

ARTIGO <https://doi.org/10.22481/praxisedu.v16i41.6491>**FORMAÇÃO DO CONCEITO DE PROPORCIONALIDADE NA PERSPECTIVA DO
ENSINO DESENVOLVIMENTAL**FORMATION OF THE CONCEPT OF PROPORTIONALITY FROM THE PERSPECTIVE
OF DEVELOPMENTAL EDUCATIONFORMACIÓN DEL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD DESDE LA PERSPECTIVA
DE LA EDUCACIÓN PARA EL DESARROLLO*José Carlos Miguel*

Universidade Estadual Paulista – Brasil

Resumo: O artigo discute o processo de formação do conceito de proporcionalidade por estudantes do ensino fundamental e as implicações pedagógicas de sua exploração didática na perspectiva do ensino desenvolvimental. Vale-se de ampla pesquisa bibliográfica, de análise documental e de dados levantados em projeto de intervenção na realidade escolar, versando sobre percepções e representações acerca de situações matemáticas envolvendo as noções de proporcionalidade direta e inversa. Os resultados apontam para a necessidade de os docentes considerarem as relações entre o vivido, o percebido e o concebido no ensino da noção de proporcionalidade, explorando diferentes situações matemáticas no contexto de representações semióticas de ideias do campo multiplicativo.

Palavras-chave: Atividade Matemática. Proporcionalidade. Ensino Desenvolvimental.

Abstract: The article discusses the process of formation of the concept of proportionality by elementary school students and the pedagogical implications of its didactic exploration in the perspective of developmental teaching. It uses extensive bibliographic research, document analysis and mathematical activities of usual teaching materials, dealing with perceptions and representations about mathematical situations involving the notions of direct and inverse proportionality. The results point to the need for teachers to consider the relationships between the lived, the perceived and the conceived in teaching the notion of proportionality, exploring different mathematical situations in the context of semiotic representations of ideas from the multiplicative field.

Keywords: Mathematical Activity. Proportionality. Developmental Teaching.

Resumen: El artículo discute el proceso de formación del concepto de proporcionalidad por parte de estudiantes de primaria y las implicaciones pedagógicas de su exploración didáctica en la perspectiva de la enseñanza del desarrollo. Utiliza una extensa investigación bibliográfica, análisis de documentos y actividades matemáticas de materiales didácticos habituales, que trata con percepciones y

representaciones sobre situaciones matemáticas que involucran las nociones de proporcionalidad directa e inversa. Los resultados apuntan a la necesidad de que los maestros consideren las relaciones entre lo vivido, lo percibido y lo concebido al enseñar la noción de proporcionalidad, explorando diferentes situaciones matemáticas en el contexto de representaciones semióticas de ideas del campo multiplicativo.

Palabras clave: Actividad matemática. Proporcionalidad. Enseñanza del desarrollo.

Introdução

O presente artigo tem por escopo uma discussão de natureza teórico-metodológica sobre o processo de formação do conceito de proporcionalidade por estudantes do ensino fundamental e as implicações pedagógicas de sua exploração didática na perspectiva do ensino desenvolvimental.

Partimos de indagações acerca do desenvolvimento da noção de proporcionalidade, da pertinência do seu estudo desde os anos iniciais do ensino fundamental e dos resultados, reconhecidamente preocupantes, apresentados pelos indicadores de avaliação educacional em grande escala, a despeito de questionamentos, igualmente relevantes, sobre os condicionantes políticos, econômicos e socioculturais que envolvem tais formulações. Embora pouco frequente no discurso pedagógico nesse nível de ensino, o conceito de proporcionalidade é fundamental para a consolidação não apenas do pensamento matemático, mas de todo o pensamento científico, em todas as áreas do conhecimento, influenciando sobremaneira o desenvolvimento do pensamento teórico.

Dentre os questionamentos iniciais de pesquisa, destacamos as que seguem, as quais delimitam o nosso objeto de estudo. É possível explorar situações didáticas envolvendo a noção de proporcionalidade com crianças dos anos iniciais do ensino fundamental? O desenvolvimento dos modelos matemáticos envolvidos na aplicação da noção matemática de proporcionalidade pode se efetivar a despeito da experiência escolar? Quais as implicações pedagógicas do ensino de proporcionalidade nos anos iniciais do ensino fundamental? Quais são as implicações pedagógicas para a formação do pensamento teórico ao longo do ensino fundamental? Como a noção de proporcionalidade aparece nas organizações curriculares do ensino fundamental em âmbito nacional? As formulações teórico-metodológicas dessas tentativas de reorganização curricular são coerentes com uma proposta de ação pedagógica na perspectiva do ensino desenvolvimental?

Sob o nosso ponto de vista, é possível explorar situações didáticas diversas nos anos iniciais do ensino fundamental que podem favorecer o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade. Assim, o artigo tem o intuito de trazer aos professores desse nível de ensino reflexões que os auxiliem na prática pedagógica sobre a temática da proporcionalidade.

Destacamos que o presente estudo resulta de uma pesquisa exploratória, de natureza ampla, que analisa como inserir atividades didáticas envolvendo a noção de proporcionalidade nos anos iniciais do ensino fundamental, discutindo as implicações para a prática docente e para o desenvolvimento intelectual das crianças ao longo de todo o ensino fundamental.

Como parte do declarado intento da pesquisa, investigou-se com base em ampla pesquisa bibliográfica, em análise documental e na análise de atividades matemáticas propostas em sala de aula, se e como as tentativas recentes de renovação dos programas de ensino de Matemática do ensino fundamental consideram as percepções e representações dos estudantes quanto à noção de proporcionalidade.

Com base na análise documental consideramos relevante investigar as práticas pedagógicas sugeridas para a composição da rotina diária da educação matemática desde os anos iniciais do ensino fundamental em termos de conteúdos que possam favorecer o desenvolvimento da noção de proporcionalidade procurando estabelecer relações entre as práticas pedagógicas a serem desenvolvidas com esse intento, os processos formativos necessários e as diretrizes curriculares voltadas para a formação do conceito de proporcionalidade no ensino fundamental.

Esse exercício teórico permitiu o apontamento de elementos teórico-metodológicos fundamentais para o desenvolvimento de metodologias alternativas para o ensino de proporcionalidade no transcurso do ensino fundamental bem como discutir aspectos centrais das diretrizes curriculares situadas nesse contexto. Ao final, apontamos para delineamentos teóricos que situam a prática pedagógica acerca da noção de proporcionalidade no ensino fundamental na perspectiva do ensino de natureza desenvolvente.

No contexto dessas ideias, entre as principais teses acerca do ensino desenvolvimental, é nossa preocupação central neste artigo a que se refere às peculiaridades das ações de estudo:

O trabalho das crianças em situações de estudo se estrutura a partir de ações de diversos tipos. Entre elas ocupam lugar especial *as ações de estudo*. Por meio delas, os alunos reproduzem e assimilam os modelos de modos de ação típicos para resolver as tarefas e os modos generalizados de ação para determinar as condições em que se aplicam. Essas ações podem ser feitas tanto no plano objetual como no plano mental. Sua composição não é homogênea. Algumas são características da assimilação de qualquer material didático, outras do trabalho dentro de um conteúdo para além da reprodução de alguns

modelos parciais. Assim, as ações que permitem, aos alunos, a representação de modelos dados, se aplicam ao estudo de qualquer conteúdo. Independente de qual seja o tema que se estuda, essa representação pode ser gráfica (esquemas, fórmulas), espacial (modelos de três dimensões), descritivo-verbal, etc. Reagrupar o material pelo seu sentido, destacar com critério lógico seus pontos de apoio, elaborar o esquema lógico e seu plano, são as ações de estudo mais adequadas para assimilar conteúdos de caráter descritivo. (DAVIDOV, 2019, p. 184).

Vê-se que na perspectiva do ensino desenvolvimental as possibilidades de superação desse problema pedagógico se situam, no limite, no envolvimento das crianças em diferentes ações de estudo, mas especificamente, aquelas que configuram um processo de produção de sentidos de aprendizagem e de negociação de significados matemáticos. O corolário citado de Davidov permite considerar também que a formação do conceito de proporcionalidade envolve questões relativas às representações semióticas, quais sejam: ação objetiva, relação de uma magnitude com outra, tomada como referência; ação verbal explicitando ideias envolvidas no fato matemático em questão; e, ação mental, organizadora dessa ideia matemática em termos de conexões que conduzam à multiplicidade de suas representações, o que indica proximidade teórica com os pensamentos de Duval (2003) e Vergnaud (1993).

A interlocução com a propositura davidoviana é pertinente porquanto envolve aspecto central do processo de ensino de Matemática na educação básica. Nesse sentido, é possível afirmar que a cultura escolar, quando se propõe a explorar a noção de proporcionalidade, coloca maior ênfase nos aspectos sintáticos, ou seja, em um conjunto de regras para operar com as ideias matemáticas, do que nos aspectos semânticos, isto é, nos significados das ideias matemáticas, conforme podemos constatar com Carraher, 1991 e Machado, 1990.

Com efeito, é conveniente lembrar que sob a influência do pensamento euclidiano, os matemáticos compreendem que uma definição ou conceito é a expressão de suas relações com algo conhecido, mas que nem tudo pode ser definido porque isso implicaria em conhecer, a priori, todas as demais coisas. Por isso é que a obra “Os Elementos”, de Euclides, cuja proposição original foi escrita por volta do ano 300 a. C., estabelece a distinção entre as proposições aceitas sem demonstração, os postulados ou axiomas, e aquelas que exigem demonstração, os teoremas. Nesse modo de pensar, como exemplo, o toque de um lápis, bem apontado, no papel, ou uma estrela no céu, a depender de sua dimensão, são boas noções intuitivas de ponto e não carecem de demonstração, mas o teorema de Pitágoras a exige para ser aceito e reconhecido. De fato,

Um dos capítulos mais importantes da história cultural, embora pouco conhecido, é a transformação do primitivo conhecimento matemático

empírico de egípcios e babilônios na ciência matemática grega, dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas. Quem se aproxime descuidadamente a essa história terá a impressão de a geometria ter nascido inteiramente radiante da cabeça de Euclides, como Atenas da de Zeus. Tal foi o êxito dos seus *Elementos* no resumir, corrigir, dar base sólida e ampliar os resultados até então conhecidos que apagou, quase que completamente, os rastros dos que o precederam. (BICUDO apud EUCLIDES, 2009, p. 83, destaque no original).

Assim é que a cultura da Matemática escolarizada, situada irrefutavelmente na abordagem tipicamente racionalista do modelo formal euclidiano, tomado equivocadamente como método de ensino, se apoia excessivamente e de maneira precoce, na difusão de símbolos e procedimentos algorítmicos, distanciando-se de ações de estudo que possibilitem às crianças o estabelecimento de relações conceituais e, principalmente, a riqueza das articulações entre o ambiente matemático e a realidade.

Por óbvio, o problema pedagógico não decorre do modelo formal euclidiano, per si, mas do uso inadequado que dele se faz no cotidiano da escola básica, tomando-o como modelo didático ou metodológico. Impõe-se, então, a transformação da cultura escolar.

Desenvolvimento do tema e discussão

Pensar a formação de um conceito envolve, inicialmente, considerar em devida dimensão a relação dialética de reciprocidade entre a ontogênese, o desenvolvimento do sujeito enquanto tal, e a filogênese, o desenvolvimento da espécie a qual o sujeito pertence, o que pode indicar a perspectiva de uma integração entre os fatores socioculturais e o processo de ensino e aprendizagem. Por óbvio, não se trata de o aluno repetir a trajetória histórica de desenvolvimento da humanidade, mas precisamente de aprender a reconhecer que os conceitos em geral, e os matemáticos, em particular, evoluem, e são determinados pelos fazeres humanos, de naturezas diversas.

Assim, essa discussão envolve condicionantes de natureza histórica, lógica e de prática social uma vez que conhecer o processo histórico que gerou o conhecimento configura-se em uma forma de compreensão, atribuindo significação social ao fato matemático e que, situando o homem como agente da sua própria cultura, mostra a própria cultura como fato social.

Sob o nosso ponto de vista, estabelecer relações de proporcionalidade, reconhecendo regularidades ao observar representações esquemáticas, formas geométricas que povoam a realidade, ler gráficos e tabelas, enfim, estabelecer conexões entre dados quantitativos da

realidade e o que se estuda acerca dessa temática ainda é o grande desafio que se coloca para o trabalho na escola.

As tentativas recentes de renovação dos programas de ensino de Matemática (BRASIL, 1998, 2018; SÃO PAULO, 1992, 2007) enfatizam que os conceitos relevantes para a formação matemática na sociedade atual devem ser abordados desde a escolarização formal, em especial, aqueles conceitos que podem atingir níveis mais elevados de complexidade, tais como os números racionais, probabilidade, semelhança e simetria. São conceitos que permitem formulações decisivas para compreensão da realidade e que se relacionam intrinsecamente com as estruturas multiplicativas e a noção de proporcionalidade.

De forma geral, compreende-se que a noção de proporcionalidade é uma ideia central no conteúdo matemático que se ensina no nível fundamental,

[...] não só em outros temas do conteúdo matemático, como por exemplo, a semelhança, mas também em outras áreas do conhecimento: Geografia, Química, Física, Economia, Matemática Financeira, Estatística, etc. Muitos tópicos, que deveriam ser tratados de forma vinculada à Proporcionalidade, têm sido trabalhados de forma isolada uns dos outros, dificultando sua aprendizagem e síntese por parte dos alunos. (SÃO PAULO, 1992, p. 141).

Enfatiza-se, então, a introdução do tema a partir do que já foi apropriado pelo aluno ao longo do ensino fundamental, ampliando-se as ideias de manipulação conceitual das estruturas multiplicativas, fração, propriedade das frações e equivalência de frações. Busca-se com tais orientações desviar a ênfase dada à nomenclatura usual marcada pela repetição e manipulação mecânica de algoritmos para a compreensão das ideias envolvidas.

Tal modo de pensar a organização do programa de ensino de proporcionalidade apoia-se na concepção de que a formação de conceitos se processa no decorrer de um longo processo de escolarização, avançando de situações matemáticas intuitivas para as situações mais sistematizadas. No entanto, não é o que ocorre, de forma geral, na prática pedagógica cotidiana. O que se vê nas escolas e nos materiais didáticos usuais, com raras exceções, é a prevalência do procedimento algorítmico repetido à exaustão para posterior aplicação em situações-problema, as quais os alunos somente conseguem resolver se não apresentarem elemento novo no enunciado que exija algo mais que o mecanismo usual de imitação e treino.

Tomemos como exemplo uma situação didática corriqueira nos textos didáticos usuais dos anos iniciais: “Vende-se uma garrafa de água a R\$ 2,00. Qual é o valor a ser pago por 2 garrafas de água? E por 5 garrafas?”

Em geral, esse tipo de exercício é proposto às crianças à exaustão, mas, a despeito de sua pertinência e do uso social inerente, permite apenas a aplicação da noção de multiplicação ou de adição reiterada de parcelas iguais em procedimentos repetitivos e estanques do tipo $2 \times 2 = 4$ ou $5 \times 2 = 10$, além de suas estruturas aditivas correlatas $2 + 2 = 4$ ou $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$.

Ao discutir os problemas psicológicos do processo de aprendizagem dos estudantes, Davidov (2019, p. 172) estabelece que:

A generalização empírico-formal, que surge no homem durante a solução de uma série de tarefas práticas concretas, garante a assimilação de certa soma de conhecimentos elaborados. O princípio (modo) de desenvolvimento do material relacionado com essa generalização, e que se aplica nas primeiras séries do nível fundamental, tem um grande significado na vida da criança, dando-lhe precisão e disciplina a seu trabalho intelectual durante a classificação e descrição dos objetos. Porém, o processo de assimilação dos conhecimentos elaborados permanece aqui dentro dos limites da atividade cotidiana de manipulação objetiva que a criança realiza, e não cria as premissas necessárias para a formação da atividade propriamente de estudo com o conteúdo e a estrutura correspondentes. (DAVIDOV, 2019, p. 173).

Assim, segundo o autor, a generalização que se volta ao desenvolvimento do pensamento teórico é absolutamente distinta da generalização empírico-formal. Enquanto esta se volta a propriedades gerais e aparentemente iguais dos objetos, a primeira se ocupa das condições de origem de algum sistema de objetos de estudo mediante sua transformação real ou psíquica. Trata-se, então, de inserção dos objetos de estudo em um sistema de relações, concatenando-as com vistas à apropriação de significados que, em geral, extrapolam a sua dimensão primeira.

Desse modo de pensar decorre que o constructo desse modelo didático impõe às condutas escolares uma transformação radical. Retomando a questão matemática inicialmente discutida, sob a perspectiva de se pensar a atividade matemática como ação de ensino desenvolvendo, a exploração das estruturas multiplicativas poderia se valer de outros invariantes.

Como isso poderia ser feito com vistas ao desenvolvimento do pensamento proporcional? Por exemplo, explorando com as crianças algumas questões estritamente relacionadas à exploração do raciocínio multiplicativo para além da perspectiva de generalização empírico-formal, como segue.

- a) O que acontece com o preço quando dobramos o número de garrafas?
- b) O que acontece com o preço quando triplicamos o número de garrafas?

- c) Se triplicarmos o dinheiro que temos para comprar água, o que acontece com o número de garrafas que podem ser adquiridas?
- d) Se reduzirmos à quarta parte o dinheiro que temos para comprar água, o que acontece com a quantidade de garrafas a serem adquiridas?
- e) Se multiplicarmos por 10 o dinheiro a ser investido na compra de água, o que acontecerá com a quantidade de garrafas que podem ser adquiridas?

Esses questionamentos são ricos em significados porquanto, a depender da quantia de dinheiro que o sujeito dispõe, não será possível comprar uma garrafa inteira, o que evidenciará a necessidade do fracionamento, ou não, das garrafas. E possibilitará ao professor a possibilidade de propor aos educandos a reescrita dos problemas, com situações matemáticas que possibilitem o fracionamento proporcional das grandezas envolvidas, por exemplo, na compra de carne ou batata, em quilogramas, ou de tecido, em metros. Tal procedimento, de forma sistemática pelo professor, além de inserir os alunos em um processo de leitura e de escrita em ambiente matemático, os coloca não apenas como resolvidores de problemas, como sói acontecer no procedimento tradicional, mas também como formuladores de problemas.

O fato, então, é que as crianças não desenvolvem a noção de proporcionalidade apenas pelo procedimento algorítmico de multiplicar ou de dividir, ou de operar com frações, mas por lançar mão de diferentes representações semióticas que sustentam o conceito.

Na sequência do trabalho, a exploração de um quadro com alguns dados a serem completados pelas crianças possibilitará a ampliação das ideias envolvidas no conceito de proporcionalidade:

Litros de água	1	2	X	9	?	3	8	?	13	W
Preço em R\$	2	?	14	Y	12	6	16	28	19

A disposição dos valores de forma aleatória não é casual; justifica-se pela necessidade de exigir das crianças que não se prendam ao mecanismo algorítmico, imitativo-repetitivo, de acrescentar a cada litro a mais, dois reais a mais no valor total da compra, o raciocínio aditivo, embora também ele seja importante. Mais ainda, configura procedimento que permite às crianças progressivamente assimilarem as estruturas algébricas, necessárias não apenas para o auxílio no desenvolvimento das estruturas-mãe (algébricas, topológicas e de ordem), mas para o desenvolvimento do pensamento teórico, uma vez que isso se relaciona com o

desenvolvimento do pensamento científico em geral. Nesse jogo, letras, interrogações ou espaços em branco, a preencher, são incógnitas ou variáveis.

Sob esse ponto de vista, os professores não devem se desesperar com a necessidade de se explorar noções algébricas nos anos iniciais da escolarização como se verificou na discussão sobre alguns tópicos da Base Nacional Comum Curricular, a BNCC. Não é esse o problema; a questão é como fazer isso de forma que possa estar ao alcance cognitivo das crianças, mas pensamento algébrico é fundamento necessário à aprendizagem matemática, sob pena de efetivamente não se fazer Matemática.

Avançando nessa discussão, à medida que se introduz a noção de fração pode-se explorar relações do tipo $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = \dots$, ou seja, a classe de equivalência de uma fração, ou, que “1 está para 2 assim como 8 está para 16”, ou que “5 está para 10 assim como 19 está para 38”. Ou seja, em uma situação matemática de proporcionalidade direta há uma constante k de proporcionalidade, a qual, no caso é igual a $1/2$.

Mais ainda, é o desenvolvimento dessas representações semióticas que permitirão aos alunos compreenderem, ao final do ensino fundamental, que em uma relação proporcional “o produto dos extremos é igual ao produto dos meios”, a chamada Propriedade Fundamental das Proporções, em geral, apresentada aos alunos como coisa pronta, de forma abrupta e desconexa, destituída de significado efetivo para eles, como por vezes essas ideias matemáticas aparecem nos textos didáticos. Não é apenas pela verbalização de uma ideia matemática que se forma um conceito, mas pelas relações que se pode estabelecer entre os dados que a constitui.

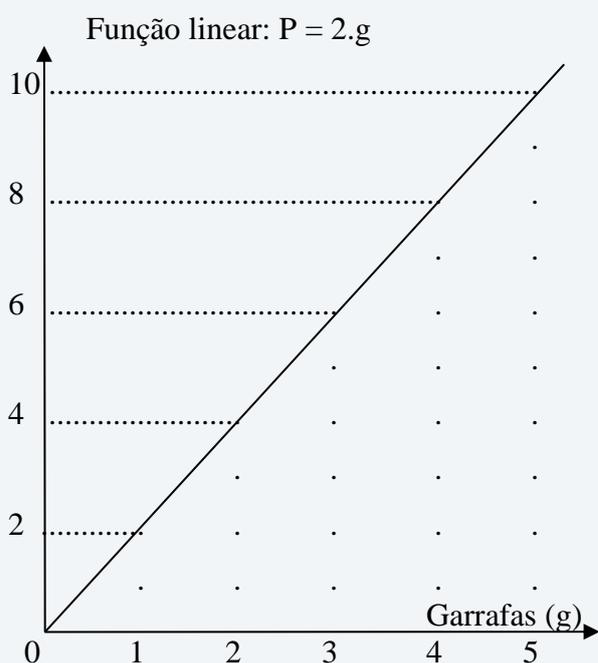
É pela exploração e reconhecimento de regularidades desde os anos iniciais do ensino fundamental, valendo-se dos raciocínios aditivo e multiplicativo nas relações entre grandezas, nas sequências numéricas e padrões geométricos, entre outras situações matemáticas, que o professor poderá conduzir os estudantes à familiarização com ideias que sustentarão a formação do conceito de proporcionalidade.

Tal procedimento didático, que se volta à produção de sentidos de aprendizagem e de negociação de significados matemáticos, pode ser explorado de forma a estabelecer conexões que permitirão aos alunos, no 2º segmento do ensino fundamental, compreender os famigerados “esquemas de flechas”, o procedimento didático usual para resolver uma regra de três simples, envolvendo proporcionalidade simples, direta ou inversa. Permitirá, por consequência, que os alunos possam compreender no 9º ano do ensino fundamental ou no ensino médio porque o gráfico de uma função linear é um segmento de reta que passa necessariamente pela origem do

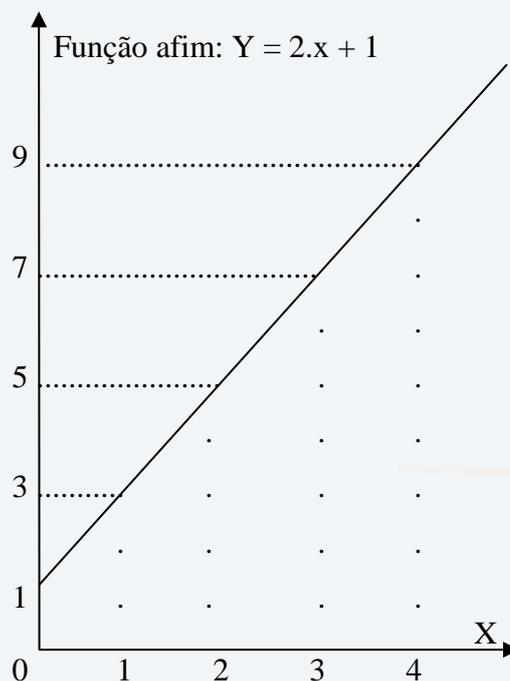
sistema cartesiano. Ao final das contas, se nenhuma garrafa de água é comprada, nenhum real será gasto, configurando o par ordenado $(0, 0)$.

Assim, o professor que tem a preocupação com a “formação dos sistemas de ações de estudo” (DAVIDOV, 2019) poderá estabelecer as relações com a ideia de função afim cuja representação gráfica não passa pela origem $(0, 0)$, não representa uma relação proporcional, mas cujo traçado gráfico também configura um segmento de reta.

Preço (P)



Y



Essas generalizações não se consolidam apenas pela repetição de procedimentos algorítmicos, apresentados como se fossem compartimentos estanques, com cada situação independente da anterior. Pelo contrário, as generalizações somente ocorrem pela articulação de raciocínios e de representações semióticas, verbalizadas inicialmente e registradas simbolicamente no curso do desenvolvimento.

De fato, o processo de apropriação de um conceito nunca é isolado, mas se integra a um conjunto de outros conceitos por meio de relações que se complexificam.

Ao elaborar a Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1993) destaca as estruturas multiplicativas e a proporcionalidade como elementos centrais na consolidação das estruturas cognitivas do pensamento que, para ele, se constituem em instrumentos para a análise de situações e de dificuldades enfrentadas pelos estudantes.

Para o autor, toda situação complexa é uma combinação de situações elementares, não se podendo contornar a análise das tarefas cognitivas por elas geradas, impregnadas pelo contexto sociocultural no qual se colocam:

[...] a organização de uma situação didática, em um processo coletivo de pesquisa em classe, supõe a consideração simultânea das funções epistemológicas de um conceito, da significação social das áreas de experiência a que ele se refere, do desempenho dos autores da situação didática, dos resultados desse desempenho, do contrato e da transposição. (VERGNAUD, 1993, p. 17).

É pelo estabelecimento de relações entre as ideias de proporcionalidade, coordenando-as, em processo dialético que envolve ações significativas de modificação e comparação dos fatos matemáticos abordados que se pode permitir aos alunos colocar em evidência a relação entre o significado e a representação da ideia matemática. Assim é que

Durante o processo de aprendizagem, é preciso que o professor tenha muito claro todo o conjunto de ações de estudo, tanto gerais como específicos, em conformidade com a assimilação das crianças, de uns e outros conceitos ou modos de ação, para resolverem as tarefas de alguns tópicos da matéria. Há que se formar, especialmente e com insistência nos pequenos escolares, o *sistema de ações de estudo* indispensáveis. Sem essas ações, a assimilação do material se efetuará às margens da Atividade de Estudo. Isso significa que a aprendizagem se fez formalmente, com a mera descrição verbal dos conceitos ou modos de ação de resolver problemas. (DAVIDOV, 2019, p. 185, destaques do autor).

Estabelece-se, então, que o desempenho didático adequado sustenta-se no conhecimento das dificuldades envolvidas nas tarefas cognitivas, nos obstáculos enfrentados, nos repertórios de procedimentos que o sujeito que aprende desenvolve e nas possibilidades de representação.

Então, o constructo teórico de Vergnaud (1993) é fundamental para a compreensão do problema colocado, mas é preciso avançar no sentido de se compreender melhor o papel das relações sociais no desenvolvimento do pensamento matemático e, especialmente, da formação do conceito de proporcionalidade. Isso significa que as crianças aprendem quando confrontam os seus modos de pensar com os dos outros, seja o docente, os seus colegas de classe ou as pessoas com as quais convivem, explorando outras representações semióticas.

Desse modo, as perspectivas de um processo de ensino de proporcionalidade voltado para as vivências dos sujeitos e que possibilite a eles compreenderem efetivamente a realidade na qual estão inseridos, desenvolvendo sua capacidade cognitiva e sua confiança para enfrentar desafios, se assentam sobre um conjunto de invariantes de natureza teórico-metodológica que não podem ser tratados isoladamente, de forma fragmentada.

Consideremos a seguinte situação-problema proposta para uma turma de alunos do 5º ano do ensino fundamental e que nos foi apresentada em uma reunião de formação continuada pela docente da turma, preocupada com os resultados auferidos:

Três Cartórios estão empenhados no Recadastramento Eleitoral para utilização do procedimento de Biometria:

a) O Cartório A, que tem maior quantidade de servidores, tem 5040 eleitores inscritos e já recadastrou 1260.

b) O Cartório B, que tem uma quantidade média de funcionários, já recadastrou 950 dos 4750 eleitores inscritos.

c) O Cartório C, que tem o menor número de servidores, tem 2360 eleitores inscritos e já recadastrou 1180 eleitores.

Pergunta-se: qual dos cartórios já atendeu, proporcionalmente, com maior eficiência, portanto, a maioria dos seus eleitores?

Segundo a docente, a maioria dos alunos indicou o Cartório A como o mais eficiente porque atendera 1260 pessoas e que, de um total de 28 alunos da turma, apenas nove deles conseguiram chegar à resposta correta, valendo-se da estratégia de dividir o total de eleitores registrados em cada cartório pelo número de eleitores cadastrados em cada cartório. Além disso, quatro alunos tentaram aplicar essa estratégia e não conseguiram efetuar corretamente a operação envolvida.

A análise do episódio revela aspectos fundamentais para a nossa reflexão. Primeiramente, a questão apresentada aos alunos era significativa, atual e relevante, naquele momento, com forte apelo midiático. Era uma situação matemática que permitia à docente ampla exploração e estabelecimento de conexões com outras áreas de conhecimento, mas especialmente quanto à questão do direito do cidadão de votar e ser votado, embora cidadania não se resuma a isso.

Quanto à estratégia dos alunos, de dividir o total de eleitores de cada cartório pelo número de eleitores recadastrados, parece-me que era coerente com a cultura da Matemática escolar que investe mais no treino dos alunos para efetuar operações do que para desenvolvimento do pensamento matemático. Aliás, episódios de numeramento como este revelam que a cultura escolar entende que para desenvolver pensamento matemático basta aprender a resolver as operações matemáticas. Por isso, os alunos que acertaram, efetuaram: $5040 : 1260 = 4$; $4750 : 950 = 5$; e, $2360 : 1180 = 2$ e conseguiram estabelecer a relação de que no Cartório A, 1 em cada grupo de 4 pessoas havia se recadastrado; no Cartório B, 1 em cada grupo de 5 eleitores e, no Cartório C, 1 em cada grupo de 2 eleitores havia se recadastrado,

concluindo que o desempenho no Cartório C era melhor. Como já dito, os demais ou não souberam fazer ou erraram a divisão.

Outras formas de resolver o problema envolveriam a relação parte-todo, no caso dos alunos que optassem por aplicar o conceito de fração ou as ideias envolvidas no conceito de proporcionalidade: $1260/5040 = 1/4$; $950/4750 = 1/5$; e $1180/2360 = 1/2$. Conforme a dinâmica do trabalho desenvolvido, os alunos poderiam avançar esse raciocínio para: $1/4 = 0,25 = 25/100 = 25\%$; $1/5 = 0,20 = 20/100 = 20\%$; e, $1/2 = 0,50 = 50/100 = 50\%$, o que facilitaria, em muito, a conclusão de que o melhor desempenho fora do Cartório C.

É formulando ideias e estabelecendo relações entre elas ou, de outro modo, levantando hipóteses sobre os fatos matemáticos e tirando conclusões, que se desenvolve o pensamento teórico em Matemática. Os alunos não conseguem essa amplitude de desenvolvimento conceitual apenas fazendo operações; eles precisam atuar sobre situações matemáticas, refletir sobre elas e sobre as representações semióticas delas, para se apropriarem dos conceitos.

Decididamente, a atividade do educando, participativo e autônomo, num processo dinâmico, significativo e que o envolva em efetivo processo de apropriação de conceitos, tem sido o desafio a ser enfrentado nesta área do conhecimento. Leontiev (1988) chama de atividade não a qualquer fazer do aluno, mas que ele seja significativo e principalmente, que tenha um objetivo. Segundo ele,

Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. (LEONTIEV, 1988, p. 68).

Somente haverá atividade, portanto, quando coincidirem o motivo e o objetivo. É importante, então, que os professores-mediadores considerem o conceito de atividade e suas implicações para o processo de ensino, o que nos remete ao problema da formação docente, inicial ou continuada, que pouco aborda sobre a influência dos fatores histórico-culturais na formação do conceito. Um conceito é aquilo que a palavra que o designa quer dizer, mas ele é carregado de significações que nem sempre ela, a palavra, consegue evidenciar.

Uma prática sempre presente no ensino de proporcionalidade, quando o professor tem essa preocupação nos anos iniciais do ensino fundamental, consiste em atividades supostamente voltadas ao desenvolvimento das estruturas do pensamento lógico-matemático. Embora as operações lógicas de classificar, ordenar, seriar e comparar tenham um papel na estruturação de todo o pensamento matemático, por vezes não se consideram as práticas cotidianas da

criança que efetivamente guiam o seu desenvolvimento intelectual, colocando-se em segundo plano fazeres que fossem típicos dos seus modos de pensar, sentir e agir no mundo.

Isso nos remete ao aspecto mais relevante desta discussão, que envolve a ideia da formação social da mente humana, nos limites da teoria histórico-cultural de Vygotsky e colaboradores. Nesta perspectiva a criança aprende a partir das interações sociais. Daí, a importância de o professor utilizar situações concretas para a resolução de problemas que envolvem o cotidiano dos educandos, em especial, situações lúdicas e a exploração de situações matemáticas que lhe são familiares por serem postas em um contexto de relações com o outro, condição inerente ao desenvolvimento do psiquismo para Leontiev (1978).

De fato, a percepção sensorial, a manifestação primordial de conhecimento do real, é delineada semioticamente, ainda que a criança dela não tenha plena consciência. É célebre a seguinte passagem de texto sobre a questão:

Um aspecto especial da espécie humana - que surge em idade muito precoce - é a percepção de objetos reais. Isto é algo que não encontra correlato na espécie animal. Por este termo eu entendo que o mundo não é visto simplesmente em cor e forma, mas também como um mural com sentido e significação. (VYGOTSKY, 1984, p. 37).

Nesse modo de compreender, a formação do conceito de proporcionalidade se concretiza inversamente ao modo como a escola usualmente explora essas ideias, partindo de situações específicas com vistas à generalização; na prática, desconsiderando que o processo de conhecimento se estabelece pela força das relações sociais e interpessoais. E que o conhecimento se estabelece do que é geral, universal e amplo para o que é particular, singular e restrito. Mais ainda, que é a aprendizagem que promove o desenvolvimento humano, ou seja, à medida que o sujeito aprende algo novo ele desenvolve uma estrutura de pensamento que lhe permite ampliar o alcance de suas relações mentais, coordená-las, estabelecendo novas conexões, algo que raramente se consegue em uma proposta de ensino que se funda na associação de modelos prontos, previamente definidos e repetitivos.

Compreender a forma como as concepções de professores sobre o ensino de Matemática como um todo, mas o conceito de proporcionalidade, em particular, interfere na organização do trabalho pedagógico bem como definir princípios didático-pedagógicos envolvidos na ação de ensinar esse conteúdo programático de forma significativa se revelam como ações fundamentais para a tomada de decisão sobre a organização dos programas de ensino de Matemática na educação básica, em especial, quanto aos aspectos teóricos e metodológicos inerentes a essa necessidade educacional.

Assim, Davidov (1982) considera que o objetivo do ensino escolarizado deveria ser a busca parcimoniosa do desenvolvimento do pensamento teórico, para além do pensamento empírico. Em sua formulação, a atividade de estudo, mediante tarefas específicas, tem como meta conduzir o aluno para a apropriação de leis mais gerais que envolvem um conceito matemático, de modo que se encaminham para as relações concretas sendo que, pela apropriação, a relação se transforma em abstração com conteúdo.

Por esta forma de conceber a apropriação do saberes científicos, o conhecimento matemático e a proporcionalidade, em particular, é tomado como produção humana, histórica e social. Estar em atividade de estudo impõe que o material de ensino deve priorizar a solução de tarefas cognitivas em um contexto de ação investigativa e exploratória de modo a assegurar a experiência criadora. Daí que analisar os invariantes que conduzem o docente a adotar determinada conduta pedagógica em Matemática impõe analisar as situações matemáticas desenvolvidas em salas de aula dos anos iniciais, o ambiente de aprendizagem no qual se situa o fazer didático-pedagógico, postos no plano das interações que nele se constituem, e, em especial, as convicções teóricas que conduzem o trabalho, possibilitando, ou não, a produção de sentidos e de negociação de significados matemáticos.

Grossi (2001) considera que o aprendizado básico em Matemática se submete à resolução de problemas, de modo que os instrumentos implícitos situados no repertório de conhecimentos que o sujeito incorpora constitui a base para a formação de outros conceitos.

Em geral, o que se nota na maioria dos textos didáticos é a inexistência de um espaço reservado para atividades experimentais que possibilitem a investigação de determinadas propriedades dos fenômenos físicos, por exemplo, nas quais os alunos pudessem fazer conjecturas e as testarem em âmbito experimental. São manifestações desse movimento as grandezas definidas como razões tais como entre espaço e tempo para percorrê-lo, entre volume e massa dos corpos, translações e reflexões em torno de um eixo, entre outras.

Assim, para ensinar proporcionalidade para crianças dos anos iniciais do ensino fundamental é necessário envolvê-las em um contexto de relações que se estabelecem na vida cotidiana, sem a preocupação com a formalização precoce, mas com o desenvolvimento de ideias matemáticas que possam ao longo do processo de escolarização sustentar a estruturação do pensamento matemático. Comparar, relacionar e medir, levantando hipóteses sobre as situações e grandezas matemáticas e testando-as para tirar conclusões, é a perspectiva didática que se deve consolidar para o desenvolvimento da noção de proporcionalidade.

Dessa forma as crianças não aprendem somente sobre a noção de proporção, mas exercitam e aprendem também o vocabulário necessário para comunicação de tal ideia. O leitor atento talvez esteja se perguntando: como ficaria, então, no caso da proporcionalidade inversa? Esse procedimento didático, de observar os fatos matemáticos, estabelecer relações entre eles e tirar conclusões, continuaria funcional?

Primeiramente, seria necessário conduzir as crianças a perceberem que no caso das grandezas inversamente proporcionais quando uma dobra, a outra se reduz à metade; quando uma triplica, a outra se reduz à terça parte; e, quando uma quadruplica, a outra se reduz à quarta parte, e assim por diante. Por exemplo, se um pintor faz um trabalho em 96 horas, dois pintores fariam a mesma pintura em 48 horas; 3 pintores fariam o trabalho em 32 horas; 4 pintores fariam o trabalho em 24 horas; e, assim por diante, admitindo-se a igualdade de capacidade de trabalho dos profissionais.

A proposta de representação das ideias de proporcionalidade em quadros, tabelas e gráficos se revela novamente importante e ajuda a observar algumas relações que não se mostram tão evidentes como no caso da verbalização imediatamente anterior. Observe o quadro abaixo que se refere à situação matemática anterior:

Pintores	1	2	3	7	5	4	B	A
Horas	96	48	32	Y	X	14	24	16	12

Na proporcionalidade direta, mostramos que havia uma constante **K** de proporcionalidade que era uma **razão** ou **quociente** constante entre as grandezas. Neste caso, isso não ocorre, e nem poderia, se são grandezas inversamente proporcionais. Mas, multipliquemos as grandezas pintores e horas, entre si, em cada coluna, nas quais sabemos os valores numéricos: $1 \cdot 96 = 96$; $2 \cdot 48 = 96$; $3 \cdot 32 = 96$ e $4 \cdot 24 = 96$. Por que isso ocorre? Por conta da relação conceitual anterior que deu origem ao quadro, na qual definimos que em relação de proporcionalidade inversa, se uma grandeza dobra, a outra se reduz à metade; se uma triplica, outra se reduz à terça parte; e, assim por diante.

Vê-se, então, que na proporcionalidade inversa a constante **K** de proporcionalidade existe e é igual ao **produto** entre as grandezas envolvidas, no caso, pintores e horas, em uma mesma coluna; no exemplo dado **K** é igual a 96. Assim, se o leitor quer saber o valor de **X** no quadro ele faz $96 : 5 = 19,2$ horas. E haverá quem diga que não pode porque são horas! Pode, certamente, e os alunos precisam conviver com essas ditas representações semióticas diversas

para constituírem nexos conceituais cujas articulações encaminharão a formação do pensamento teórico. Rigorosamente, 19,2 horas significam 19 horas e 12 minutos.

Pelo mesmo raciocínio, poder-se-ia estabelecer que $Y = 96 : 7$, o que é igual a 13,71 horas (13 horas e 43 minutos, aproximadamente). E que a quadrícula em branco na coluna das 14 horas equivaleria a 6,7 pintores, o que seria inviável na prática, mas que significa matematicamente duas possibilidades: ou os seis pintores trabalham alguns minutinhos a mais para dar conta do trabalho ou, para fazer o trabalho dentro do tempo aproximado de 14 horas seriam necessários aproximadamente 7 pintores. Pelas mesmas formulações poder-se-ia definir que no quadro a incógnita B é igual a 6 e a incógnita A é igual a 8.

No entanto, ainda em função da preocupação cognitiva de que os alunos se apropriem de outras representações de uma mesma ideia matemática poder-se-ia explorar fatos como: $B \cdot 16 = 2 \cdot 48$ (ou $1 \cdot 96$, ou $3 \cdot 32$) e concluir que $B = 96 : 16$, isto é, $B = 6$. Poderiam ainda conjecturar, generalizar, enfim, estabelecer que a constante K é igual ao produto entre o número de pintores (P) e o número de horas trabalhadas (H), ou seja: $K = P \cdot H$.

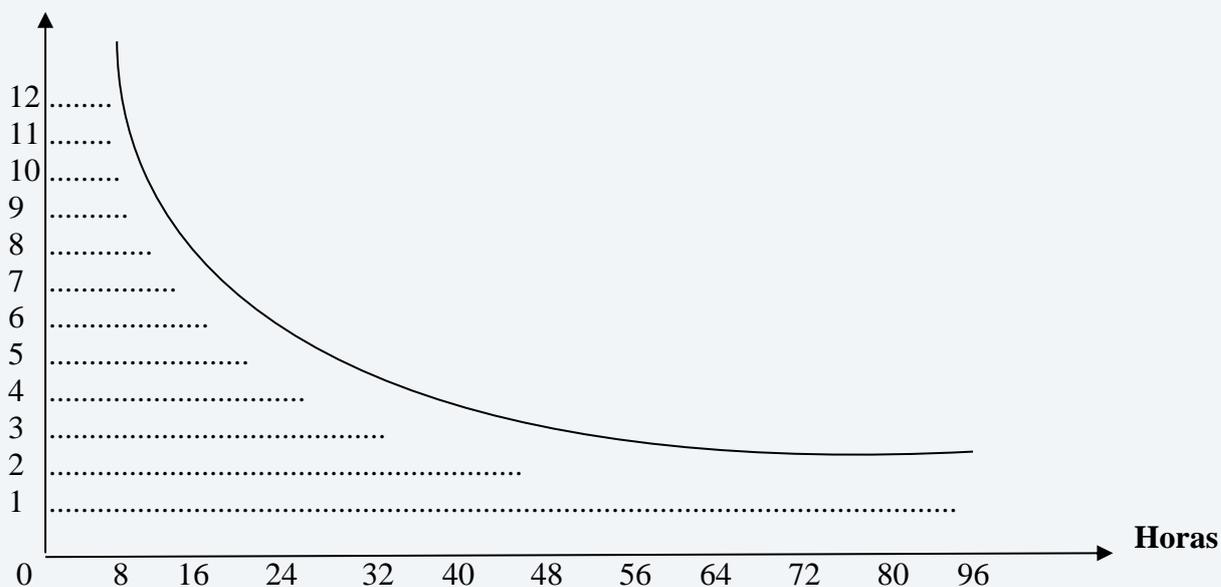
Mas como esse conteúdo aparece nas salas de aula e na maioria dos textos didáticos? Em geral de forma descontextualizada e com limitadas possibilidades de os alunos estabelecerem conexões entre os conceitos matemáticos envolvidos na proporcionalidade, a rigor, desconsiderando que

Disponibilizar aos alunos da educação básica, aos futuros professores e já professores de Matemática uma variedade de modos de realizar o conceito de proporcionalidade, conforme diferentes cenários, amplia a comunicação desse conceito, compreendendo-o como um conceito que agrega outros da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento. (MENDUNI-BORTOLOTTI; BARBOSA, 2017, p. 17).

Impõe-se, então, a necessidade de um trabalho pedagógico em Matemática que estimule nos alunos a ação reflexiva, o estabelecimento de regularidades nos fatos matemáticos, a explicação e as finalidades dos conceitos explorados. Isso lhes permitirá perceber transformações, tornando o pensamento reversível e ampliando suas hipóteses.

Assim, de forma coerente com a ideia de que os alunos precisam se valer de diversas representações semióticas para a efetiva formação de um conceito, em momento apropriado do processo de escolarização poder-se-ia solicitar a eles que construíssem o gráfico cartesiano dessa relação, de modo a verificar que a curva estabelecida nesse caso tende a tangenciar os eixos ordenadas/abscissas, mas nunca interceptá-los. No exemplo dado, teríamos:

Pedreiros



E como é na cultura da Matemática escolarizada? Essas formulações raramente aparecem e os professores, em geral, treinam os alunos com um procedimento algorítmico envolvendo um esquema com flechas. Assim, se não se desenvolve um processo de constituição de um “sistema de ações de estudo” como indica Davidov (2.019) resta somente à escola o algoritmo tradicional para resolver a seguinte regra de três simples inversa, geralmente representada como segue:

“Três pedreiros fazem um muro em 8 dias. Quantos pedreiros fariam o mesmo muro em 6 dias?”

Pedreiros		Dias
3	↓	8
X		6
Dobra		Metade
Triplifica		Terça parte

Neste esquema é dito ao aluno que, como as grandezas são inversamente proporcionais, é preciso inverter as razões ao estabelecer a proporção: $\frac{3}{X} = \frac{6}{8}$.

Daí se aplica a propriedade fundamental das proporções: $6X = 24$, o que implica em $X = 4$.

Por certo, o esquema de flechas pode ser útil como síntese do processo. O problema é que tem sido utilizado nas escolas como ponto de partida. Além disso, como procedimento generalizável, só faz sentido se os estudantes compreenderem o encadeamento lógico envolvido em sua formulação. Note o leitor que no procedimento que exploramos ao estabelecer a constante de proporcionalidade a tabela a ser construída seria:

Pedreiros	3	X
Dias	8	6

Da tabela resulta que $6 \cdot X = 3 \cdot 8$ e, então, $X = 24$, por conta da constante de proporcionalidade.

A formação do pensamento teórico não se constitui pela mera repetição de procedimentos de cálculos, mas pela capacidade de conexão entre as ideias matemáticas. Desse modo, é necessária a clareza sobre as operações lógicas de comparação e síntese e suas conexões com as ideias fundamentais da Matemática tais como equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação:

Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade, etc. Além disso, essa noção também evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas, etc. (BRASIL, 2017, p. 266).

A despeito da fundamentação teórica centrada na pedagogia das competências, no discurso do desenvolvimento de habilidades que parecem voltadas à formatação do modo de pensar dos sujeitos e da ênfase exagerada no desenvolvimento das estruturas-mãe, típicas do modo do matemático profissional pensar a sua ciência, as ideias postas na referência sobre a forma como a BNCC percebe a temática da proporcionalidade não podem ser esquecidas na organização dos currículos de Matemática por parte das Secretarias de Educação.

No entanto, ainda se mostra pendente o problema maior nas tentativas de reorganização curricular que é a busca de transformação do currículo real, geralmente resultante de prescrição curricular, para um currículo que seja organizado como ação compartilhada, isto é, que conte com efetiva participação dos atores sociais da educação.

Para se atingir essa meta, a busca de transformação da cultura escolar é o debate central a ser realizado e, nesse debate, a forma de tratamento da noção de proporcionalidade tem um papel a ser considerado.

Considerações a Guisa de Conclusão

Em geral, a temática da formação do conceito de proporcionalidade é pouco explorada no contexto dos anos iniciais do ensino fundamental a despeito de sua importância para a formação do pensamento teórico em todas as áreas de conhecimento. Partindo dessa

constatação, buscamos ao longo do artigo sustentar uma argumentação com vistas a demonstrar que a formação do conceito de proporcionalidade exige um processo sistemático de articulação entre significados matemáticos e as formas usuais de suas representações semióticas.

Como vimos, trata-se de discussão central no programa de ensino em nível fundamental porquanto envolve noções matemáticas relevantes que podem ser exploradas no âmbito da observação da realidade, da comparação de dados, do raciocínio multiplicativo, da noção de fração, e, em especial, pelas interfaces que podem ser estabelecidas com todo o pensamento científico, em todas as áreas de conhecimento.

Com efeito, a noção de proporcionalidade é fundamental para o desenvolvimento do pensamento teórico porque envolve raciocínios que abrangem um amplo e complexo espectro de relações cognitivas que envolvem tanto a dimensão lógico-matemática como a dimensão psicológica. É assunto que aparece de forma explícita no segundo segmento do ensino fundamental traduzido nos estudos de razão, proporção e em tratamento didático que valoriza o modelo, supostamente funcional, para dar sentido à regra de três simples ou composta.

Dada a relevância da temática, alguns estudos sobre programas de ensino de Matemática propõem o estudo do tema Razão e Proporção de forma articulada com o estudo das funções. No entanto, duas situações aparecem muito claras: uma abordagem do ensino das quatro operações elementares e de frações que pouco considera as articulações para o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade e uma abordagem convencional da regra de três e das funções, a posteriori, que se revelam fragmentadas.

O fato é que pensar a formação do conceito de proporcionalidade impõe a exploração de situações didáticas no ensino das quatro operações elementares, em especial, a multiplicação e a divisão, não mostrando aos alunos o sentido de proporcionalidade inerente à sua constituição formal. O problema pedagógico é crônico: enfatizam-se muito as operações e não os conceitos que as sustentam.

Isso ocorre porque geralmente não se sabe como, quando e porque ensinar proporcionalidade. Por isso, a necessidade do cuidado com os pressupostos teóricos e metodológicos atinentes a esse trabalho didático-pedagógico e atividades que permitam explorar situações práticas do cotidiano, o ambiente, o espaço em que estão inseridos, os objetos que os rodeiam e a relação que tudo isso tem com a aprendizagem matemática desse conceito fundamental até mesmo para o exercício da cidadania.

Trata-se de explorar diferentes formas ou esquemas de abordagem de uma dada informação, ou de resolver um problema, o que encontra respaldo na perspectiva teórica de

Duval (2003). Para esse autor, só é possível compreender ou apreender a Matemática pela utilização das representações semióticas do objeto matemático, ou seja, o aluno precisa mobilizar tais representações para verdadeiramente conhecer. Isso impõe a conversão instantânea de um objeto matemático em outra representação de outro sistema semiótico, que for mais significativo do ponto de vista cognitivo, para a efetiva resolução de um determinado problema. Como indicamos ao longo do artigo, a função semiótica é a capacidade que um indivíduo tem de produzir imagens mentais de objetos ou ações e fazer as suas representações.

A rigor, é a função semiótica que possibilita o pensamento, fato que também encontra respaldo em Vygotsky (1995), posto que para esse autor o desenvolvimento das representações mentais está associado à interiorização de representações semióticas iniciada pela língua materna.

Disso resulta que a compreensão da informação ou da atividade matemática situa-se na mobilização simultânea de pelo menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a qualquer momento de registro de representação. A coordenação de pelo menos dois registros de representação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

Como a aprendizagem pode ser entendida como a possibilidade de fazer conexões e associações entre diversos significados de cada nova ideia, ela depende, então, da multiplicidade de relações que o aluno estabelece entre esses diferentes significados. Daí que a comunicação é um recurso que auxilia o educando a estabelecer as conexões entre suas concepções espontâneas e o que está aprendendo de novo com vistas ao estabelecimento de uma aprendizagem significativa em Matemática.

A conduta pedagógica que desconsidera tal corolário perde, de um lado, a possibilidade de exploração do rico cabedal de situações envolvendo a noção de proporcionalidade que o sujeito vivencia até mesmo ao sair para as ruas; de outro lado, quando a escola insere o aluno na sua formulação teórica, o faz partindo do nada e peca novamente pela repetição de símbolos destituídos de significado. Por fim, a partir da exploração do espaço sensorial é possível conduzir as crianças a observar os objetos que também ocupam este espaço, fazer relação entre um e outro objeto, o tamanho que eles têm, identificar e relacionar as semelhanças e diferenças, estabelecendo relações fundamentais para a apropriação da noção de proporcionalidade na rotina cotidiana da escola.

Daí, a importância de que os docentes considerem as relações entre o vivido, o percebido e o concebido no ensino da noção de proporcionalidade, fato que impõe o estabelecimento de uma relação dialógica com as crianças e a exploração de situações didáticas e de variadas representações semióticas, voltadas, efetivamente, ao desenvolvimento do raciocínio proporcional.

REFERÊNCIAS

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. 2 volumes. Brasília, MEC, 1.998.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, MEC, 2.017.

CARRAHER, T. N. *Passando da planta para a construção: um trabalho de mestres*. In: CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W. & SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo, Cortez, 1.991, p. 101-124.

DAVIDOV, V. V. **Tipos de generalización em la enseñanza**. Habana, Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DAVIDOV, V. V. *Desenvolvimento psíquico da criança*. In: PUENTES, R. V.; CARDOSO, C. G. C. & AMORIM, P. A. P. **Teoria da Atividade de Estudo**: Contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin – Livro I. Curitiba-PR, Editora CRV/EDUFU, 2.019, p. 175-190.

DUVAL, Raymond. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática*. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, Papirus, 2003.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo, Editora UNESP, 2.009.

GROSSI, E. P. *Dificuldades com dias contados*. In: Seminário Internacional Sobre Didática da Matemática, 2.001. São Paulo, SP e Porto Alegre, RS. **Gérard Vergnaud – O Campo Conceitual da Multiplicação**. Porto Alegre, GEEMPA, 2.001, p. 11-14.

LEONTIEV, A. N. *O Homem e a Cultura*. In. **O desenvolvimento do Psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LEONTIEV, A. N. *Uma contribuição para a Teoria do Desenvolvimento da Psique Infantil. In Vygotsky, L. S. e outros. Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. S.P, Ícone/Edusp, 1988.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo, Cortez, 1.990.

MENDUNI-BORTOLOTTI, R. D'A. & BARBOSA, J. C. *A Construção de uma Matemática para o Ensino do Conceito de Proporcionalidade Direta a partir de uma Revisão sistemática de Literatura*. **BOLEMA**. Rio Claro, SP, v. 31, n. 59, p. 947-967, dez. 2017.

SÃO PAULO, ESTADO. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**. São Paulo, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, CENP, Secretaria de Estado da Educação, 1.992.

SÃO PAULO, ESTADO. **Currículo Oficial do Estado de São Paulo**. Programa São Paulo Faz Escola. São Paulo, Secretaria de Estado da Educação, 2.007.

VERGNAUD, G. *Teoria dos Campos Conceituais*. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, UFRJ, 1.993. Rio de Janeiro, Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ, 1.993, p. 1- 26.

VYGOTSKY, L. S. **Obras Escogidas (vol.3)**. Madrid: Visor, 1995.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo, Martins Fontes, 1984.

SOBRE O AUTOR:

José Carlos Miguel

Livre-Docente em Educação Matemática, UNESP; Professor Associado da FFC, UNESP, Câmpus de Marília, Departamento de Didática - Brasil; Programa de Pós-Graduação em Educação, UNESP, Marília; Grupo de Pesquisa Sobre Formação do Educador (GP FORME).

E-mail: jocarmi@terra.com.br

 <http://orcid.org/0000-0001-9660-3612>

Recebido em: 11 de abril de 2020
Aprovado em: 31 de julho de 2020
Publicado em: 07 de setembro de 2020