *drift* $-H(t)$ ou da função adimensional $G(t)$, e se aplica inclusive para o processo de Evans-Majumdar. Assim $\text{COVAR}[X(t), X(t+u)]$ fica modulada pela $\text{VAR}[X(t)]$ e decresce exponencialmente quando $u \rightarrow \infty$. Em comparação, a covariância no movimento Browniano simples com *drift* $-H(t)$ (sem reinícios), que pode ser obtida ao se tomar $\beta = 0$, não varia com u .

Para complementar, temos também a auto-correlação que, sendo definida por $\rho(t, t+u) = \frac{\text{COVAR}[X(t), X(t+u)]}{\sqrt{\text{VAR}[X(t)]} \sqrt{\text{VAR}[X(t+u)]}}$, para o presente processo se reduz a

$$\rho(t, t+u) = \frac{\sqrt{\text{VAR}[X(t)]}}{\sqrt{\text{VAR}[X(t+u)]}} e^{-\beta u}. \quad (3.7)$$

Observação 3.3. No caso em que $H(t)$ fosse constante ($H(t) \equiv h$), o reinício estático ($G(t) \equiv 0$),

e $\Phi_0 \equiv \Phi_i \equiv 0$ (VAs nulas), então teríamos o processo estudado em [21]. Em particular, sob estas condições, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t, t+u) = e^{-\beta u}$.

Os resultados aqui apresentados generalizam alguns descritos em [21]. Verificamos que $\rho(t, t+u)$ é sempre positiva para quaisquer t, u , implicando que valores presentes e futuros do processo $X(t)$ mantêm correlação positiva. Esta correlação positiva pode auxiliar para que, em trabalhos futuros, se estude o conteúdo espectral do processo [22] e sua ergodicidade [21, 23, 24].

Note que, de forma geral, não é garantido termos $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t, t+u) = e^{-\beta u}$. Na Seção 5, vamos estudar dois exemplos em que este limite é igual a $e^{-\beta u}$. Cabe um estudo futuro mais detalhado sobre quais outras funções $G(t)$ e $a(t)$ permitem que se obtenha $e^{-\beta u}$ no limite.

4 FTP e custo dos reinícios

O reinício de um processo pode ser usado para fazer com que o processo atinja um dado objetivo. Um objetivo teórico pode ser, por exemplo, verificar que o processo ultrapassa um dado valor. Para tanto, é interessante se ter uma medida de tempo, como o tempo de primeira passagem (*first passage time* - FPT). O FPT de X pelo valor $x_a > 0$, quando X é iniciado em 0, é a VA

$$\xi = \inf_{t \geq 0} \{X(t) > x_a | X(0) = 0\}. \quad (4.1)$$

Aqui vamos considerar apenas o caso em que o processo ultrapassa x_a continuamente, ou seja, apenas na fase de difusão.²

No Modelo de Evans-Majumdar é possível obter o valor médio do FPT (MFPT) de ξ^{EM} : no caso em que $\Phi_1 = 0$, temos [2]

$$\mathbb{E}[\xi^{EM}] = \frac{e^{\sqrt{\frac{\beta}{D}}x_a} - 1}{\beta}. \quad (4.2)$$

Na Figura 3(b) há uma ilustração do gráfico de $\mathbb{E}[\xi^{EM}]$ versus β , no caso em que $x_a = 1$. Note que se não houvesse reinício ($\beta \rightarrow 0$), o tempo médio cresceria infinitamente, i.e., se o processo fosse uma difusão simples, não conseguiria em média atingir o objetivo de ultrapassar x_a num tempo finito; porém quando inserimos o reinício, o tempo médio se torna finito.

Nem para processos com reinício não-estático, nem para processos com um campo potencial variante no tempo que não é afetado pelos reinícios, temos uma formulação exata para o MFPT. Mas na Seção 5 são apresentadas as estimativas para $\mathbb{E}[\xi]$ frente a várias situações.

Por outro lado, cada retorno do processo ao ponto de reinício gera um custo que podemos avaliar pelo quanto ele deve se deslocar. Para cada $n \geq 1$, definimos o deslocamento por $L_n = X(T_n) - X(T_n^-)$, onde $X(T_n^-) = \lim_{t \rightarrow T_n^-} X(t)$. Daí, temos, para $n \geq 1$,

$$L_n = \Phi_n - \Phi_{n-1} + \bar{x}[G(T_n) - G(T_{n-1})] + a(T_n) - a(T_{n-1}) - \sqrt{2D}[\mathcal{B}(T_n) - \mathcal{B}(T_{n-1})]. \quad (4.3)$$

Sabendo quanto a partícula se desloca, podemos calcular o custo deste movimento. Aqui utilizaremos o custo quadrático inspirado em [20]. Se no intervalo de tempo $[0, t]$ houver exatamente R reinícios, o custo será $\frac{1}{2D} \sum_{n=1}^R L_n^2$. A divisão por $2D$ faz com que o custo venha ter dimensão de tempo. Assim somando sobre todas as possibilidades temos que o custo no

²No âmbito do FPT, não vamos considerar, como medida válida de tempo, o instante em que possivelmente X "salte" por sobre x_a .

intervalo de tempo $[0, t]$ será

$$C(t) = \frac{1}{2D} \sum_{R=1}^{\infty} \sum_{n=1}^R L_n^2 \mathbf{I}_{[T_R, T_{R+1})}(t). \quad (4.4)$$

O valor esperado é

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C(t)] &= \left(1 + \frac{\sigma^2 \beta}{D}\right) t + \left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma^2}{2D} - \frac{1}{\beta}\right) (1 - e^{-\beta t}) + \frac{\beta}{2D} \int_0^t e^{-\beta v} [\bar{x}G(v) + a(v)]^2 dv \\ &\quad + \frac{\beta^2}{2D} \int_0^t \int_0^{t-w} e^{-\beta v} \{\bar{x} [G(w+v) - G(w)] + a(w+v) - a(w)\}^2 dv dw \end{aligned} \quad (4.5)$$

Em particular, o custo calculado até o FPT se torna uma medida interessante de quanto custa reiniciar o processo até que ele venha a ultrapassar a barreira de $x = x_a$ começando de $x = 0$. Nas simulações apresentadas na Seção 5, obtemos estimativas para o valor médio deste custo em algumas situações, desde que o processo tenha conseguido ultrapassar a dada barreira.

5 Exemplos

Vamos estudar dois exemplos de processos com comportamentos distintos, a partir da perspectiva do valor de $\bar{x}G(y) + a(y)$.

5.1 Caso $\bar{x}G(y) + a(y) = \mu y$

Considere que a diferença $\bar{x}G(y) - \int_0^y F(u)du = \bar{x}G(y) + a(y)$ é linear, igual a μy , onde μ é uma constante. Temos que a variância é dada por

$$\text{VAR}[X(t)] = \sigma_0^2 e^{-\beta t} + \left(\sigma^2 + \frac{2D}{\beta}\right) (1 - e^{-\beta t}) + \mu^2 \left[\frac{1 + e^{-2\beta t}}{\beta^2} - \frac{2t}{\beta} e^{-\beta t} \right]. \quad (5.1)$$

Note que a variância tende a um valor fixo quando $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{VAR}[X(t)] = \sigma^2 + \frac{2D}{\beta} + \frac{\mu^2}{\beta^2}, \quad (5.2)$$

onde há contribuições do ruído Φ e dos outros parâmetros do processo. A flutuação do processo em torno da média apresenta um comportamento limitado. Como salientado anteriormente, este é um primeiro exemplo em que ocorre $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t, t+u) = e^{-\beta u}$.

O valor esperado do custo quadrático dos reinícios apresenta o seguinte formato:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C(t)] &= \left(1 + \frac{\sigma^2 \beta}{D}\right) t + \left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma^2}{2D} - \frac{1}{\beta}\right) (1 - e^{-\beta t}) \\ &\quad + \frac{\mu^2}{\beta D} \left[t(1 + e^{-\beta t}) - \frac{2}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Para $t \rightarrow \infty$ o custo médio tende a crescer linearmente com t :

$$\mathbb{E}[C(t)] \approx \left(1 + \frac{\sigma^2 \beta}{D} + \frac{\mu^2}{\beta D}\right) t.$$

Para estimar a média do tempo de primeira passagem (MFPT) e o custo médio até o FPT

(MCOST), utilizamos simulações computacionais. A Tabela 1 resume os resultados obtidos.³ MFPT e MCOST estão expressos em segundos. Para comparação, foram incluídas situações em que falta um dos elementos do processo de difusão num campo potencial com reinício não-estático. Desta forma, observamos que quando há um campo potencial atuando, tanto a MFPT quanto o MCOST são infinitos (dentro do tempo utilizado na simulação), exceto no Caso 2 em que há um “equilíbrio” entre $\bar{x}G(t)$ e $a(t)$ já que $\mu = 0$. O fato do MFPT e do MCOST serem finitos no Caso 2 está associado com a concentração de trajetórias em torno de $\bar{x}G(t) = -a(t)$ ilustrada na Figura 2(c). Por outro lado, a existência de reinício nem sempre garante a obtenção de um valor finito para MFPT ou para o MCOST.

Tabela 1. Comparação de FPTs e Custos entre resultados simulados

Modelo de difusão	Hits (%)	MFPT (s)	MCOST (s)
Modelo de Evans-Majumdar	100	16,547	10,933
Campo potencial nulo com reinício não-estático	100	15,536	10,545
Num campo potencial sem reinício	0,1	∞	0
Num campo potencial com reinício estático	1,0	∞	∞
Num potencial com reinício não-estático (Caso 1)	2,6	∞	∞
Num potencial com reinício não-estático (Caso 2)	100	15,260	10,539

5.2 Caso $\bar{x}G(y) + a(y) = k(1 - e^{-\mu y})$

Neste caso, escolhemos $G(y)$ e $F(y)$ de forma que a diferença $\bar{x}G(y) - \int_0^y F(u)du$ seja $k(1 - e^{-\mu y})$, onde k, μ são constantes. O comportamento da variância e do custo são mais complexos do que no exemplo anterior. A variância é dada por

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X(t)] &= \sigma_0^2 e^{-\beta t} + \left(\sigma^2 + \frac{2D}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta t}) \\ &+ k^2 \mu \left[\frac{-2e^{-\beta t}}{\beta - 2\mu} - \frac{\mu e^{-2\beta t}}{(\beta - \mu)^2} + \frac{\beta \mu e^{-2\mu t}}{(\beta - 2\mu)(\beta - \mu)^2} + \frac{2\beta e^{-(\beta+\mu)t}}{(\beta - \mu)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Uma análise para $t \rightarrow \infty$ nos permite inferir os regimes de comportamento da variância:

$$\text{VAR}[X(t)] \approx \begin{cases} \sigma^2 + \frac{2D}{\beta}, & \mu \geq 0 \\ \frac{k^2 \mu^2 \beta}{(\beta + 2|\mu|)(\beta + |\mu|)^2} e^{2|\mu|t}, & \mu < 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Aqui, no caso em que $\mu \geq 0$, temos a situação em que $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t, t+u) = e^{-\beta u}$.

Já o custo médio é dado por,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C(t)] &= \left(1 + \frac{\sigma^2 \beta}{D} \right) t + \left(\frac{\sigma_0^2 - \sigma^2}{2D} - \frac{1}{\beta} \right) (1 - e^{-\beta t}) \\ &+ \frac{k^2}{2D} \left\{ \frac{\mu}{\beta + \mu} - e^{-\beta t} + \frac{\beta}{\beta - \mu} \left[e^{-2\mu t} - \frac{2\mu e^{-(\beta+\mu)t}}{\beta + \mu} \right] + \frac{\beta}{\beta - 2\mu} (e^{-\beta t} - e^{-2\mu t}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

³ A construção da Tabela 1 foi feita utilizando os seguintes parâmetros. Pusemos $\Phi_j = 0$ em todas as simulações. A posição inicial de X é 0. Nas simulações sob um campo potencial, a função utilizada foi $a(t) = (1 - \epsilon)t + \epsilon^2 t^2$, exceto no Caso 2, em que foi utilizada a função $a(t) = -\epsilon t + \epsilon^2 t^2$. O valor da constante ϵ foi fixado em $1/300$, o tempo t é medido em segundos. Para reinício não-estático, a função utilizada foi $G(t) = \epsilon t - \epsilon^2 t^2$ e tomou-se $\bar{x} = 1$. Nas simulações em que há reinício, a taxa utilizada foi $\beta = 0,5$. O coeficiente de difusão aplicado foi $D = 0,1$. Em cada caso, foram obtidas 1000 amostras. Em cada caminho amostral, a partícula tem tempo total para difusão igual a 600s. A coluna “Hits (%)” se refere a porcentagem de simulações em que ocorreu uma passagem pela barreira $x_a = 1$, com processo X começando de $x = 0$. Utilizou-se discretização temporal equidistante, com incremento igual a $\Delta = 10^{-4}$ s.

Para $t \rightarrow \infty$, temos os regimes

$$\mathbb{E}[C(t)] \approx \begin{cases} \left(1 + \frac{\sigma^2 \beta}{D}\right) t, & \mu \geq 0 \\ \frac{|\mu| \beta k^2}{2D(\beta + |\mu|)(\beta + 2|\mu|)} e^{2|\mu|t}, & \mu < 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Observando, portanto, o comportamento assintótico da variância e do custo médio, verificamos uma mudança de regime quando μ se altera de negativo para positivo.

6 Influência de $\bar{x}$

Nesta seção, apresentamos um estudo computacional para verificar a influência de $\bar{x}$ sobre o MFPT e MCOST. As Tabelas 2, 3 e 4 resumem os resultados.⁴ MFPT e MCOST estão expressos em segundos.

Inicialmente, consideramos dois casos de difusão sob potencial sem reinícios, para verificar que este processo comporta trajetórias que não atingem o objetivo dentro do tempo limite de simulação de 600s. De fato, na Tabela 2 estão os resultados das simulações para os casos em que o potencial é constante ou varia linearmente com o tempo, para diversos valores de $\bar{x}$. Aqui o MFPT calculado é condicionado aos caminhos amostrais que de fato ultrapassaram $x_a = 1$ dentro do tempo máximo de 600s. Em especial, notemos que na simulação em que $\bar{x} = 0$ (caso de uma difusão simples, incluída aqui para comparação), o valor obtido para MFPT = 41,168s é *condicional* às trajetórias que atingiram o objetivo dentro do tempo (92,2% das amostras). É sabido que sem esta condição, o MFPT é infinito (basta fazer $\beta \rightarrow 0$ na Equação 4.2).

Tabela 2. Percentual de caminhos amostrais que ultrapassaram $x_a = 1$ e variação do MFPT em função de $\bar{x}$, sob duas funções potenciais distintas e sem reinícios

$\bar{x}$	potencial constante em t $V(x, t) = a'(t)x, a(t) = -\bar{x}\epsilon t$		potencial varia linearmente com t $V(x, t) = a'(t)x, a(t) = -\bar{x}\epsilon t(1 - \epsilon t)$	
	Hits (%)	MFPT (s)	Hits (%)	MFPT (s)
-1,0	92,9	45,955	93,8	40,876
-0,5	91,7	41,631	93,4	41,353
0	92,2	41,168	92,2	41,168
0,5	93,7	42,791	92,0	40,035
1,0	93,0	41,247	92,8	37,590

Agora, passamos a incluir o reinício não-estático nas simulações, tendo em mente que, como salientado anteriormente, quando o potencial não é nulo, é importante existir o “equilíbrio” entre $\bar{x}G(t)$ e $a(t)$ para que MFPT seja finito. A Figura 4 mostra o gráfico das famílias de funções $\bar{x}G(t)$ consideradas nas simulações. No caso em que $G(t) = \epsilon t$, à medida em que $\bar{x}$ cresce, os reinícios acontecem em valores $X(T_i)$ cada vez maiores, conforme a inclinação da família de retas da Figura 4(a) aumenta. Quando $G(t)$ tem a forma quadrática $G(t) = \epsilon t(1 - \epsilon t)$, a família de parábolas da Figura 4(b) mostra que as posições dos reinícios $X(T_i)$ aumentam de valor quando $0 < T_i < 300s$, mas este comportamento se inverte para $T_i > 300s$.

⁴ A construção das Tabelas 2, 3 e 4 foi feita utilizando os seguintes parâmetros. Pusemos $\Phi_j = 0$ em todas as simulações. A posição inicial de X é 0. O valor da constante ϵ foi fixado em $1/300$, o tempo t é medido em segundos. Nas simulações em que há reinício, a taxa utilizada foi $\beta = 0,5$. O coeficiente de difusão aplicado foi $D = 0,1$. Em cada caso, foram obtidas 1000 amostras. Em cada caminho amostral, a partícula tem tempo total para difusão igual a 600s. A coluna “Hits (%)” se refere a porcentagem de simulações em que ocorreu uma passagem pela barreira $x_a = 1$, com processo X começando de $x = 0$. Utilizou-se discretização temporal equidistante, com incremento igual a $\Delta = 10^{-4}s$.

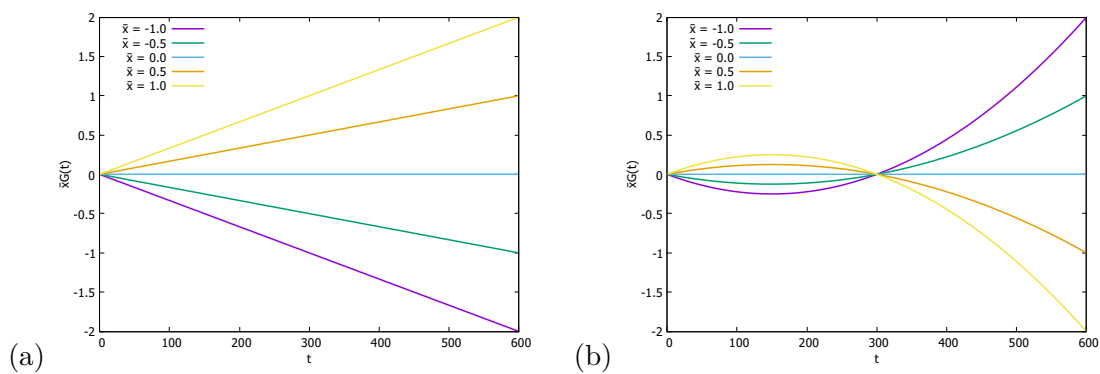


Figura 4. Representação gráfica das funções $\bar{x}G(t)$ utilizadas nas simulações, sob a variação de $\bar{x}$. Parte (a) $G(t) = \epsilon t$. Parte (b) $G(t) = \epsilon t(1 - \epsilon t)$

Nas tabelas 3 e 4, a linha correspondente a $\bar{x} = 0$ foi incluída a fim de comparar com os outros valores propostos para $\bar{x}$ diferentes de zero. Note que no caso em que $\bar{x} = 0$, não há potencial, mas há reinício *estático* atuando sobre o movimento Browniano.

Percebemos que, ao contrário das trajetórias que compuseram os dados da Tabela 2, onde em torno de 6% delas não ultrapassaram x_a dentro do limite de tempo de simulação, os caminhos amostrais que formaram os dados das Tabelas 3 e 4 atingiram o objetivo 100% das vezes, exceto por uma flutuação na linha em que $\bar{x} = -1,0$ na Tabela 3.

Na Tabela 3 podemos comparar a variação de MFPT e MCOST devido ação do reinício não-estático da forma $\bar{x}G(t) = \bar{x}\epsilon t$ para diversos valores de $\bar{x}$ e em dois casos: o primeiro, quando o potencial é nulo; o segundo quando o potencial é constante sendo $a(t) = -\bar{x}G(t)$. Quando $\bar{x}$ cresce, observamos que MFPT e MCOST decrescem nos dois casos considerados, exceto por uma pequena elevação de MCOST no valor de $\bar{x} = 0,5$ no caso em que há potencial.

Tabela 3. Variação de MFPT e MCOST com $\bar{x}$ para $G(t) = \epsilon t$ (linear)

$\bar{x}$	Potencial nulo			Com potencial		
	Hits (%)	MFPT (s)	MCOST (s)	Hits (%)	MFPT (s)	MCOST (s)
-1,0	99,9	19,964	13,918	100	21,337	14,680
-0,5	100	17,613	12,741	100	19,334	13,585
0	100	16,633	11,388	100	17,014	11,745
0,5	100	15,856	11,289	100	16,443	11,886
1,0	100	14,785	10,340	100	14,867	10,462

Na Tabela 4 podemos comparar a variação de MFPT e MCOST devido ação do reinício não-estático da forma $\bar{x}G(t) = \bar{x}\epsilon t(1 - \epsilon t)$, também em dois casos: o primeiro, quando o potencial é nulo; o segundo quando o potencial varia linearmente com t , sendo $a(t) = -\bar{x}G(t)$. Quando $\bar{x}$ cresce, observamos que MFPT e MCOST decrescem nos dois casos considerados, exceto por uma pequena elevação de MCOST no valor de $\bar{x} = 0,5$ nos dois casos.

Tabela 4. Variação de MFPT e MCOST com $\bar{x}$ para $G(t) = \epsilon t(1 - \epsilon t)$ (quadrática)

$\bar{x}$	Potencial nulo			Com potencial		
	Hits (%)	MFPT (s)	MCOST (s)	Hits (%)	MFPT (s)	MCOST (s)
-1,0	100	19,927	14,195	100	19,476	14,055
-0.5	100	18,290	12,900	100	16,773	11,488
0	100	16,633	11,388	100	16,633	11,388
0,5	100	16,203	11,634	100	16,063	11,864
1,0	100	15,536	10,545	100	15,072	10,013

7 Controlando o retorno à trajetória

Vimos que a existência de um “equilíbrio dinâmico” entre a função de reinício não-estático e o potencial acaba sendo essencial para que MFPT e MCOST sejam finitas. Segue uma argumentação para o uso dessa expressão. Vamos considerar o cenário em que o reinício não-estático é utilizado para recolocar a partícula de novo na sua trajetória prevista, especificada pela força $F(x, t)$. Isto é, podemos imaginar que, se não houvesse atuação de “choques” aleatórios devidos a $\mathcal{B}(t)$, a partícula seguiria uma trajetória determinística definida por $F(x, t)$. Então, para mitigar o efeito de $\mathcal{B}(t)$ sobre a trajetória, um *controlador* atua, em instantes aleatórios T_i , para recolocar a partícula na posição em que podemos predizer que ela estaria. Isso se traduz em supormos a igualdade

$$a(t) = -\bar{x}G(t). \quad (7.1)$$

O processo $X(t)$ intermitentemente retorna à sua trajetória *pré-definida* descrita por $-a(t)$ (apesar de tais retornos serem perturbados pelo ruído Φ_i), e podemos enxergar o termo $\bar{x}G(t)$ como um controlador que auxilia neste retorno à trajetória. Veja a Figura 1(b). Ademais, se projetarmos $\bar{x}G(t)$ para ser igual a $-a(t)$, como na equação (7.1), então vemos, através da Equação (3.4), que a variância de $X(t)$ é minimizada em torno de seu caminho médio, conforme a observação 3.2.

De agora até o final da seção vamos admitir a validade da Equação (7.1). Vamos também tomar $\Phi_0 = Z$ e $\Phi_i = 0$ (anulando o ruído nos reinícios). Desta forma, obtemos

$$X(t) = Z - a(t), \quad (7.2)$$

e a MGF de $X(t)$ fica dada por $\mathbb{E}[e^{\theta X(t)}] = \frac{\beta}{\beta - \theta^2 D} e^{-\theta a(t)}$. Sob estas hipóteses, lembramos que Z é a VA que representa o estado estacionário do processo de Evans-Majumdar, que na literatura de física é conhecido como *estado estacionário de não-equilíbrio* [2]. A seguir exploraremos alguns desdobramentos teóricos destas hipóteses que podem gerar futuros estudos.

1. Grandes Desvios

Para estudar grandes desvios (no âmbito de *Large Deviations Theory*) [25], e entender as flutuações de $X(t)$ em torno de seu comportamento mais provável, precisamos definir a função $\Lambda(\theta; t) = \ln \mathbb{E}[e^{\theta X(t)}]$ e calcular a transformada de Legendre de $\Lambda(\theta; t)$:

$$I(x; t) = \sup_{\theta \in \mathbf{R}} \{\theta x - \Lambda(\theta; t)\}.$$

O valor para θ^* que leva ao supremo deve permanecer dentro do intervalo $\left(-\sqrt{\frac{\beta}{D}}, \sqrt{\frac{\beta}{D}}\right)$. A

rate function $I(x; t)$ pode ser obtida como sendo

$$I(x; t) = -1 + \sqrt{1 + [x + a(t)]^2 \frac{\beta}{D}} + \ln \left\{ 2D \left[-1 + \sqrt{1 + [x + a(t)]^2 \frac{\beta}{D}} \right] / [\beta(x + a(t))^2] \right\}. \quad (7.3)$$

De forma geral, interpretamos que, para cada t fixo, valem os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[A_n > a] = -\inf_{x > a} I(x; t)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[A_n < a] = -\inf_{x < a} I(x; t)$, o que produz uma medida da velocidade com que a probabilidade do evento raro $[A_n > a]$ ou $[A_n < a]$ tende a zero.

2. Média Temporal

Uma quantidade importante em aplicações é o valor médio de um dado funcional ou observável de X no intervalo $[0, t]$, dado pela VA $\mathcal{F}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(X(v)) dv$, onde f é alguma função real de $X(t)$ [21, 26]. Em sistemas ergódicos, ocorre a igualdade entre a média temporal e a esperança com respeito à distribuição de probabilidade estacionária $p(x)$ do processo (caso ela exista), i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(t) = \int_{\Omega} f(x) p(x) dx$.

Em particular, se f é a função identidade, o valor médio que X assume no intervalo $[0, t]$ é dado pela VA

$$\overline{X}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t X(v) dv = Z - \frac{1}{t} \int_0^t a(v) dv. \quad (7.4)$$

Logo sua MGF é dada por $\mathbb{E}[e^{\theta \overline{X}(t)}] = \exp \left\{ -\frac{\theta}{t} \int_0^t a(v) dv \right\} \frac{\beta}{\beta - \theta^2 t D}$. A *rate function* também pode ser obtida sem maiores dificuldades neste caso.

3. Trabalho

Associado ao potencial $V(x; t)$ temos a medida do trabalho realizado no sistema [27, 28]:

$$W(0, t) = \frac{1}{k_B T} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \lambda} V(X(v); \lambda) \frac{d\lambda}{dv} dv, \quad (7.5)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do meio. O cálculo de $W(0, t)$ retorna $W(0, t) = \frac{1}{k_B T} \left\{ [H(t) - H(0)]Z - \int_0^t H'(v) a(v) dv \right\}$ e sua MGF é dada por

$$\mathbb{E}[e^{\theta W(0, t)}] = \beta \exp \left\{ -\frac{\theta}{k_B T} \int_0^t H'(v) a(v) dv \right\} / \left\{ \beta - \frac{\theta^2 [H(t) - H(0)]^2 D}{k_B^2 T^2} \right\}. \quad (7.6)$$

4. Filtragem

Suponhamos que o processo $X(t) = Z - a(t)$ não é diretamente observado, mas podemos observar uma transformação de $X(t)$ com um ruído aditivo $\mathcal{V}$. É possível estimar $X(t)$ (obter a estimativa linear ótima $\hat{X}(t)$) através da equação de observação $dY(t) = \mu(t)X(t)dt + d\mathcal{V}(t)$ [29]. De fato, consideremos o sistema

$$\begin{cases} dX(t) &= -a'(t)dt \\ dY(t) &= \mu(t)X(t)dt + d\mathcal{V}(t) \end{cases}$$

onde temos a equação de estado e a equação de observação, respect., $Y(t)$ é o processo observado, $\mu(t)$ é uma função determinística e $\mathcal{V}(t)$ é um movimento Browniano independente. Definimos a estimativa de $X(t)$ como sendo $\hat{X}(t) = \mathbb{E}[X(t)|Y(s), 0 \leq s \leq t]$ e o erro médio quadrático $R(t)$ como $R(t) = \mathbb{E}[(X(t) - \hat{X}(t))^2 | Y(t)]$. Sendo $\hat{X}(0) = \mathbb{E}[X(0)]$ o valor inicial,

então $\hat{X}(t)$ satisfaz à EDE

$$d\hat{X}(t) = - \left[a(t) + \mu^2(t)R(t)\hat{X}(t) \right] dt + R(t)\mu(t)dY(t) \quad (7.7)$$

para $R(t) = \left[R(0)^{-1} + \int_0^t \mu^2(v)dv \right]^{-1}$. A Equação (7.7) é a equação do filtro.

Uma escolha possível para $\mu(t)$ poderia ser constante igual a 1 e isto corresponderia a $Y(t)$ ser uma observação do processo $t\bar{X}$ com ruído. Outra escolha seria $\mu(t) = \frac{H'(t)}{k_B T}$ e aqui $Y(t)$ se tornaria uma observação com ruído do processo $W(0, t)$.

8 Conclusão

A utilização de um protocolo em que há (1) reinícios não-estáticos aliado a um (2) potencial variante no tempo contribui para ampliar o rol de modelos na área de processos difusivos com reinícios e pode conseguir gerar resultados novos. Em especial, percebemos que a existência de um equilíbrio entre estes dois fatores permite à partícula difusiva ultrapassar uma dada barreira num tempo finito. O trabalho pode prosseguir através da pesquisa sobre ergodicidade e conteúdo espectral, além de estudos de casos com grau de complexidade cada vez maiores, os quais dependam de simulações numéricas.

Fontes de Financiamento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG, sob os processos RED-00133-21 e APQ 01987-22.

Orcid

Telles Timóteo da Silva  <https://orcid.org/0000-0002-3810-8688>

Referências

1. M. R. Evans and S. N. Majumdar, “Diffusion with Optimal Resetting”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 435001, 2011.
2. M. R. Evans and S. N. Majumdar, “Diffusion with Stochastic Resetting”, *Physical Review Letters* **106**, 160601, 2011.
3. B. Besga, A. Bovon, A. Petrosyan, S. N. Majumdar and S. Ciliberto, “Optimal mean first-passage time for a Brownian searcher subjected to resetting: Experimental and theoretical results”, *Phys. Rev. Research* **2**(3), 032029, 2020. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.032029>
4. O. Tal-Friedman, A. Pal, A. Sekhon, S. Reuveni and Y. Roichman, “Experimental realization of diffusion with stochastic resetting”, *J. Phys. Chem. Lett.* **11**(17), 7350–7355, 2020. <http://dx.doi.org/10.1021/acs.jpcclett.0c02122>
5. S. Reuveni, M. Urbakh and J. Klafter, “Role of substrate unbinding in Michaelis-Menten enzymatic reactions”, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **111**(12), 4391–4396, 2014.
6. A. M. Ramoso, J. A. Magalang, D. Sánchez-Taltavull, J. P. Esguerra and É Roldán, “Stochastic resetting antiviral therapies prevent drug resistance development”, *EPL* **132**(5), 50003, 2020. <https://iopscience.iop.org/article/10.1209/0295-5075/132/50003/meta>
7. T. T. Da Silva and M. D. Fragoso, “Diffusion with stochastic resetting of interacting particles emerging from a model of population genetics”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **55**(14003), pp. 1–28, 2022.

8. R. Poghosyan, V. Suvorov, R. Zadourian and D. B. Saakian, “The Non-perturbative Phenomenon for the Crow Kimura Model with Stochastic Resetting”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **92** (12), 124801, 2023. <https://doi.org/10.7566/JPSJ.92.124801>
9. M. Montero, J. Perelló and J. Masoliver, “Valuing the distant future under stochastic resettings: the effect on discounting”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **55**(46), 464001, 2022. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/ac9f8a/meta>
10. V. Stojkoski, P. Jolakoski, A. Pal, T. Sandev, L. Kocarev and R. Metzler, “Income inequality and mobility in geometric Brownian motion with stochastic resetting: theoretical results and empirical evidence of non-ergodicity”, *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* **380**(2224), 20210157, 2022. <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2021.0157>
11. M. R. Evans, S. N. Majumdar and G. Schehr, “Stochastic Resetting and Applications”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **53**, 193001, 2020. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ab7cfe>
12. S. Gupta and A. M. Jayannavar, “Stochastic resetting: A (very) brief review”, *Front. Phys.*, **10**, 789097, 2022. <http://dx.doi.org/10.3389/fphy.2022.789097>
13. S. Ahmad, I. Nayak, A. Bansal, A. Nandi and D. Das, “First passage of a particle in a potential under stochastic resetting: A vanishing transition of optimal resetting rate”, *Phys. Rev. E* **99**, 022130, 2019.
14. A. Pal, “Diffusion in a potential landscape with stochastic resetting”, *Physical Review E* **91**(012113), pp. 1–7, 2015.
15. M. A. F. Dos Santos, “Fractional Prabhakar Derivative in Diffusion Equation with Non-Static Stochastic Resetting”, *Physics* **1**, pp. 40 – 58, 2019. doi:10.3390/physics1010005
16. J. Q. Toledo-Marin, D. Boyer and F. J. Sevilla, “Predator-prey Dynamics: chasing by stochastic resetting”, *Arxiv*, 2019. <http://arxiv.org/abs/1912.02141>
17. J. Q. Toledo-Marin and D. Boyer, “First passage time and information of a one-dimensional Brownian particle with stochastic resetting to random positions”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **625**, 129027, 2023. doi: 10.1016/j.physa.2023.129027
18. T. T. Da Silva, T. T., “On a Diffusion which Stochastically Restarts from Moving Random Spatial Positions: a Non-renewal Framework”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **56**(49), 495004, 2023. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ad09ed>
19. S. Reuveni, “Optimal Stochastic Restart Renders Fluctuations in First Passage Times Universal”, *Phys. Rev. Lett.*, **116**, 170601, 2016. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.170601>
20. J. C. Sunil, R. A. Blythe, M. R. Evans and S. N. Majumdar, “The cost of stochastic resetting”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **56**(39), 395001, 2023. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/acf3bb/meta>
21. V. Stojkoski, T. Sandev, L. Kocarev and A. Pal, “Autocorrelation functions and ergodicity in diffusion with stochastic resetting”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **55**, 104003, 2022. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac4ce9>
22. S. N. Majumdar and G. Oshanin, “Spectral content of fractional Brownian motion with stochastic reset”, *J. Phys. A Math. Gen.*, **51**, 435001, 2018. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/aadef0>
23. D. Vinod, A. Cherstvy, R. Metzler and I. Sokolov, “Time-averaging and Nonergodicity of Reset Geometric Brownian Motion with Drift”, *Phys. Rev. E*, **106**, 034137, 2022. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.106.034137>
24. E. Barkai and R. Flaquer-Galmés and V. Méndez, “Ergodic properties of Brownian motion under stochastic resetting”, *Phys. Rev. E*, **108**, 064102, 2023. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.108.064102>
25. M. Bachar, J. J. Batzel and S. Ditlevsen, *Stochastic Biomathematical Models: with Applications to Neuronal Modeling*, Springer, 2012.
26. J. M. Meylahn, S. Sabhapandit and H. Touchette, “Large deviations for Markov processes with resetting”, *Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys.*, **92** (6), 062148, 2015.

- <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.92.062148>
27. C. Jarzynski, “Nonequilibrium Equality for Free Energy Differences”, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(14), pp. 2690–2693, 1997. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.2690>
 28. D. Gupta, C. A. Plata and A. Pal, “Work Fluctuations and Jarzynski Equality in Stochastic Resetting”, *Phys. Rev. Lett.*, **124**(11), 110608, 2020. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.110608>
 29. A. Bain and D. Crisan, *Fundamentals of Stochastic Filtering*, Springer: New York, 2009. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-76896-0>