# Ideias fundamentais do cálculo no Ensino Médio: uma abordagem da PG à luz da resolução de problemas

**Ivanete Zuchi Siple**

**Elisandra Bar de Figueiredo**

**Jésssica Meyer Sabatke Herbst**

***Resumo***

As ideias fundamentais do cálculo têm um papel relevante no ensino, não apenas no Superior, mas também na Educação Básica. As séries geométricas convergentes, presentes no conteúdo curricular do Ensino Médio, apresentam-se como um terreno fértil para o reconhecimento dos conflitos nas concepções dos alunos sobre as noções de finito/infinito, evidenciados pela literatura, bem como a exploração da noção intuitiva de limite de sequências. O limite desempenha um papel importante no desenvolvimento do pensamento matemático, não apenas na matemática avançada, mas na evolução das ideias matemáticas em muitos conteúdos escolares. Nesse contexto, apresentamos uma sequência de atividades, inspirada nos paradoxos de Zenão, para introduzir a soma de uma progressão geométrica (PG) de termos infinitos utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas aliada às potencialidades da tecnologia. Assim, discutimos como essa sequência possibilita que os alunos desenvolvam habilidades voltadas às capacidades de investigação, de formulação, de explicações e de argumentação, auxiliando-os, por meio da interação entre os pares, professor e tecnologia, a evoluírem na concepção dos conhecimentos, para além dos matemáticos, constituindo assim uma oportunidade para o desenvolvimento de habilidades de ordem superior.

**Palavras-chave:** Sequência geométrica infinita. Limite de sequência. GeoGebra. Concepções Intuitivas.

*ISSN 2526-2882*

# Fundamental ideas of Calculus in High School: A Geometric Progression approach under the light of problem solving

**Ivanete Zuchi Siple**

**Elisandra Bar de Figueiredo**

**Jéssica Meyer Sabatke Herbst**

***Abstract***

The fundamental ideas of Calculus play a relevant role in teaching, not only in Higher, but also in Basic Education. Convergent geometric series, found in the High School curriculum, can be seen as a breeding ground for the acknowledgment of the conflicts in students' conceptions about finite/infinite notions, evidenced by the literature, as well as the exploration of the intuitive notion of the limit of a sequence. The limit plays an important role in the development of mathematical thinking, not only in advanced mathematics, but in the evolution of mathematical ideas in many school contents. In this context, this work presents a series of activities, inspired by Zeno's paradoxes, to introduce the sum of a geometric progression with infinite terms using the mathematics teaching-learning-assessment methodology through problem solving, along with the potentialities of the technology. Hence, we discuss how that sequence may enable students to develop skills towards the investigation, formulation, explanation and arguing capabilities, helping them, through peer interaction, teacher and technology, to evolve in the conception of knowledge, beyond mathematics, thus building an opportunity for the development of higher-order skills.

**Keywords:** Infinite geometric sequence. Limit of sequence. GeoGebra. Intuitive conceptions.

## Introdução

O ensino e a aprendizagem de limite têm sido uma temática de investigação interessante e presente para a comunidade de educadores matemáticos. O conceito de limite desempenha um papel importante na matemática, sendo uma das ideias fundamentais do cálculo, não apenas para a sua compreensão e conexão com derivada, integral e soma de séries infinitas, mas também no desenvolvimento do pensamento matemático para além do cálculo (TALL, 1992).

O limite não é apenas tratado na matemática avançada. Sua concepção também está presente no currículo da matemática da Educação Básica (EB), mesmo que não esteja matematicamente definido, como nas representações decimais infinitas de números reais, no perímetro e área de um círculo e nas progressões geométricas. Nesse contexto, "o limite não é apenas uma ferramenta usada para desenvolver teorias em matemática avançada, mas também um conceito para analisar problemas encontrados na vida diária" (ROH, 2005, p. 3).

Entretanto, existe um consenso na literatura de que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem do conceito de limite (ARTIGUE, 1991; CORNU, 2002; COTTRILL et al., 1996; TALL; VINNER, 1981). Uma das dificuldades ocorre quando os alunos não conseguem conceber os processos infinitos, aplicando apenas os processos finitos para resolver problemas de limites, consequentemente confundindo o limite com o valor da função ou da sequência, ou uma aproximação do limite (COTTRILL et al., 1996). Outra dificuldade apontada é que os alunos tendem a perceber o limite como um processo dinâmico, porém inalcançável, ou seja, como algo que sempre se aproxima, mas nunca se alcança (TALL; VINNER, 1981).

Pesquisas em Educação Matemática vêm evidenciando que trabalhar com as ideias intuitivas do conceito de limite e/ou com as potencialidades das tecnologias pode proporcionar aos alunos situações que entram em conflito com seus equívocos sobre o limite, auxiliando-os na compreensão do conceito (TALL, 2000; MAMONA-DOWNS, 2001; ROH, 2008; KEENE; HALL; DUCA, 2014).

Tall (2000) advoga que as potencialidades das tecnologias são particularmente valiosas para encorajar experimentações que possibilitam dar significado a um determinado fenômeno e explorar as propriedades envolvidas, antes que qualquer teoria formal seja desenvolvida. Mamona-Downs (2001) considera que a carga cognitiva exigida dos alunos no conceito formal de limite é muito rigorosa, defendendo que é importante criar situações que possibilitem que os alunos amadureçam suas intuições, em um ambiente de discussão em classe, e que essas intuições os ajudem a entender a definição formal. Segundo Roh (2005), a compreensão intuitiva de limite é considerada um fator crucial, tanto para resolver problemas relacionados, quanto para entender a sua definição formal. Keene, Hall e Duca (2014) sugerem que uma maneira de ultrapassar as dificuldades reside em utilizar, inicialmente, uma

ISSN 2526-2882

abordagem que começa com as ideias intuitivas dos alunos sobre limites para, depois, desenvolver noções informais que se conectem com a definição formal.

Assim, acreditamos ser fundamental, em nossas práticas de ensino de cálculo, propor problemas com os quais os alunos possam desenvolver as suas ideias matemáticas, evoluindo do raciocínio informal para o formal, auxiliando na compreensão dos conceitos em cálculo, haja vista que "o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal". (ONUCHIC, 1999, p. 207).

Nessa perspectiva, nossas práticas de ensino de cálculo têm envolvido a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas - MEAAMaRP (ONUCHIC, 1999; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ALLEVATO; ONUCHIC, 2021) mediada pela tecnologia na compreensão das ideias fundamentais do cálculo, tanto em nível Superior quanto na Educação Básica (AZEVEDO et. al., 2017; SABATKE, 2018; CARDOSO, 2018; AZEVEDO, 2019; AZEVEDO; FIGUEIREDO; PALHARES, 2019; LICKEFETT; SIPLE; FIGUEIREDO, 2020).

Neste artigo, discutimos como a abordagem da metodologia da Resolução de Problemas e a tecnologia podem ser utilizadas para criar e implementar as situações problema que exploram as ideias fundamentais do cálculo, que já se encontram presentes em conteúdos usualmente ensinados no currículo, como a noção de infinito, presente nas Progressões Geométricas (PG).

## Por que cálculo na Educação Básica?

O cálculo tem um papel relevante no ensino, seja na Educação Básica (EB) ou no Ensino Superior (ES). É uma ferramenta potente para a modelagem matemática e resolução de problemas, além de uma fonte rica de história de desenvolvimento científico em várias culturas, evidenciando a evolução do conhecimento matemático em várias áreas. De acordo com Rezende (2003), além do caráter integrador do próprio conhecimento matemático, o cálculo é imprescindível para a formação do cidadão, pois resoluções de problemas (juros, otimização, taxas de variação, interpretação de gráficos de funções etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania.

Em vários países, o cálculo é contemplado não apenas no ES, mas também no currículo do Ensino Médio (EM). No Brasil, o cálculo como componente curricular faz parte apenas dos cursos superiores, porém suas ideias fundamentais podem estar relacionadas em vários níveis de ensino e contribuir para a aprendizagem dos alunos (REZENDE, 2003; ROH, 2005; AVILA, 2010; KEENE; HALL; DUCA, 2014; MACHADO, 2015a). Concordamos com Rezende (2003), que advoga que ensinar matemática, em qualquer nível de ensino, sem levar em conta as ideias fundamentais do cálculo, implica num ensino com lacunas, impactando tanto na EB quanto no ES.

> De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contrassenso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 402).

Segundo Machado (2015a), as ideias fundamentais do cálculo são importantes inclusive no Ensino Fundamental. Porém, concordando com ele, acreditamos que não se trata de introduzir novos conteúdos na EB, mas de reconhecer e explorar as ideias fundamentais do cálculo que estão presentes nos conteúdos usualmente ensinados. Afinal, como reconhecer as ideias fundamentais?

As ideias fundamentais apresentam algumas características que as identificam, tais como o reconhecimento em linguagem natural, o potencial integrador com diversos conteúdos da disciplina e a extrapolação dos limites da disciplina, favorecendo a articulação entre várias delas (MACHADO, 2015b). A noção de infinito, por exemplo, está presente em vários tópicos da matemática abordados na EB, como em sequências, dízimas periódicas, área do círculo, mas também extrapola a matemática, fazendo-se presente nas discussões sobre tempo, universo, literatura, entre outros. Aproximação, variação, invariante, e problematização são outros exemplos de ideias fundamentais presentes no cálculo que podem ser trabalhadas em diferentes níveis de ensino. Assim, várias pesquisas têm evidenciado as contribuições dessas ideias para os alunos da EB (PASA; BINOTTO; MORETTI, 2021, PASA, 2017; ORFALI, 2017; LIMA; SIPLE, 2021, LICKEFETT; SIPLE; FIGUEIREDO, 2020;).

Pasa, Binotto e Moretti (2021) argumentam que explorar a variabilidade de funções, no EM, pode contribuir não somente para o estudo de cálculo no ES, como também para fortalecer e ampliar as compreensões sobre funções no EM, enfatizando características inerentes a elas como o movimento e o dinamismo (PASA, 2017), pouco trabalhadas nesse nível de ensino.

Orfali (2017), que em sua pesquisa utilizou o raciocínio covariacional como um fio condutor para trabalhar com as ideias fundamentais do cálculo na EB, argumenta que, nesse nível de ensino, o foco deve estar nas discussões dos problemas centrais do cálculo e não em técnicas de resolução, pois as ideias fundamentais possibilitam que os alunos compreendam muitos dos fenômenos que os rodeiam, sendo que a "técnica deve estar presente como um elemento que contribui para a compreensão dessas ideias" (ORFALI, 2017, p.93). Lima e Siple (2021) também evidenciaram as dificuldades que os alunos do EM têm em reconhecer o raciocínio covariacional, enfatizando a importância dos professores oferecerem atividades mediadas pelas tecnologias que possibilitem a discussão e o desenvolvimento desse raciocínio, na EB.

Lickefett, Siple e Figueiredo (2020) exploraram numa situação problema, por meio da metodologia de Resolução de Problemas (RP) mediada pelo GeoGebra, o contributo da otimização de funções na EB, possibilitando que os alunos averiguassem a área máxima de uma casa, instigando-os na criação de conjecturas, na investigação de hipóteses, na visualização de comportamento de funções e na transição das representações de funções, contribuindo para o conhecimento intuitivo de otimização de funções que é necessário para a compreensão e aprendizagem desse conteúdo, nesse nível de ensino.

Rezende (2003) sugere que o binômio séries/limites seja trabalhado na EB como uma problematização inicial de explorar as dificuldades de representação e definição dos números irracionais, não no sentido de antecipar a construção formal dos números reais, mas de possibilitar que o aluno perceba as dificuldades da representação desse conceito e, ao mesmo tempo, de apresentar as noções intuitivas de limite e séries.

As séries geométricas convergentes, presentes no conteúdo curricular de Progressões Geométricas (PG), aliadas a uma metodologia adequada de ensino, podem se apresentar como um terreno fértil no reconhecimento dos conflitos presentes nas concepções de finito/infinito, evidenciados pela literatura. Nesse contexto, apresentamos uma sequência de atividades composta por uma investigação prelimitar e por dois problemas geradores, oriunda do trabalho entre professores do ES e da EB, para o ensino de uma sequência no EM, adotando a MEAAMaRP (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

Nosso objetivo no desenvolvimento dessa sequência é que os alunos entrem em contato com as suas concepções intuitivas em uma situação real e, pela metodologia adotada, possam evoluir na compreensão do conhecimento. Tall, Smith e Piez (2008), em um artigo sobre tecnologia e cálculo, destacam que o aprendizado profundo (em termos de organização e conceitos), descrito em um estudo do *The National Research Council* (NRC), é incentivado pela interação entre pares, por uma base de conhecimento bem estruturada, a qual deve conectar novos conceitos com conhecimentos e experiências anteriores; por um forte contexto motivacional, com sentimento de pertencimento e pela atividade do aluno mediada pelo professor com o intuito de conectar os conceitos. Tais elementos vão ao encontro da MEAAMaRP, adotada nessa pesquisa.

## Limite de sequências e a Resolução de Problemas

A compreensão do conceito de limite tem sido frequentemente objeto de investigações empíricas ou teóricas no seio da comunidade da Educação Matemática. Ao longo das décadas, várias pesquisas vêm sendo realizadas a respeito das dificuldades que os alunos apresentam nesse conceito, tanto em nível internacional (TALL; VINNER, 1981; SIERPINSKA, 1987; CORNU, 2002; SARVESTANI, 2011; SWINYARD; LARSEN, 2012) como nacionalmente (ZUCHI, 2005; ALVES 2010; CELESTINO, 2008; MORAES, 2013; SANTOS, 2013; SABATKE, 2018), evidenciando que o limite é um conceito complexo para ensinar e aprender. Segundo Cornu (2002, p. 153, tradução nossa), "uma das maiores dificuldades em ensinar e aprender o conceito de limite reside não apenas em sua riqueza e complexidade, mas também na extensão em que os aspectos cognitivos não podem ser gerados puramente a partir da definição matemática".

A necessidade de harmonizar intuição e noções matemáticas constitui uma questão importante na Educação Matemática, que pode auxiliar o desenvolvimento do conhecimento matemático. De acordo com Mariotti (1998), intuição e teoria podem representar polos distantes e conflitantes, porém concepções contraditórias também podem se fundir, resultando em novas concepções, como no exemplo clássico da noção de infinito, na qual "a representação dinâmica do infinito pode ser considerada como consenso entre a estrutura finita do esquema intelectual e o próprio infinito formal" (FISCHBEIN 1987, p. 205, apud MARIOTTI, 1998, p.1).

Tall (2010) defende que, para "dar sentido" aos conceitos do cálculo, incluindo o limite, precisamos considerar como nós, indivíduos, pensamos sobre essas ideias. Assim, sugere que, inicialmente, o leitor reflita e escreva sobre esse conceito, não apenas em termos de definição, mas de significado de ideias e suas relações, e como essas ideias podem fazer sentido para um aluno. Assim, o autor considera essencial apresentar as ideias do cálculo, incluindo limite, numa abordagem "sensata do cálculo", a qual se baseia em evidências dos nossos sentidos humanos, usando esses *insights* como uma base significativa, de modo a fazer sentido por si só, com suporte às intuições necessárias para as aplicações do cálculo, bem como fornecer um significado para o conceito de limite a ser usado posteriormente em estudos de matemática avançada. "Como educador, considero essencial apresentar as ideias numa sequência que faz sentido para os alunos, inclusive para aqueles que estudam o assunto para seu uso em aplicações sem qualquer desejo de segui-lo em estudos de matemática pura mais avançada" (TALL, 2010, p.3).

Mamona-Downs (2001) ilustrou em sua pesquisa que os alunos, muitas vezes, trazem uma intuição ingênua sobre os limites, como o limite de sequência sendo o último termo da sequência. De acordo com a autora, as concepções intuitivas não ajudam na compreensão do limite de um ponto de vista formal, porém auxiliam na evolução das ideias matemáticas. Oehrtman (2008) defende que uma atividade introdutória de limite de uma sequência deve ser concebida em bases que são conceitualmente acessíveis para os alunos, estruturando a compreensão dos alunos de maneira que eles reflitam sobre as definições formais, a partir das quais os entendimentos podem surgir, mas não necessariamente formalizados. Assim "o objetivo é estabelecer uma base conceitual a partir da qual os entendimentos formais podem surgir mais tarde, mas não necessariamente para fornecer essas formalizações" (OEHRTMAN, 2008, p.70).

A compreensão do processo do cálculo de limite, envolvendo diferentes representações, é essencial para o entendimento do seu conceito, para além da definição formal de limites, e essa pode ser apoiada por visualizações no computador (WEIGAND, 2014). Além de oferecer possibilidades de explorar o objeto matemático em suas diferentes representações, no contexto defendido por Duval (2012), as tecnologias podem ser usadas como cenários de simulações, nos quais é possível explorar exemplos que funcionam e exemplos que falham, validar ou refutar conjecturas, possibilitando que os alunos adquiram as intuições visuais necessárias que fornecem *insights* formais robustos para compreensão do objeto matemático (TALL, 1991).

A Resolução de Problemas é uma metodologia profícua para harmonizar essa relação entre o conhecimento intuitivo e o formal. A MEAAMaRP apoia-se na proposição de situações desafiadoras aos alunos que, por etapas orientadas, os propicia a exploração das ideias intuitivas e conhecimentos anteriores e que, por meio das diversas representações, confrontações, argumentações e justificativas, os leva a evoluir na construção do conceito matemático. Na aula orientada por essa metodologia, o problema é considerado como ponto de partida para o processo de construção do conhecimento e, através da resolução de problemas, espera-se que os alunos possam realizar conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e conteúdos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). “Por meio dela, o aluno utiliza os conhecimentos anteriores que possui e o professor o auxilia a construir, a partir desses novos conhecimentos relacionados ao problema proposto. ” (JUSTULIN; NOGUTI, 2017, p. 22).

Vieira e Allevato (2021) defendem que a construção desse conhecimento não se resume apenas aos conteúdos curriculares, mas envolve também habilidades de pensamento de ordem superior, as quais, segundo os autores, envolvem processos cognitivos tais como análise, avaliação e síntese, que resultam na construção de novos conhecimentos. Nesse sentido,

> a resolução de problemas pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades de pensamento de ordem superior, como a construção de representações, a conversão de registros (escritos- visuais), a comparação de diferentes afirmações, a elaboração de justificativas e provas, a argumentação, a comunicação matemática e o desenvolvimento do pensamento criativo. (VIEIRA, ALLEVATO, 2021, p.13)

Para tal, são fundamentais os papéis ativos do professor e do aluno, durante todas as etapas da metodologia. Na proposição dos problemas geradores, é importante que o professor tenha a ciência que “tratam-se de problemas diferentes dos costumeiramente encontrados nos livros didáticos e trabalhados em sala de aula” (VIEIRA, ALLEVATO, 2021, p. 13). Os problemas devem propiciar um ambiente de discussão/investigação, para além de solucionar um problema numericamente. Na proposição do problema, o professor, com sua experiência didática, pode vislumbrar os erros e obstáculos que os alunos possam enfrentar durante a

ISSN 2526-2882

resolução, propiciando questionamentos que possibilitam que os alunos, em um ambiente de discussão, confrontem tais dificuldades, levando-os a refletir sobre a resolução proposta.

Segundo Pironel (2002), por meio dos questionamentos e observação, o professor pode verificar a compreensão de seus alunos sobre o problema, auxiliando-os a estabelecer as conexões entre diferentes concepções, conceitos e procedimentos matemáticos, de modo que eles possam desenvolver suas habilidades e aprender. A aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos ocorre no decorrer do percurso da resolução de problemas, culminando com a apresentação formal do conteúdo, onde se padronizam os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos ao longo da atividade (PIRONEL; ONUCHIC, 2016). Assim, a metodologia de resolução de problemas, na perspectiva de Onuchic (1999), "permite aos estudantes refletir criticamente sobre como tomar decisões na busca de respostas aos problemas propostos, sobre a própria aprendizagem e a compreensão de novos conceitos e conteúdos matemáticos" (PIRONEL, 2002, p. 185), constituindo-se em habilidades essenciais na Educação atual.

Nessa perspectiva, abordamos a soma de infinitos termos de uma PG à luz da MEAAMaRP, esperando favorecer o desenvolvimento das ideias fundamentais do cálculo que podem contribuir tanto no conhecimento dos alunos em nível de EB como em estudos posteriores, no ES.

## Introdução de soma de infinitos termos à luz da resolução de problemas

A sequência de atividades proposta sobre limite de sequências foi inspirada nos paradoxos de Zenão de Eleia (c. 450 a.C.), propiciando aos alunos do EM se envolverem em uma situação problema, estabeleçam concepções e reflitam sobre as noções de infinitos termos e a convergência da soma desses termos, presentes no conteúdo de PG. Para ilustrar as representações da situação problema, simular ou refutar as conjecturas, o uso do software GeoGebra é um diferencial. Além disso, os problemas geradores foram elaborados com a intenção de construir conceitos e conteúdos novos a partir de conhecimentos prévios, como previsto na MEAAMaRP.

A sequência de atividades é composta por uma investigação preliminar (Quadro 1) e por duas situações-problema, "O Paradoxo dos Passos" (Quadro 2) e "O paradoxo do Corredor" (Quadro 3), adaptadas de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de limite (TALL; SCHWARZENBERGER, 1978, KEENE; HALL; DUCA, 2014, SABATKE, 2018).

A investigação preliminar (Quadro 1), composta de quatro perguntas sobre limite, visa identificar as concepções dos estudantes sobre o limite, com base em seus conhecimentos prévios. Os problemas geradores da segunda e terceira atividades são propostos como fonte de reflexões e aprendizagem acerca do significado da noção de limite de uma sequência geométrica de infinitos termos e de suas relações com a história do desenvolvimento da matemática e outras áreas de conhecimento, conforme defendido por Onuchic e Allevato (2021). Na primeira situação, denominada o "Paradoxo dos passos", os alunos, em grupos, são convidados a caminhar até uma parede, seguindo as instruções dadas no problema (Quadro 2) e, na sequência, responder o tamanho de cada um dos passos (questão 1) e quantos passos conseguem dar (questão 2), explicando se há um número de passos máximo a serem dados (questão 3).

A segunda situação-problema, denominada "O paradoxo do Corredor" (Quadro 3), foi adaptada do artigo "Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction" (KEENE; HALL; DUCA, 2014). Na atividade original, os personagens abordados eram de um famoso programa infantil da televisão americana – *Sesame Street* - adaptada para a versão brasileira como Vila Sésamo. Nós resolvemos alterar os personagens, para um programa mais voltado para o público adolescente. A alteração ficou com os personagens Sheldon Cooper e Leonard Hofstadter, que fazem parte da série *Big Bang*: A Teoria – versão brasileira – em que os personagens são gênios da ciência, e passam seus dias debatendo sobre problemas do universo. Como nossa atividade proposta é para ser trabalhada no EM, acreditamos que esses personagens servem melhor essa faixa etária. A situação começa com a leitura de uma tirinha na qual os alunos devem auxiliar os personagens Sheldon e Leonard a atravessar o corredor do senhor Zenão. O objetivo dessa atividade é realizar as somas parciais da sequência do tamanho dos passos dados e abstrair que a soma dos termos dessa sequência é um número finito (distância percorrida no corredor).

Quadro *1* – Investigação preliminar

*1.* Quando você ouve a palavra "limite" o que você entende?
*2.* Escreva duas sentenças diferentes, utilizando a palavra "limite".
*3.* Você sabe de alguma utilização matemática para a palavra "limite"? Se sim, descreva o que você sabe. Como é semelhante ou diferente do que você respondeu na questão 1?
*4.* O número 0,999999..... é igual ou menor do que 1?

Fonte: Adaptado de Keene, Hall, Duca (2014) e Tall e Schwarzenberger (1978)

Quadro 2: Problema 1: O paradoxo dos passos

**Siga as instruções:**

I. Com seu grupo, encontre um ponto (A) à cerca de 6 metros de uma parede.

II. A partir do ponto (A), mova-se em direção à parede da seguinte forma: cada passo que der deve ser a metade da distância que há entre você e a parede. (Peça para um membro do grupo registrar a quantidade de passos dados).

III. Continue a dar passos, seguindo a instrução II, até não conseguir mais.

IV. Assim que estiver pronto, sente-se com seu grupo e responda às seguintes perguntas:

1. Quantos passos conseguiram dar?
2. Poderiam ter dado mais passos? Se sim, quantos passos a mais poderiam ter dado? Se não, explique por que o número de passos é o máximo.

Fonte: Adaptado de Keene, Hall, Duca (2014)

ISSN 2526-2882

Quadro 3: Problema 2: O paradoxo do corredor


1. Suponha que o corredor que temos na tirinha é semelhante a um dos corredores da nossa escola. Escolha um corredor da sua escola e, utilizando os instrumentos de medida, meça quantos metros ele tem

2. Quantos passos você imagina que Leonard teria que dar a fim de atravessar esse corredor, levando em consideração as instruções de Zenão? Explique sua estimativa.

3. Considere o ponto A como o início do corredor. Utilizando a medida do corredor, obtida em 1, responda:

   a. Qual a distância que Leonard percorre do ponto A até seu primeiro passo?

   b. Qual a distância que Leonard percorre do ponto A até seu segundo passo?

   c. Qual a distância que Leonard percorre do ponto A até seu terceiro passo?

4. Seja $\{d_n\}$ a sequência em que o enésimo termo (n) corresponde à distância que Leonard percorreu após seu enésimo passo. Escreva os seis primeiros termos desta sequência. (Lembrando que $d_1$, $d_2$ e $d_3$ já foram calculados na questão 3). Escreva o que você imagina que seria o $d_n$? Que padrão você observa na sequência encontrada? Ela é parecida com algo que você já tenha estudado?

5. Leonard faz uma revelação impressionante: Ele afirma que, se Sheldon falar qualquer distância, tão perto do comprimento do corredor quanto ele queira, e ele seguir as instruções do Senhor Zeno, depois de um certo passo, ele terá percorrido essa distância. Você acredita que isso é verdade? Por quê?

6. Você deve ter notado que a distância que Leonard já percorreu parece estar ajudando-o a atravessar o corredor. Agora, suponha que você seja o Sheldon, então descreva o comportamento dos passos dados por Leonard e como ele continuaria sua jornada até o final do corredor. (A resposta pode ser representada utilizando estimativa; fórmula; desenho; texto etc.)

Fonte: Adaptado de Sabatke (2018).

A implementação dessa sequência de atividades, em sala de aula, à luz da MEAAMaRP, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes quando comparada à prática tradicional. O professor, por meio dos problemas geradores, pode possibilitar que os alunos desenvolvam estratégias de solução, as quais, pelas interações entre os pares, conhecimentos prévios e questionamentos do professor, possam ser usadas para a construção do novo conhecimento matemático. A resolução de problemas oferece oportunidade para a matemática ser descoberta pelos alunos, desde que os alunos se engajem efetivamente na atividade proposta. Entretanto, isso não implica que os alunos vão formular os novos conceitos por conta própria. O papel do professor é fundamental no engajamento das discussões entre os pares, desafiando os alunos a acessarem seus conhecimentos prévios, a utilizarem diferentes representações da situação problema, a compartilharem suas estratégias, mediando as diferentes resoluções apresentadas, de maneira que os alunos possam evoluir na construção

ISSN 2526-2882

do conhecimento matemático proposto, estabelecendo as conexões entre os conhecimentos da matemática e de outras áreas envolvidos na situação proposta.

A proposição dessa sequência é fruto da evolução das discussões dos problemas geradores que foram utilizados por nós, em nossas aulas, na formação de professores e com alunos no EM. Aqui, nos propomos a descrever a proposição dessa sequência e a refletir conjuntamente sobre as suas potencialidades para trabalhar com as ideias fundamentais do cálculo em nível de EM, visando contribuir com a apresentação de problemas geradores, no intuito de auxiliar os professores a desenvolver suas práticas, as quais possibilitam o engajamento de seus alunos numa aprendizagem ativa por meio da investigação, colaboração e justificação de ideias.

Assim, levando em consideração as ideias de Tall (2010) sobre a importância de, inicialmente, refletirmos e escrevermos o que limite significa para nós, "não apenas suas definições, mas como podemos descrever o significado das ideias e seus relacionamentos de uma maneira que faça sentido para nós, indivíduos, e como essas ideias podem fazer sentido para um aluno" (TALL, 2010, p.3), a sequência de atividades inicia-se com uma investigação preliminar. Lembrando que muitos termos matemáticos têm um significado cotidiano que pode interferir na definição matemática, como a noção de limite. De acordo com Cornu (1981), as concepções espontâneas da noção de limite, que podem diferir de pessoa para pessoa, em função da experiência cotidiana, denotam muitas vezes um limite que não pode ser atingido, às vezes, é visto como alcançável, outras, como inalcançável.

Destarte, ao iniciar a sequência, identificando as concepções intuitivas de limite dos alunos, pode facilitar o desenvolvimento de novas concepções e ajudar o aluno a aprofundar a compreensão da noção de limite, no campo da matemática. Então, na investigação preliminar, sugerimos que a atividade seja distribuída individualmente, e que os alunos reflitam e a respondam. Tal atividade deve ser recolhida e analisada pelo professor com o intuito de verificar as concepções iniciais e fomentar as discussões na plenária, após a resolução dos problemas propostos.

Posteriormente, os alunos, em pequenos grupos, devem ser convidados a vivenciar o problema do "Paradoxo dos Passos" (Quadro 2), caminhando até uma parede, seguindo as instruções dadas no problema. Essa atividade pode ser realizada, inclusive, no pátio da escola, podendo envolver instrumentos de medida. Eles devem conjecturar quantos passos conseguem dar (questão 1), explicando se há um número de passos máximo a serem dados (questão 2), inferindo o comportamento da sequência formada pelo tamanho dos passos (questão 3). Tais conjecturas devem ser registradas pelo grupo. O principal objetivo desse problema é inspirar o debate, em vez de buscar respostas "certas".

A resolução desse problema possibilita estabelecer diversos tipos de conexões, tanto entre os conteúdos de matemática, como medidas, distância, sequência, números racionais, quanto com outras áreas, como a física (deslocamento) e a filosofia (paradoxos, finito/infinito), indo ao encontro de Allevato e Onuchic (2019), que argumentam que essa forma de trabalho possibilita que os alunos e professores estabeleçam conexões de várias naturezas, e não apenas entre as áreas da matemática.

Espera-se que os alunos, ao usarem as diferentes representações da situação problema, percebam que os primeiros passos serão enormes, diminuindo a cada vez, chegando a um ponto em que o pé humano será maior do que a distância que falta para chegar na parede. Os estudantes provavelmente perceberão que, pela experiência física, o número de passos que conseguem dar é finito, pois o domínio de passos é discreto, então terão que parar em algum ponto. Além disso, outra observação que pode ser posta é que a quantidade de passos pode ser alterada considerando o tamanho do pé da pessoa. Por exemplo, caso fosse um bebê, o comprimento do seu pé seria menor, logo poderia ter dado alguns passos a mais. Algumas equipes poderão questionar o fato de ter uma distância ainda para ser cumprida, porém a barreira física do tamanho do pé seria um empecilho. Todas essas possíveis conjecturas podem ser um ambiente rico para as etapas da discussão em grupo, plenária e busca do consenso (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

Na busca pela solução da situação proposta, é muito provável que as experiências sensoriais e físicas tendam a preceder a regra matemática. Como o aluno poderá extrapolar seu pensamento sobre o que pode ver para o que não pode?  Como abstrair? Então, é fundamental o papel do professor para extrapolar do contexto físico para o contexto matemático, especialmente na discussão dos resultados apresentados pelos grupos, durante a plenária.

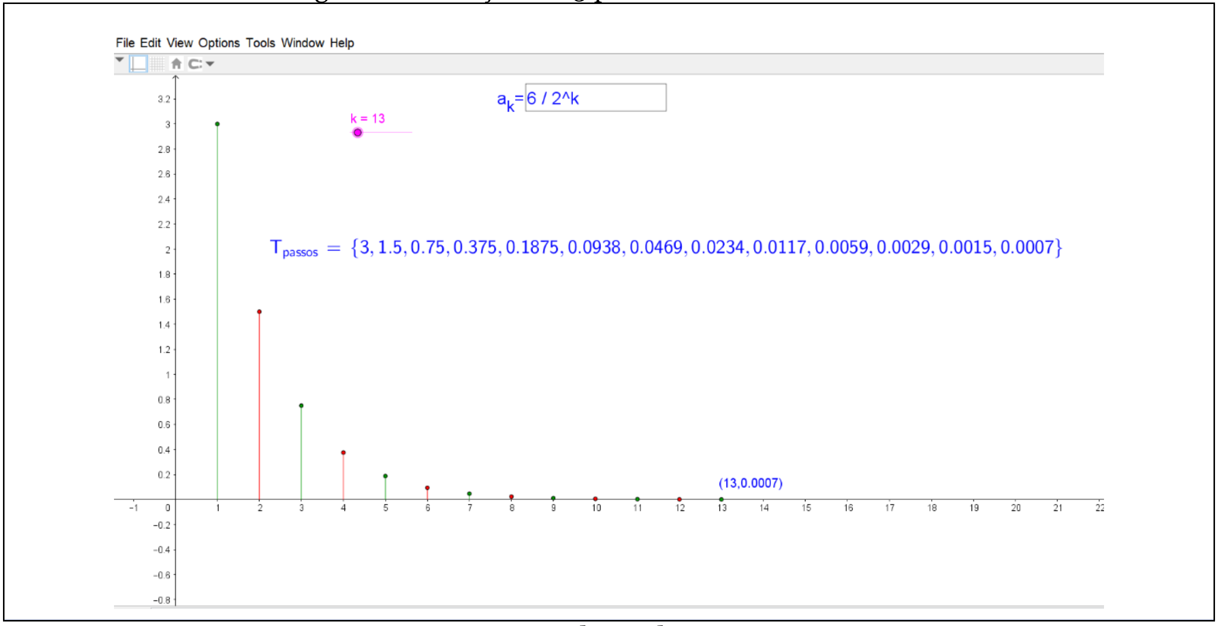
Nessa perspectiva, caso o grupo de alunos responda que é infinito o número de passos, o professor deve questionar o que ele quer dizer com infinito. Pode ser que alguns grupos cheguem ao entendimento que tem um número de passos muito grande (mas finito), pois podem considerar impossível reduzir o comprimento de um segmento pela metade em um número indefinido de vezes.  De acordo com Mamona-Downs (2001), as razões para os alunos terem tais concepções podem estar relacionadas à questão do concreto (físico) que ele deseja importar para o seu modelo dos números reais. Assim, um segmento de comprimento muito pequeno não pode ser dividido em dois, ou o aluno pode conjecturar que, como o intervalo se torna sucessivamente menor cada vez que é dividido em dois, seu comprimento acaba se tornando menor do que qualquer número positivo familiar. Geralmente, aí aparecem os termos como "número arbitrariamente pequeno", "número infinitamente pequeno", "número tão pequeno quanto se pode imaginar", na construção da sequência que representa, matematicamente, o tamanho da distância percorrida por cada passo.

Na plenária e na formalização do conteúdo, espera-se que o professor resgate as concepções iniciais dos alunos sobre o comportamento da sequência dos passos dados. Sugere-se usar os resultados da sequência obtida pelos alunos para gerar as discussões na plenária,

ISSN 2526-2882

buscando o consenso sobre o padrão dessa sequência, discutindo o número de passos considerado pelos alunos e as estratégias e justificativas apresentadas e, mais tarde, com a mediação do professor, extrapolar para o conceito matemático de que essa sequência é formada por infinitos termos e que o seu limite é zero. Para isso, sugere-se ao professor um aplicativo do GeoGebra para simular o tamanho dos passos, conforme aumenta-se o número de passos dados (Figura 1), discutindo as representações geométricas e numéricas desses passos.

Figura 1: simulação de 13 passos num corredor de 6 m




Fonte: Produção das autoras, 2022.[16]

Na próxima atividade (Quadro 4), sugerimos iniciar com a apresentação de um trecho de vídeo[17] da série de TV Big Bang: a Teoria, com o intuito de familiarizar os alunos com os personagens e motivá-los na resolução do problema proposto. Logo após, os alunos, em grupos, devem escolher e medir um corredor usando algum instrumento de medição, um metro, uma trena, ou até mesmo algum aplicativo de celular. Depois, poderão experimentar, ou seja, simular esses passos na prática, andando pelo corredor, ou podem escolher fazer os cálculos manualmente, sem precisar andar pelo corredor. Nesse ponto, repetirão a experiência da primeira situação-problema, porém para um corredor de comprimento qualquer.

Para resolver a questão 3 (Quadro 3), os grupos, além de determinar o tamanho de cada passo, deverão somar esses valores para determinar a distância percorrida. É esperado, que nesse ponto, nem todas as equipes tenham essa interpretação. A questão 4 exige a generalização e é provável que o professor precise orientar e incentivar as equipes a olhar os dados numéricos obtidos e, a partir deles, conjecturar o enésimo termo da sequência. Nessa

[16] https://www.geogebra.org/m/jrxrf292
[17] Por exemplo o vídeo disponível em: < https://youtu.be/UKjdOvaWsm8>. Acesso em: 12 fev. 2022.

ISSN 2526-2882

atividade, o professor precisa provocar os alunos, seja nos grupos, ou durante a plenária, sobre as conjecturas que eles estabeleceram para o tamanho do passo. Keene, Hall e Duca (2014), em uma situação problema semelhante, identificaram que os alunos, futuros professores, constataram que a ideia de olhar para a diferença entre um termo da sequência e o seu limite tornando-se arbitrariamente perto foi obscurecida para muitos deles. “Mesmo observando que o tamanho do passo ficava cada vez menor, os alunos não pareciam indicar o zero como limite da sequência” (KEENE, HALL, DUCA 2014, p. 569).

Para resolver a questão 5, os alunos deverão perceber que, independentemente da distância que Sheldon fale, em algum momento Leonard irá ultrapassá-la. Para os alunos chegarem a essa conclusão, é provável/aconselhável que o professor os estimule a verificar isso testando alguns valores. Aqui, a ideia do problema é que os alunos possam simular a quantidade de passos para percorrer uma determinada distância. Por exemplo, se num corredor de 10 u.c Sheldon falar 9,8 u.c, é possível encontrar o número de passos? E o que esse erro de 0,2 na distância representa?

Por fim, na questão 6, espera-se que os alunos estabeleçam as conexões entre a sequência e a soma dos seus termos, estabelecendo conjecturas sobre a quantidade (infinita) de passos e a distância (finita), em termos de formalização matemática. A ideia é desestabilizar as concepções iniciais sobre os processos infinitos e limites que estão presentes em muitas situações cotidianas e possibilitar a evolução da construção do conhecimento matemático aos alunos.

A literatura evidencia que os alunos apresentam dificuldades quando precisam raciocinar sobre processos infinitos (ARTIGUE, 2002). A questão de uma quantidade infinita de termos na sequência (passos) gerar uma soma finita (distância) parece ser contraditório para o aluno (KEENE, HALL, DUCA, 2014). Além do mais, pode ocorrer dos grupos verificarem que, matematicamente, o movimento infinito seria possível, porém, fisicamente, não. Como defendido por Keene, Hall e Duca (2014), espera-se que, pela resolução da situação problema, os alunos comecem a desenvolver ideias matemáticas em uma situação específica significativa, e evoluam do raciocínio informal para a compreensão da matemática de uma maneira mais formal, semelhante à maneira como os matemáticos entendem a matemática.

A tecnologia pode tornar-se uma ferramenta poderosa de simulação e representação para os alunos. Assim, sugere-se que os alunos utilizem os aplicativos construídos para essa atividade, no sentido de representar visualmente uma quantidade finita (porém grande) de passos e verificar o que está acontecendo com o tamanho dos passos, bem como com a distância percorrida. Esses aplicativos permitem que se altere o comportamento do passo, a fim de adaptar à situação experimentada no ambiente físico. Como se trata de um problema aberto, as respostas numéricas não serão as mesmas para todos os grupos (pois a medida do corredor pode ser diferente para cada grupo), entretanto o desenvolvimento do raciocínio matemático é o mesmo.

Por exemplo, se um grupo obtiver a medida do corredor como 10 u.c. de distância, poderá simular o tamanho dos passos e a distância percorrida por eles (conforme Figura 2). Observe que, nesse momento, ao grupo será solicitado colocar o termo geral da sequência dos passos. Então, caso o grupo ainda não tenha encontrado, o professor deve encorajá-los a identificar o padrão de comportamento dessa sequência.

Com relação a isso, Onuchic e Allevato (2011, p. 84) dizem que "enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo." Além disso, o professor, como mediador, deve levar os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

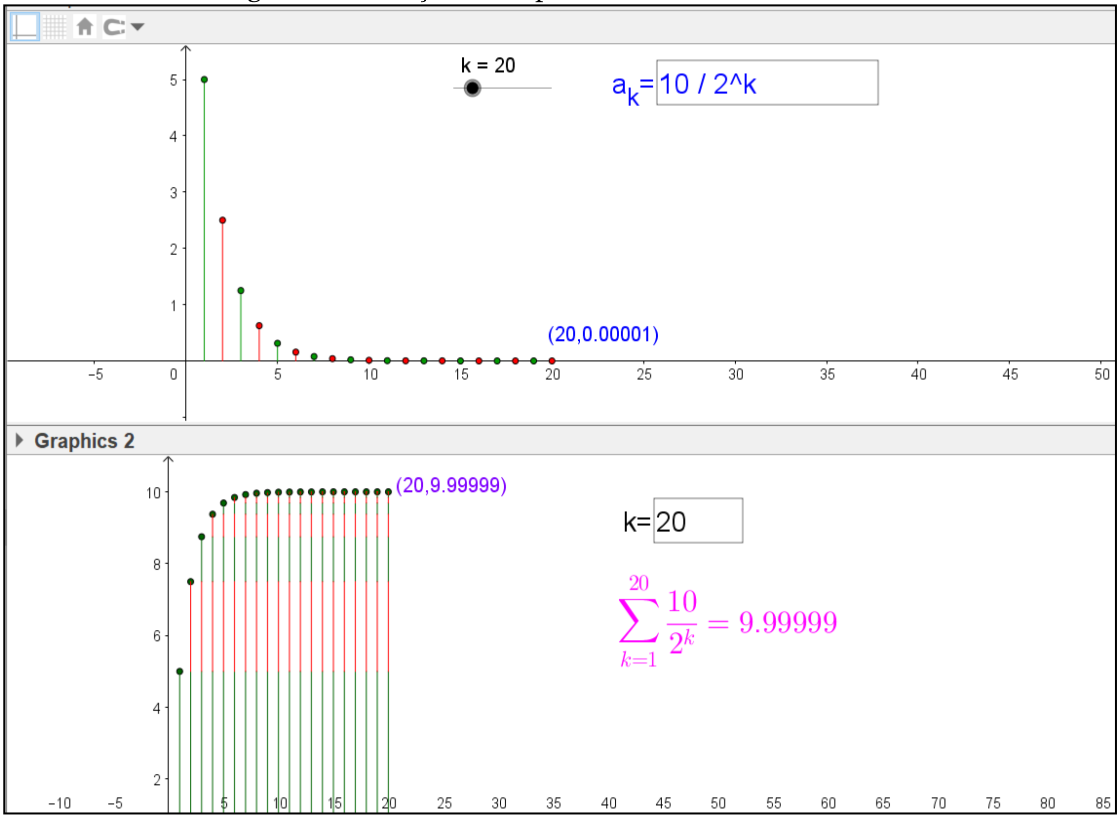
Após identificado o termo geral da sequência que, para o exemplo de 10 u.c., será dado por $a_k = \frac{10}{2^k}$, o grupo poderá simular o comportamento do tamanho desses passos, e o impacto da soma da distância percorrida por tais passos. A Figura 2 evidencia uma simulação[18] com 20 passos, pois, num corredor de 10 u.c., o tamanho do passo de número 20 é de 0,00001 u.c., ou seja, o $a_{20}$=0,00001, enquanto a soma desses 20 termos é de 9.99999 u.c., ou seja, $d_{20} = \frac{10}{2} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \cdots + \frac{10}{2^{20}} = 9{,}999999$. A representação visual da situação problema mostra a distância percorrida, representando graficamente o impacto da soma do termo anterior, ou seja $d_2 = a_1 + a_2$. Então, nesse momento, para auxiliar os alunos, o professor deve questionar: O que está acontecendo com o tamanho dos passos? E, se você alterar o número de passos, o que acontece com a distância percorrida? O professor pode, inclusive, incentivá-los a mudar a quantidade de números de casas decimais para verificar que o tamanho dos passos está ficando "muito pequeno", enquanto a distância percorrida por esse número de passos se aproxima muito da distância dada.

Após essa simulação, os alunos devem apresentar suas estratégias à plenária. Quando se utiliza a MEAAMaRP, isso deve acontecer, "resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam." (ONUCHIC; ALEVATO, 2011, p. 84). Mamona-Downs (2001) argumenta que tais discussões expõem os alunos a visões opostas de limites que podem ser usadas para tentar desenvolver uma apreciação mais coerente da definição formal, discutindo o papel de cada um dos símbolos e explicando a natureza da definição formal. Também é possível avaliar as concepções intuitivas e, por meio da discussão, levar ao refinamento das intuições e a uma compreensão do conceito de limite, num viés mais formal.

---

[18] https://www.geogebra.org/m/cchysz6q

Figura 2: simulação de 20 passos num corredor de 10 u.c.




Fonte: Fonte: Produção das autoras, 2022.[19].

Para a formalização das atividades, sugere-se, incialmente, explorar o uso de sequências obtidas pelos alunos. Por exemplo, para corredores de 10 e 6 u.c., a soma da distância percorrida pelos $n$ passos dados seria, respectivamente $d_n = \frac{10}{2^1} + \frac{10}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \cdots + \frac{10}{2^n}$ e $d_n = \frac{6}{2^1} + \frac{6}{2^2} + \frac{6}{2^3} + \frac{6}{2^4} + \cdots + \frac{6}{2^n}$, e soma dos $n$ primeiros termos de uma Progressão Geométrica (PG), possivelmente já conhecida pelos alunos, pode ser calculada por:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} (I)$$

Caso essa fórmula não tenha sido deduzida anteriormente, é importante que o professor o faça. Para isso, considere a soma de $n$ termos de uma PG de razão $q$ dada por

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots a_1 q^{n-1}$$

multiplique ambos os membros dessa soma pela razão $q$:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots a_1 q^n$$

e subtraia as duas equações obtendo:

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q$$

para $q \neq 1$ obtém-se a expressão dada em (I).

[19] https://www.geogebra.org/m/cchysz6q

Porém, o problema proposto envolve infinitos termos (passos dados) de uma sequência que se comporta numa progressão geométrica de razão q=1/2. Assim, as questões que emergem são: é possível somar esses infinitos termos? Chegaríamos à distância dada do corredor?

O professor pode solicitar para os alunos utilizarem conjuntamente com ele os aplicativos do software GeoGebra para simular exemplos com outras distâncias, como exibido nas Figuras 2 e 3.

Figura 3: Aplicativo do GeoGebra utilizado para explorar a soma da sequência

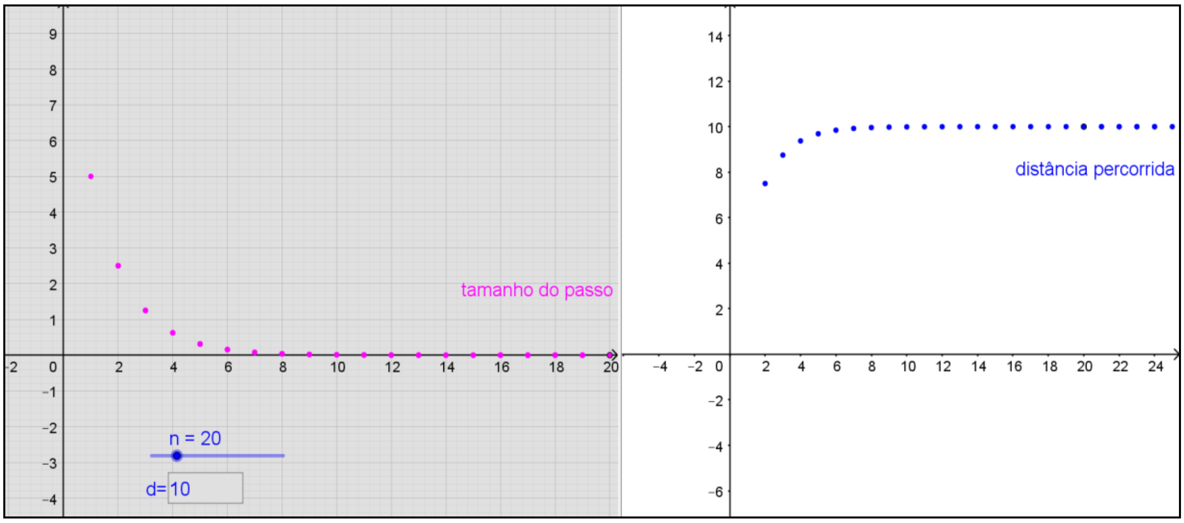

Fonte: Sabatke (2018)

No aplicativo desenvolvido no GeoGebra[20], os alunos podem escolher a distância do corredor e manipular um controle deslizante com os passos dados ($n$). O aplicativo automaticamente mostra, conforme o $n$ selecionado, a sequência de passos que seria formada (Figura 3). Por exemplo, nessa simulação com 42 passos, a distância percorrida é de 9,999999999997726 u.c. Também é possível explorar, conforme o aplicativo na Figura 4, que conforme o número de passos aumenta, o tamanho do passo tende para um número muito próximo de zero, e que a distância tende para um valor muito próximo de 10. Tall e Schwarzenberger (1978) sugerem que, para evitar os conflitos com o infinito, em vez de nos concentrarmos em "$n$ muito grande", devemos nos concentrar que "$s_n$ e $s$ são praticamente indistinguíveis", conforme observado, tanto para o tamanho dos passos, quanto para a sua soma. Assim, sugerimos a utilização desses applets, os quais foram elaborados com

[20] https://www.geogebra.org/m/fZyuzpmx#material/cRVdqDZY

orientações pedagógicas e contendo uma coordenação entre os registros de representação dos objetos matemáticos, conforme defendido por Nóbriga e Siple (2020).

Figura 4: Aplicativo que evidencia o limite dos passos e o limite da soma dos passos.




Fonte: Produção dos autores, 2022.

Assim, os alunos podem escolher a distância (d) e simular que, aumentando número de termos da sequência (número de passos), a medida desses termos (passos) ficaria muito pequena (muito próxima de zero). Dessa forma, com base na visualização geométrica, pode-se discutir o que significa, matematicamente, a noção do limite da sequência de infinitos termos, ou seja, para um $n$ suficientemente grande (tendendo ao infinito) $q^n$ tende a zero, quando a razão $|q| < 1$, simbolicamente:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, para -1 < q < 1.$$

Após explorar a noção intuitiva de limite dos termos da sequência, pode-se analisar o impacto desse limite quando se somam muitos termos de uma sequência, utilizando como recurso o GeoGebra (Figura 4). Por fim, apresenta-se a simbologia do limite (lim) e explica-se o que cada índice representa.

Desse modo, usando a fórmula (I) e essa definição, conclui-se que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} (II).$$

Quando o limite existe, como em II, chamamos a série geométrica de convergente.

Para fechar, retorna-se ao problema do paradoxo do corredor e, considerando a distância como sendo 10 u.c., teríamos $a_1 = 5$ e $q = \frac{1}{2}$, e assim:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = 10.$$

Para concluir, pode-se explicar que, quando estudiosos descobriram séries infinitas cujas somas convergem para valores finitos, como essas que foram construídas, o paradoxo de

Zenão foi desvendado, pois dessa forma foi compreendido que não é necessário um tempo infinito para realizar a soma de infinitas parcelas. Também, nesse momento, pode-se resgatar o início da atividade, ligada aos paradoxos de Zenão que, apesar de antigos, vêm intrigando, desafiando e inspirando filósofos, matemáticos e físicos por mais de dois mil anos (TALL; TIROSH, 2001).

Seguindo a última etapa da MEAAMaRP, podem ser propostos novos problemas (Quadro 5), podendo ser acessado na plataforma do Geogebra, no produto educacional de Sabatke (2018), e solicitar que eles estabeleçam novamente a conjectura sobre o problema dado na investigação inicial, se 0,9999999 é igual ou menor do que 1.

Quadro 5: Proposição de novos problemas

| | |
|---|---|
| Problema 1 | (VUNESP-Adaptada) Considere um triângulo equilátero cuja medida do lado é 4cm. Um segundo triângulo equilátero é construído, unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo original. Novamente, unindo-se os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo equilátero, e assim por diante.<br>a) Represente geometricamente a situação dada.<br>b) Determine a sequência formada pelos perímetros dos triângulos. Essa sequência é finita ou infinita? Qual é o comportamento dessa sequência? Justifique.<br>c) Determine a soma dos perímetros dos triângulos formados na sequência, incluindo o triângulo original. Essa soma é finita ou infinita? Justifique. |
| Problema 2 | (UFF-Adaptada) Com o objetivo de criticar os processos infinitos, utilizados em demonstrações matemáticas de sua época, o filósofo Zenão de Eleia (século V a.C.) propôs o paradoxo de Aquiles e a tartaruga, um dos paradoxos mais famosos do mundo matemático.<br>Existem vários enunciados do paradoxo de Zenão. O escritor argentino Jorge Luis Borges o apresenta da seguinte maneira:<br>*Aquiles, símbolo de rapidez, tem de alcançar a tartaruga, símbolo de morosidade. Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá dez metros de vantagem. Aquiles corre esses dez metros, a tartaruga corre um; Aquiles corre esse metro, a tartaruga corre um decímetro; Aquiles corre esse decímetro, a tartaruga corre um centímetro; Aquiles corre esse centímetro, a tartaruga um milímetro; Aquiles corre esse milímetro, a tartaruga um décimo de milímetro, e assim infinitamente, de modo que Aquiles pode correr para sempre, sem alcançá-la.*<br>Fazendo a conversão para metros, a distância percorrida por Aquiles nessa fábula é igual a<br>$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots$$<br>a) Explique o que significa, relacionando com o texto do problema, cada um dos termos da distância.<br>b) Essa distância $d$, também pode ser representada como:<br>$$d = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots = 10 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$<br>Responda:<br>*i)* O que significa o símbolo $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$?<br>*ii)* Quantos elementos tem nessa soma?<br>*iii)* Aquiles alcança a tartaruga? Justifique.<br>*iv)* Identifique a PG dando o primeiro termo e a razão.<br>*v)* Determine a distância percorrida por Aquiles. |

Fonte: Adaptado de Sabatke (2018, p.111-112).

A MEAAMaRP traz como fundamento a interação professor-alunos e alunos-alunos. Também é possível, nessa metodologia, a integração entre práticas avaliativas e de ensino, que

ISSN 2526-2882

não podem ser dissociadas, pois fazem parte de um todo, cujo escopo é a formação do educando. Pironel (2002) analisa e interpreta a avaliação dentro do processo de ensino-aprendizagem, preocupando-se com o sentido pedagógico e político de avaliar, de modo que o momento avaliativo cumpra também um papel na formação do educando, tornando-o um sujeito crítico e reflexivo. O autor defende que, se partirmos da avaliação como parte do processo de ensino-aprendizagem, podemos vislumbrar um instrumento que procura verificar as lacunas de aprendizagem do aluno e, as identificando, podemos agir sobre elas, ampliando a eficácia do ensino-aprendizagem. Nesse contexto, a avaliação dessa atividade pode ser realizada durante o processo, pelas resoluções apresentadas, na plenária, pela participação nas discussões e pela resolução dos novos problemas apresentados. Assim, a MEAAMaRP é abrangente e complexa, pois consiste na construção de conhecimento com parâmetro no que o aluno aprendeu e no que ele ainda não assimilou. Assim, a ação docente baseia-se sobre esse último polo, identificando fragilidades no desenvolvimento do aluno, durante a avaliação, e promovendo práticas que o auxiliem na construção do seu aprendizado.

## Considerações

No presente artigo discutimos, conforme referencial teórico apresentado, a importância de trabalhar com as ideias fundamentais do cálculo no EM nos conteúdos já existentes no currículo escolar. Nesse contexto, apresentamos uma sequência de atividades para introduzir a soma de uma PG de infinitos termos utilizando a MEAAMaRP, aliada às potencialidades da tecnologia. Visamos, com a atividade, que os alunos experimentem uma situação semelhante aos gregos, confrontando-os com as noções de finito/infinito, na resolução de um problema que envolve a soma dos termos de uma PG infinita, desafiando-os a desmistificar e entender os paradoxos descritos por Zenão de Eleia (c. 450 a.C.).

A resolução dos problemas "o paradoxo dos passos" e "o paradoxo do corredor" representa um potencial para introduzir a noção de limite, que é necessária para definir a soma dos infinitos termos de uma PG. Ou seja, assim como propõem Ávila (2010), Machado (2015a), e Mamona-Down (2001), reiteramos a importância de criar situações que possibilitem que os alunos amadureçam suas intuições, em um ambiente de discussão em classe, e que essas intuições os ajudem a evoluir e conectar suas ideias, tanto na matemática quanto em outra áreas.

Os problemas propostos também foram elaborados com a intenção de construir conceitos e conteúdos novos a partir de conhecimentos prévios, posto que, na metodologia adotada, os problemas são propostos aos alunos antes mesmo de ser apresentado formalmente o conteúdo. Outrossim, é que

> Para a maioria dos conceitos matemáticos, o ensino não começa em território virgem. No caso de limites, antes de qualquer ensino sobre o assunto, o aluno já tem um certo número de ideias, intuições, imagens, conhecimentos, que

ISSN 2526-2882

> vêm de sua experiência cotidiana, como o significado coloquial dos termos utilizados. (CORNU, 2002, p. 154, tradução nossa).

Assim, a MEAAMaRP, mediada pela tecnologia, constitui um ambiente rico para explorar a soma dos infinitos termos de uma PG convergente, oportunizando aos alunos a vivência dos conflitos presentes nas concepções de finito/infinito e a reflexão sobre suas próprias concepções, por meio da interação entre pares e a tecnologia, usando esses *insights* como uma base significativa que faça sentido na tarefa proposta aos alunos do EM ou, inclusive, em estudos posteriores, no ensino de cálculo, no ES, conforme defendido por Tall (2010).

A literatura evidencia que os alunos têm dificuldade em entender que uma soma infinita converge para um valor finito (COTTRILL et al., 1996; TALL; VINNER, 1981). Por isso, nas etapas da plenária e formalização, é fundamental o papel do professor na mediação da discussão sobre convergência e divergência, bem como o uso da tecnologia para simular e representar a soma de muitos termos de uma PG, com razão $|q| < 1$, auxiliando-os na compreensão de que, nesses casos, a soma de infinitos termos de uma PG tem um resultado finito, não apenas do ponto de vista numérico, mas no sentido de eles evoluírem nas suas concepções informais.

Logo, conforme afirmam Smole e Diniz (2013, p. 325), ao priorizar a resolução de problemas, se "oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, de construir estratégias de resolução e argumentações, de relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, de perseverar na busca da solução." Ademais, a cooperação entre os alunos, suas exposições de ideias e a análise das questões, feitas posteriormente à aplicação, foram importantes para desenvolver uma aprendizagem de modo colaborativo em sala de aula (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

Assim, acreditamos que desenvolver atividades que integrem as ideias fundamentais do cálculo num contexto de tópicos já existentes do currículo do EM, mediadas pela resolução de problemas, possibilita aos alunos desenvolver habilidades voltadas às capacidades de investigação, de formulação, de explicações e argumentos, auxiliando-os, por meio da interação entre os pares, professor e tecnologia, a evoluir na concepção dos conhecimentos, para além dos matemáticos, constituindo assim uma oportunidade para o desenvolvimento de habilidades de ordem superior, conforme defendido por Vieira e Allevato (2021).

## Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 10, p. 1-14, 2019.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R.. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática; por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andressa Maria (Org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37-58.

ALVES, D. O. **Ensino de funções, limites e continuidade em ambientes educacionais informatizados**: uma proposta para cursos de introdução ao cálculo. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto, 2010.

ARTIGUE, M. 'Analysis', in D. Tall (ed.), **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 168–198, 1991.

ARTIGUE, M. "Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work." **International journal of computers for mathematical learning** 7, no. 3, 245-274, 2002.

ÁVILA, G. **Várias faces da matemática:** tópicos para licenciatura e leitura geral. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

AZEVEDO, E. B. de. **Vivenciando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral**. 2019. 494 p. Tese (Doutorado)-Universidade do Minho, Doutoramento em Ciências da Educação, Braga, 2019.

AZEVEDO, E. B. de; FIGUEIREDO, E. B. de; SIPLE, I. Z.; PALHARES, P. M. B.. Imposto de Renda: função contínua? Uma questão deCálculo tanto para o Ensino Básico quanto para o Ensino Superior. **Boletim Online deEducação Matemática**, v. 5, p. 01-20, 2017.

AZEVEDO, E. B. de; FIGUEIREDO, E. B. de; PALHARES, Pedro Manuel Baptista. Análise da variação de funções ensinada através da Resolução de Problemas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática** (REnCiMa), v. 10, p. 32-52, 2019.

CELESTINO, M. R. **Concepções sobre limite:** imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

CORNU, B. Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles propres. **In Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME**, pp. 322-326. 1981.

CORNU, B. Limits. In: David Tall (Ed.). Advanced Mathematical Thinking. v.11. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

COTTRILL, J.; DUBINSKY, Ed; NICHOLS D.; SCHWINGENDORF, K.; THOMAS, K.; VIDAKOVIC, D. Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. **Journal of mathematical behavior**. 1996; 15(2):167-92.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Traduzido por Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis. V. 7, n. 2, 2012, p. 266-297.

JUSTULIN, A. M.; NOGUTI, F. C. H. Formação de professores e resolução de problemas: um estudo a partir de teses e dissertações brasileiras. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; LEAL JUNIOR, Luiz Carlos; PIRONEL, Márcio (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 21-53.

KEENE, K. A.; H., W.; DUCA, A. Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction. **ZDM** 46.4, 2014: 561-574.

LICKEFETT, D. T. C.; SIPLE, I. Z.; FIGUEIREDO, E. B de. Qualé a área máxima da casa? Um problema à luz da resolução de problemas mediada pela tecnologia.**Educação Matemática Debate**, v. 4, p. e202027-29, 2020.

LIMA, J. M.; SIPLE, I. Z. GeoGebra grupos e objetos de aprendizagem: um recurso para exploração do raciocínio covariacional em tempos de aulas não presenciais. **BOLETIM ONLINE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, v. 9, p. 253-273, 2021.

MACHADO, N. J. Cálculo no ensino médio: já passou da hora. **Revista eletrônica {Puro Imaginário}.** 28 out. 2015a. Disponível em: < https://imaginariopuro.wordpress.com/2015/10/28/calculo-no-ensino-medio-ja-passou-da-hora/comment-page-1/ >. Acesso em 23 fev. 2022.

MACHADO, N. J. **SEMENTES 1 # MATEMÁTICA**: IDEIAS FUNDAMENTAIS. Introdução: Currículos, fragmentação, ideias fundamentais. 14 out. 2015b. Disponível em: <https://www.nilsonjosemachado.net/sementes-1-matematica-ideias-fundamentais/>. Acesso em 23 fev. 2022.

MAMONA-DOWNS J. Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. **Educational studies in mathematics**. 2001 Nov; 48 (2): 259-88.

MARIOTTI, M. A. Intuition and Proof.: reflecting on Fischbein's paper. Itália: Università di Pisa. 1998. Disponível em: <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/981112Theme/981112ThemeUK.html.> Acesso em 23 de fev de 2022.

MORAES, M. S. F. **Um estudo sobre as implicações dos obstáculos epistemológicos de limite de função em seu ensino e aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2013.

NÓBRIGA, J. C; SIPLE, I. Z. Livros Dinâmicos de Matemática Dynamic Mathematics Books. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, 9(2), pp.78-102, 2020.

OEHRTMAN, M. Layers of abstraction: Theory and design for the instruction of limit concepts. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), **Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education**. Washington, D.C.: American Mathematical Society, 2008.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-220.

ONUCHIC, L. de la .; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ORFALI, F. **A conciliação das ideias do Cálculo com o currículo da Educação Básica: o raciocínio covariacional**. 214 folhas. Tese de Doutorado em Educação, Universidade de São Paulo, 2017.

PASA, B. C. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no ensino médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais**. 311 folhas. Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2017. https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/187061.

PASA, B. C.; BINOTTO, D.; MORETTI, M. T. Os infinitésimos: panorama histórico e possibilidades na compreensão de variabilidade no ensino médio. **Educação Matemática Sem Fronteiras**: Pesquisas em Educação Matemática 3.2, 2021: 173-193.

PIRONEL, M. **A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2002.

PIRONEL, M.; ONUCHIC, L. de la R. Avaliação para a aprendizagem: uma proposta a partir de transformações do conceito de avaliação na sala de aula no século XXI. In: **Anais do IV Congresso Nacional de Avaliação em Educação**: IV CONAVE. Bauru: UNESP, 2016.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, Faculdade de Educação, 2003.

ROH, K. H. **College students' intuitive understanding of the concept of limit and their level of reverse thinking**. The Ohio State University; 2005.

ROH, K. H. Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. **Educational studies in Mathematics**. 2008 Nov; 69(3): 217-33.

SABATKE, J,. M. **Construção do conceito de limite**: ideias e contextos. 2016. 151f.TCC (Graduação)-Universidade do Estado de Santa Catarina, Curso de Licenciatura em Matemática, Joinville, 2016.

SABATKE, J. M. Conceito de limite sob a perspectiva da resolução de problemasmediada pelo software Geogebra. 2018. 217 p. Dissertação (Mestrado)-Universidadedo Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências,Matemática e Tecnologias, Joinville, 2018.

SANTOS, M. B. S. **Um olhar para o conceito de limite**: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SARVESTANI, A K. **Contemplating problems taken from the history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept**. Dissertation, Universiteit van Amsterdam, 2011.

SIERPINSKA, A. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. **Educational Studies in Mathematics**, n. 18, p. 371–397, 1987.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática Ensino Médio**. v. 3, 8. ed., São Paulo: Saraiva, 2013.

SWINYARD, C.; LARSEN, S. Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. **Journal for Research in Mathematics Education**, 43(4), p. 465-493, 2012.

TALL, D. Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Eds.). **Visualization in teaching and learning mathematics. Washington**: Mathematical Association of America, 1991. p. 105-119.

TALL, D. **Students' Difficulties in Calculus.** ICME - Québec, Canada, 1992.

TALL, D. Cognitive development in advanced mathematics using technology. **Mathematics education research journal**. 2000 Dec; 12(3): 196-218.

TALL, D. A sensible approach to the calculus. **In Plenary at the National and International Meeting on the Teaching of Calculus**. 2010.

TALL, D.; SCHWARZENBERGER R,L. Conflicts in the learning of real numbers and limits. **Mathematics teaching**, 1978: v.82, p. 44 - 49.

TALL, D.; SMITH, D.; PIEZ, C. Technology and Calculus. **Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics**, v. 1, 2008, p. 207-258.

*ISSN 2526-2882*

TALL, D.; TIROSH, D. Infinity: the never ending struggle. **Educational Studies in Mathematics.** 2004; 48(2): 199-238.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational studies in mathematics** 12.2, 1981: p.151-169.

VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. Resolução de problemas em Educação Matemática e o desenvolvimento de habilidades de pensamento de ordem superior. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática.** 2021. Nov 24; 7 (especial) :e4001.

WEIGAND, H.-G. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 603-619, ago. 2014.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional**. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, Florianópolis, 2005.

### *Agadecimentos*

As autoras agradecem aos grupos de pesquisa PEMSA E NEPeSTEEM e a agência de financiamento FAPESC.

### *Biografia Resumida*

**Ivanete Zuchi Siple:** Professora do departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Matemática e Tecnologia -PPGECMT da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Doutora em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

**Lattes:** http://lattes.cnpq.br/1045024362139697

**Contato:** ivanete.siple@udesc.br

**Elisandra Bar de Figueiredo:** Professora do departamento de Matemática e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Doutora em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

**Lattes:** http://lattes.cnpq.br/6886923319101401

**Contato:** elisandra.figueiredo@udesc.br

**Jéssica Meyer Sabatke:** Mestra em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias - PPGECMT da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Possui graduação em Licenciatura em Matemática (UDESC). Professora da Educação Básica.

**Lattes:** http://lattes.cnpq.br/5963101358814150

**Contato:** jessicasabatke@hotmail.com