10.22481/cpp.v10i26.18505 ISSN 2526-2882

# Pensando variacionalmente: a medida da área do trapézio e a multivariação independente

## Thinking variationally: measuring the area of a trapezoid and independent multivariate analysis

## Pensamiento variacional: medición del área de un trapecio y análisis multivariante independiente.

**Barbara Lutaif Bianchini**[1]
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Doutora em Educação

**Gabriel Loureiro de Lima**[2]
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Doutor em Educação Matemática

***Resumo:*** Neste artigo, discute-se a presença e a relevância da ideia de multivariação independente no cálculo da medida da área de um trapézio, conteúdo presente nos anos finais do Ensino Fundamental. Subsidiado por referenciais teóricos sobre pensamento variacional e raciocínio multivariacional, o estudo evidencia que essa situação matemática envolve a coordenação simultânea de três variáveis — as medidas das duas bases e da altura — que influenciam conjuntamente na medida da área do trapézio. A partir dessa constatação, são apresentadas sugestões didáticas que permitem ao professor explorar as ações mentais associadas à multivariação independente, valendo-se, inclusive, de recursos digitais como o *software* GeoGebra. Argumenta-se que reconhecer e trabalhar intencionalmente com a multivariação potencializa o desenvolvimento do pensamento variacional dos estudantes, favorecendo a compreensão de relações funcionais e de dependência entre grandezas. Conclui-se que abordar esse tipo de raciocínio desde a Educação Básica amplia a capacidade dos alunos de compreender fenômenos dinâmicos e de interpretar situações em que múltiplas variáveis se interrelacionam.

***Palavras-chave:*** Pensamento variacional. Raciocínio multivariacional. Multivariação independente. Cálculo da medida da área de um trapézio.

**Abstract:** In this article, we discuss the presence and relevance of the idea of independent multivariation in the calculation of the measurement of the area of a trapezoid, a content present in the final years of Elementary School. Supported by theoretical references on variational thinking and multivariational reasoning, the study shows that this mathematical situation involves the simultaneous coordination of three variables — the measurements of the two bases and height — which jointly influence the measurement of the trapezoid area. Based on this finding, didactic suggestions are presented that allow the teacher to explore the mental actions

[1] E-mail: barbara@pucsp.br. Id orcid: 0000-0003-0388-1985.
Link do lattes: http://lattes.cnpq.br/2660310999149810.
[2] E-mail: gllima@pucsp.br. Id orcid: 0000-0002-5723-0582.
Link do lattes: http://lattes.cnpq.br/6821823260967114.

associated with independent multivariation, including using digital resources such as the GeoGebra software. It is argued that recognizing and intentionally working with multivariation enhances the development of students' variational thinking, favoring the understanding of functional relationships and dependence between quantities. It is concluded that addressing this type of reasoning from Basic Education expands the students' ability to understand dynamic phenomena and to interpret situations in which multiple variables are interrelated.

***Keywords:*** Variational thinking. Multivariational reasoning. Independent multivariation. Calculation of the measurement of the area of a trapezoid.

**Resumen** Este artículo analiza la presencia y relevancia del concepto de variables multivariadas independientes en el cálculo del área de un trapecio, un tema que se aborda en los últimos años de la educación primaria. Con el apoyo de marcos teóricos sobre pensamiento variacional y razonamiento multivariado, el estudio demuestra que esta situación matemática implica la coordinación simultánea de tres variables —las medidas de las dos bases y la altura— que influyen conjuntamente en el área del trapecio. A partir de este hallazgo, se presentan sugerencias didácticas que permiten a los docentes explorar las acciones mentales asociadas con las variables multivariadas independientes, utilizando recursos digitales como el *software* GeoGebra. Se argumenta que reconocer y trabajar intencionalmente con variables multivariadas potencia el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes, favoreciendo la comprensión de las relaciones funcionales y las dependencias entre cantidades. Se concluye que abordar este tipo de razonamiento desde la educación básica amplía la capacidad de los estudiantes para comprender fenómenos dinámicos e interpretar situaciones donde múltiples variables se interrelacionan.

***Palabras-clave***: Pensamiento variacional. Razonamiento multivariado. Modelado multivariado independiente. Cálculo del área de un trapecio.

## Introdução

Um dos conceitos basilares da Matemática é o de função que, na história do desenvolvimento desta ciência, foi formulado no intuito de estudar quantitativamente os fenômenos naturais (Caraça, 1951) e de expressar matematicamente problemas físicos, dentre os quais, os relacionados à condução de calor, à queda livre e ao movimento dos planetas (Ponte, 1990). Isso se deu em razão de o objeto matemático função se constituir como uma ferramenta privilegiada para analisar fenômenos de variação, nos quais uma grandeza pode variar ao longo do tempo, no espaço, em relação a outras grandezas ou até mesmo em múltiplas dimensões de forma simultânea, variações estas que podem ocorrer de maneira mais acelerada ou mais lenta, podem deixar de existir, enfim, podem seguir os mais variados tipos de padrões (Ponte,1990).

A centralidade do conceito de função está relacionada à sua importância para uma outra ideia-chave em Matemática: a noção de modelo matemático, que permite a aplicação desta ciência para a compreensão de fenômenos de diferentes áreas do conhecimento. Como salienta Ponte (1990), embora os modelos possam apresentar naturezas distintas, em qualquer circunstância se revela fundamental examinar os efeitos produzidos pelos diferentes parâmetros que os compõem e tal investigação alcança maior rigor e eficiência quando se aproxima do estabelecimento de relações funcionais entre cada parâmetro e as variáveis essenciais do modelo.

Mas, uma outra ideia matemática está diretamente imbricada ao conceito de função: a covariação, isto é, a compreensão de que, em uma relação funcional, “duas quantidades vinculam-se uma a outra de tal modo que, quando uma delas varia, a outra também o faz de maneira relacionada com a primeira” (Lima; Bianchini, 2023, p. 204). A noção de covariação é um dos aspectos centrais de um modo específico de pensar matematicamente: o *pensamento variacional* que podemos compreender como sendo uma forma dinâmica de pensar, envolvendo ideias específicas sobre o conceito de variação, permitindo analisar com rigor diferentes situações ou fenômenos. É um modo de pensar que, como sintetizam Reis, Lima e Bianchini a partir das ideias de diferentes autores, vincula-se ao reconhecimento, identificação e caracterização da mudança em distintos contextos, bem como à compreensão do modo como tais variações se manifestam e evoluem. Ele se expressa na descrição, modelagem e representação das transformações por meio de diferentes sistemas ou registros simbólicos, na construção de imagens dinâmicas que traduzem qualitativamente esse movimento e no desenvolvimento de uma linguagem que permite expressar tal dinamismo. Além disso, contempla também o aspecto quantitativo, que possibilita a realização de cálculos aritméticos e manipulações algébricas para estudar as mudanças e se sustenta no uso sistemático e articulado de situações, argumentos, códigos, estruturas, estratégias e tarefas voltadas à análise da variação.

É importante ressaltar, no entanto, que o pensar variacionalmente requer mais do que o trabalho com situações nas quais a covariação se faz presente. É necessário também habilidade com a *multivariação*, isto é, com situações nas quais há mais do que duas variáveis relacionadas a cada uma das outras (Reis; Lima; Bianchini, 2023), situações estas que requerem um tipo especial de raciocínio, o *raciocínio multivariacional* (Jones, 2018). Como discorrem Reis, Lima e Bianchini (2023) a partir das ideias de Jones e Jeppson (2020), o estudo da multivariação e do raciocínio e do raciocínio associado a ela mostra-se relevante, pois, nos contextos matemáticos e científicos, é comum a presença de mais de duas variáveis potencialmente interligadas.

Podemos mencionar uma série de contextos em que a multivariação está presente. Reis, Lima e Bianchini (2023, p. 278) mencionam, por exemplo, “a relação entre as medidas de pressão ($P$), volume ($V$) e temperatura ($T$) de uma quantidade fixa de gás no interior de um recipiente flexível, expressa matematicamente por $PV = kT$, na qual $P$, $V$ e $T$ podem variar simultaneamente". Outro exemplo é a lei da gravitação universal, que estabelece que dois corpos se atraem com uma força gravitacional de intensidade $F$, medida em Newton, que é diretamente proporcional ao produto de suas massas $m$ e $M$, medidas em quilogramas, e inversamente proporcional ao quadrado da distância $r$, medida em metros, entre seus centros de gravidade, e que pode ser expressa algebricamente por: $F = \frac{GmM}{r^2}$, expressão na qual $G$ representa a constante de proporcionalidade, cujo valor é $6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$, denominada constante gravitacional universal. Nesta lei, podemos alterar a distância $r$ entre dois corpos de massas $m$ e $M$, o que modifica a força gravitacional $F$ entre eles. Também é possível: manter $r$ e $M$ fixos e observar como $F$ varia em relação à massa $m$. Por fim, as três variáveis — $r$, $m$ e $M$ — podem mudar simultaneamente, influenciando conjuntamente a intensidade da força gravitacional $F$ (Lima *et al*., 2024).

Outra situação física citada por Lima *et al*. (2024) na qual a multivariação está presente diz respeito à análise do movimento de um determinado corpo que assume diferentes posições no decorrer do tempo. Se considerarmos, por exemplo, um corpo em movimento que, em um instante inicial, está localizado no ponto $P(x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$ e quisermos analisar como determinar, de maneira genérica, as coordenadas do ponto em que este corpo estará após transcorrido um determinado espaço de tempo $t$, deveremos perceber que $t$ desempenha o papel de variável intermediária, já que o vetor posição $(\vec{r})$ do corpo em estudo dependerá do tempo $(t)$, uma vez que as componentes escalares reais $x$, $y$, $z$ deste vetor variam em relação ao tempo, ou seja, $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$. Para a compreensão efetiva do fenômeno, é necessário, portanto, perceber que uma mudança na variável $t$ terá efeitos sobre as outras variáveis $x$, $y$ e $z$.

Mas será que a multivariação está presente apenas em situações tratadas no final do Ensino Médio ou no Ensino Superior? A resposta é não! A questão é que, muitas vezes, nem mesmo nós professores nos damos conta de sua presença em momentos anteriores de escolaridade e, consequentemente, perdemos excelentes oportunidades de explorá-la com os estudantes.

Provavelmente, uma das primeiras situações na qual o estudante da Educação Básica se depara, ainda que de maneira inconsciente, com a ideia de multivariação diz respeito ao cálculo da medida da área $A$ de um trapézio de base maior $B$, base menor $b$ e altura $h$, dado pela seguinte expressão algébrica: $A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$. O cálculo da medida da área de um trapézio por meio desta expressão, em geral, é apresentado ao estudante no 8º ou no 9º ano do Ensino Fundamental

*Com a Palavra, o Professor*
Vitória da Conquista (BA), v. 10, n. 26, p. 01-17, 2025

brasileiro (estudantes com 13-14 anos de idade), momento em que este já tem maior familiaridade com a linguagem algébrica e já domina também as estratégias de decomposição de figuras geométricas.

No trabalho com a expressão algébrica que permite determinar a medida da área do trapézio conhecendo-se as medidas de suas bases e de sua altura, está presente um tipo especial de multivariação, denominado de *multivariação independente*, uma vez que mais do que duas variáveis independentes (que não são dependentes umas das outras), no caso $B$, $b$ e $h$, influenciam em uma variável dependente, no caso $A$, sendo possível manter constante uma ou mais variáveis independentes enquanto a outra (ou as outras) varia(m). Diante deste contexto, neste artigo, apresentamos algumas reflexões teóricas acerca dos diferentes tipos de multivariação e das ações mentais a eles associados e, em seguida, focando na multivariação independente, elencamos algumas possibilidades para que o professor possa explorá-la ao trabalhar com o cálculo da medida da área de um trapézio recorrendo à expressão anteriormente citada.

## Os diferentes tipos de multivariação e as ações mentais a eles vinculados

As ideias apresentadas nesta seção foram sintetizadas a partir do que escrevemos, em parceria com o pesquisador Frederico da Silva Reis, no capítulo 8 (Reis; Lima; Bianchini, 2023) do livro *O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem* (Bianchini; Lima, 2023).

Ao ampliar a compreensão do pensamento variacional, reconhecendo que, em muitas situações matemáticas e de outras áreas do conhecimento científico, mais de duas variáveis podem variar de forma simultânea ou interdependente, estudos como os de Jones (2018), Jones e Jeppson (2020) e Jones e Kuster (2021) introduziram as noções de *multivariação*, de *pensamento multivariacional* e de *raciocínio multivariacional*.

Em contextos do cotidiano e da ciência, raramente uma única variável depende apenas de outra. Como mencionamos na seção anterior, a pressão, o volume e a temperatura de um gás, por exemplo, variam em conjunto; do mesmo modo, a intensidade da força gravitacional entre dois corpos depende das massas destes corpos e da distância entre eles; e, retomando nosso objeto de estudo neste artigo, a medida da área de um trapézio depende, simultaneamente, das medidas da base maior, da base menor e da altura. Esses exemplos destacam que a compreensão desses fenômenos exige pensar no modo como várias variáveis se afetam mutuamente — simultaneamente ou em cadeia — e coordenar mentalmente tais relações.

Segundo Jones e Kuster (2021), subsidiados por Jones (2018) e Jones e Jeppson (2020), há três tipos principais de multivariação: independente, dependente e agrupada. Cada um destes tipos requer a mobilização de conjuntos específicos de ações mentais. A caracterização das diferentes formas de multivariação e suas respectivas ações mentais são apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1: Diferentes tipos de multivariação e ações mentais neles requeridas

| **Tipo de multivariação** | **Características** | **Ações mentais requeridas (Jones, 2018)** |
|---|---|---|
| Independente | Duas ou mais variáveis independentes influenciam uma dependente; é possível manter algumas constantes. | I1. Perceber que múltiplas variáveis de entrada podem afetar uma variável de saída.<br>I2. Coordenar as mudanças individuais das variáveis em uma mudança direcional global líquida.<br>I3. Determinar se, diante dessa mudança global, a variável de saída aumenta ou diminui;<br>I4. Coordenar a quantidade de mudança observada na variável de saída em resposta à variação conjunta das entradas. |
| Dependente | Nenhuma variável pode ser mantida constante; todas variam simultaneamente e de modo interligado. | D1. Reconhecer que as variáveis mudam de modo interdependente, impossibilitando mantê-las fixas.<br>D2. Coordenar aumentos e diminuições simultâneos entre as variáveis.<br>D3. Quantificar as mudanças, identificando como a variação em uma delas se reflete em cada uma das outras. |
| Agrupada | Cadeia de dependências ou composição de funções. | A1. Perceber que a mudança em uma variável afeta uma sequência de outras;<br>A2. Coordenar se os valores aumentam ou diminuem a cada etapa dessa cadeia;<br>A3. Quantificar o quanto cada variável subsequente aumenta ou diminui, seguindo o encadeamento. |

Fonte: Elaborado pelos autores a partir de Reis, Lima e Bianchini (2023)

Como mencionamos na introdução, a relação entre a medida da área de um trapézio e as medidas de suas bases e de sua altura envolve uma multivariação independente. Mas como essa multivariação e as diferentes ações mentais a ela atreladas podem ser exploradas pelo professor nos Anos Finais do Ensino Fundamental, momento em que os estudantes são apresentados à expressão $A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$ para calcular a medida da área de um trapézio de bases medindo $B$ e $b$ e altura medindo $h$? Na próxima seção, apresentamos uma sugestão de como esta exploração pode ser feita recorrendo, por exemplo, ao *software* GeoGebra.

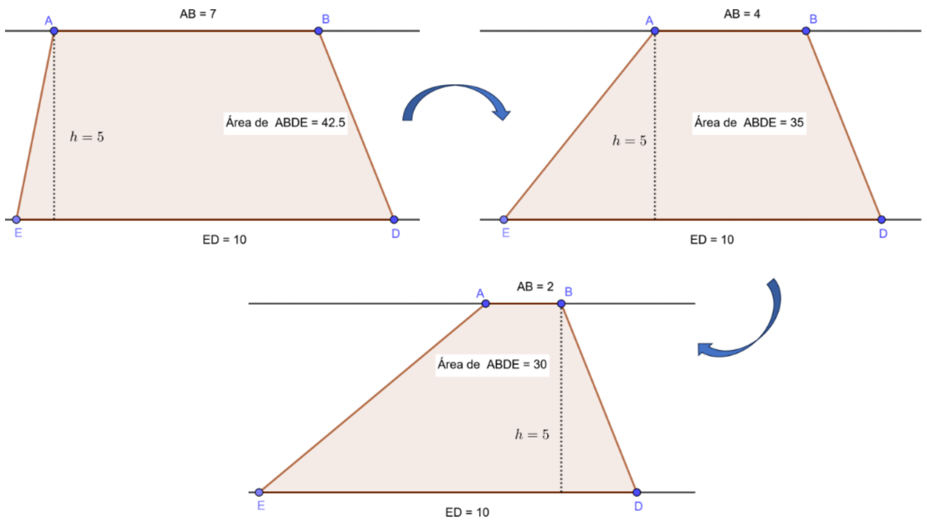
## Uma possível estratégia para explorar a multivariação independente no cálculo da medida da área de um trapézio

Como mencionamos na introdução, o cálculo da medida da área $A$ de um trapézio de base maior $B$, base menor $b$ e altura $h$, dado pela expressão algébrica $A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$, provavelmente seja a primeira situação na qual o estudante dos Anos Finais do Ensino Fundamental se depara com uma relação que pode ser caracterizada como uma multivariação independente, já que as variáveis $B$, $b$ e $h$ impactam em uma variável dependente, no caso $A$, sendo possível manter constante uma ou mais variáveis independentes enquanto a outra (ou as outras) varia(m).

Visando explorar com seus estudantes as diferentes ações mentais relativas à multivariação independente presente nesta situação, o professor, em primeiro lugar, poderá oportunizar que o estudante perceba que essas múltiplas variáveis de entrada ($B, b$ e $h$) impactarão na variável de saída ($A$); ou seja que os valores de $A$ dependem destas entradas e, consequentemente, a saída varia quando as variamos. Para salientar essa percepção, poderá, por exemplo, solicitar que os estudantes determinem as medidas das áreas de trapézios variando as suas dimensões: inicialmente, uma por vez, em seguida duas de cada vez e, finalmente, as três ao mesmo tempo.

Uma experimentação inicial que poderia ser proposta aos estudantes é o que ilustramos na Figura 1, a partir de simulações realizadas com o auxílio do *software* GeoGebra, recurso que o professor também poderá explorar e estimular que seus alunos o empreguem. Construímos um trapézio com base maior medindo 10 unidades de comprimento, base menor medindo 7 unidades de comprimento e altura medindo 5 unidades de comprimento. Observamos então a medida de sua área (no caso, 42,5 unidades de área) e, na sequência, obtivemos outros dois trapézios alterando somente a medida da base menor e novamente obtivemos as respectivas medidas de suas áreas.

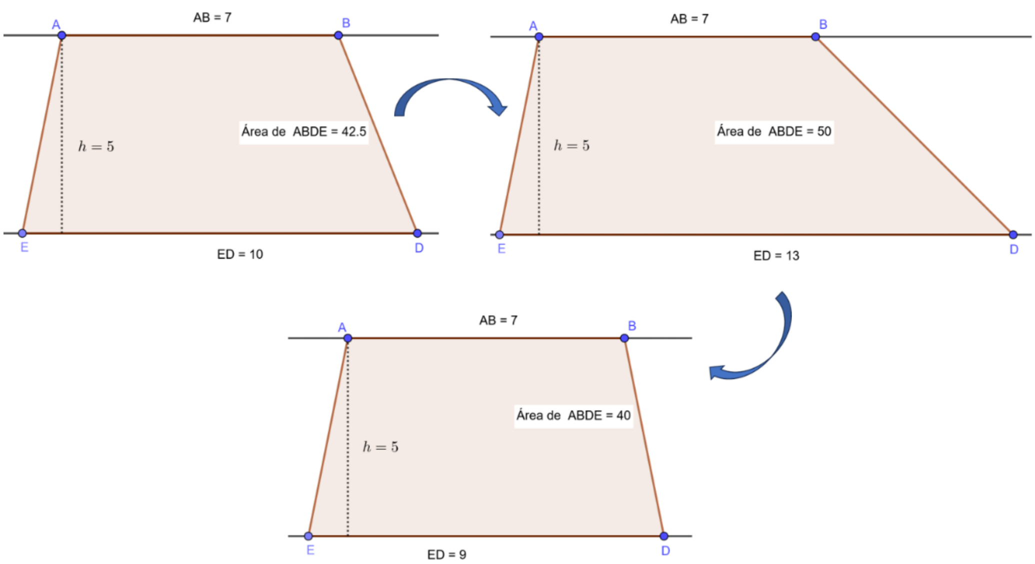
Figura 1: variação da medida da base menor e determinação da medida das áreas dos trapézios




Fonte: Elaborado pelos autores.

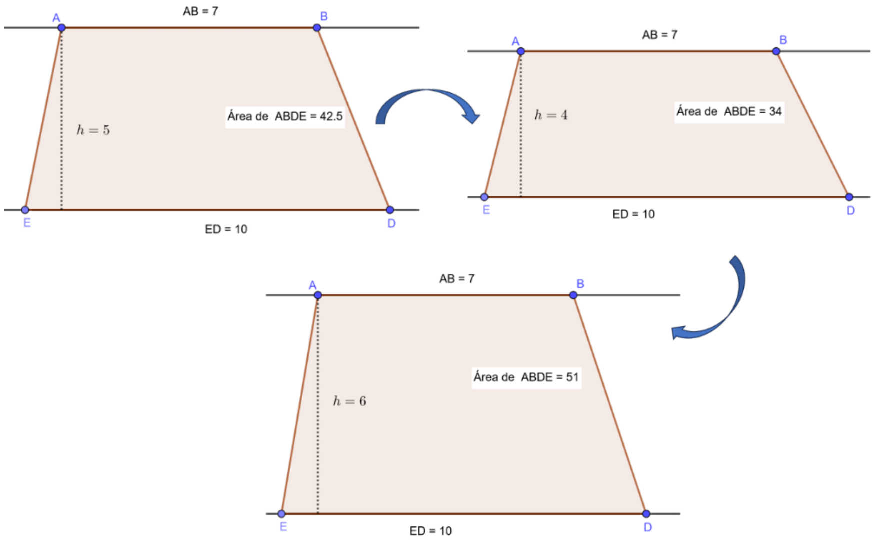
O mesmo tipo de simultação pode ser feita alterando a medida da base maior (Figura 2) ou a medida da altura (Figura 3). Tanto no caso das alterações da medida da base maior, quanto no caso das mudanças na medida da altura, partimos, inicialmente do mesmo trapézio anteriormente considerado, com base maior medindo 10 unidades de comprimento, base menor medindo 7 unidades de comprimento e altura medindo 5 unidades de comprimento e, portanto, com área medindo 42,5 unidades de área e, em seguida, variamos as medidas desejadas, obtivemos novos trapézios e calculamos as novas medidas de área.

Figura 2: variação da medida da base maior e determinação da medida das áreas dos trapézios




Fonte: Elaborado pelos autores.

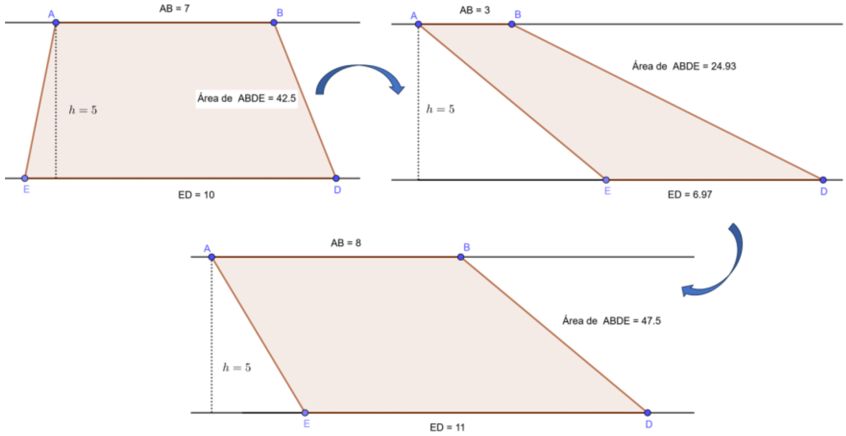
Figura 3: variação da medida da base altura e determinação da medida das áreas dos trapézios




Fonte: Elaborado pelos autores.

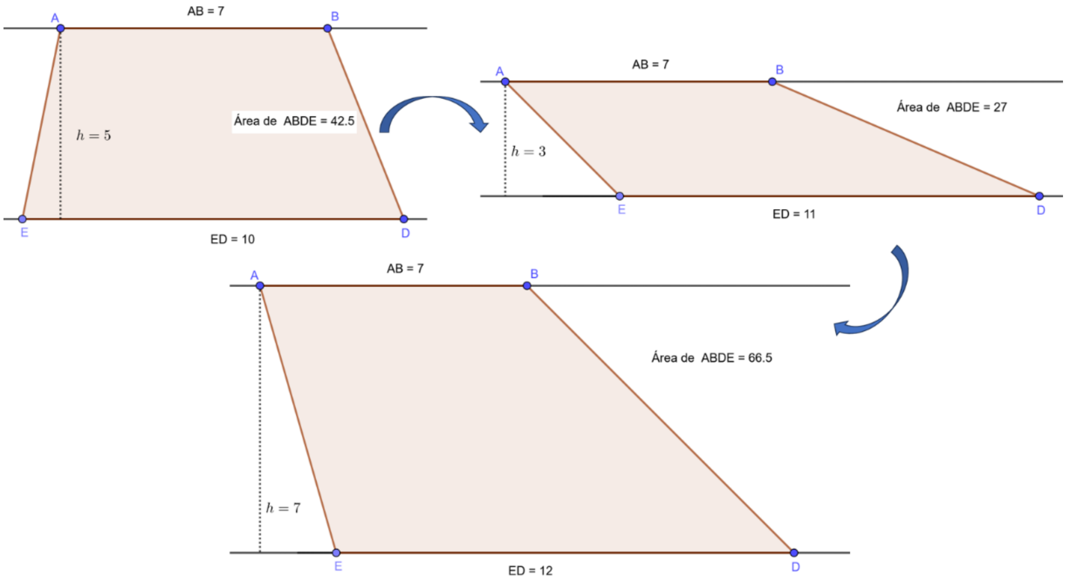
Finalizadas essas simulações em que apenas uma das variáveis de entrada é alterada, o professor poderá propor um novo estudo no qual uma das variáveis de entrada será fixada, enquanto as outras sofrerão variações simultâneas e, então, serão analisados os impactos destas na medida da área do trapézio. Novamente, em todas as situações, o primeiro trapézio considerado será aquele como base maior medindo 10 unidades de comprimento, base menor medindo 7 unidades de comprimento, altura medindo 5 unidades de comprimento e área medindo 42,5 unidades de área. No que é apresentado na Figura 4, variamos, simultaneamente, as medidas das bases maior e menor e mantivemos fixa a medida da altura. Na Figura 5, as variações foram nas medidas da base maior e da altura e na Figura 6, as variações ocorreram nas medidas da base menor e da altura.

Figura 4: variação simultânea das medidas das bases e determinação da medida das áreas dos trapézios



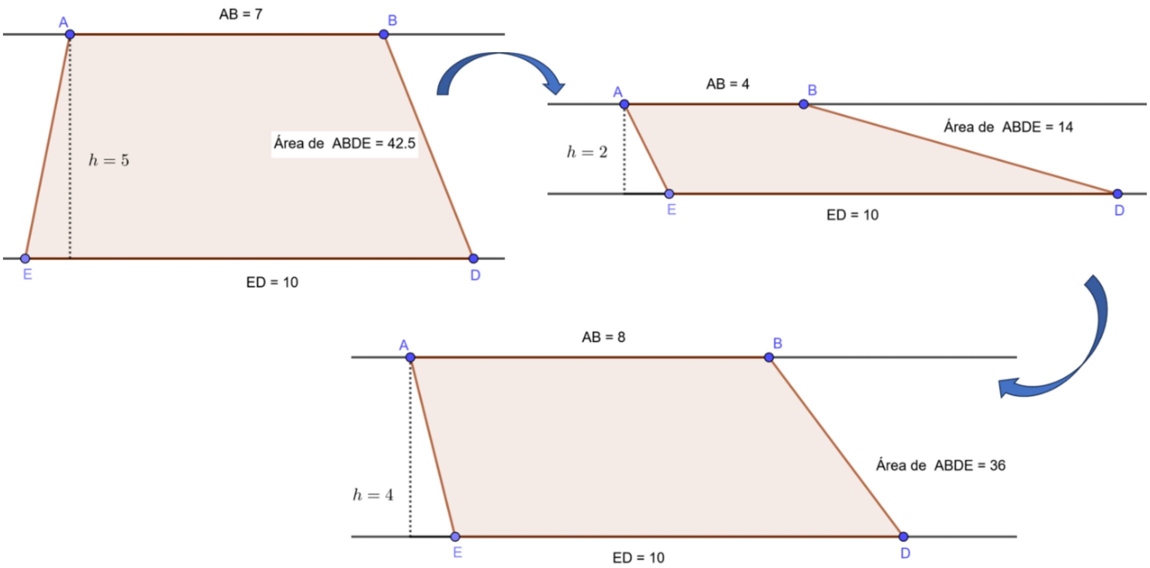

Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 5: variação simultânea das medidas da base maior e da altura e determinação da medida das áreas dos trapézios




Fonte: Elaborado pelos autores

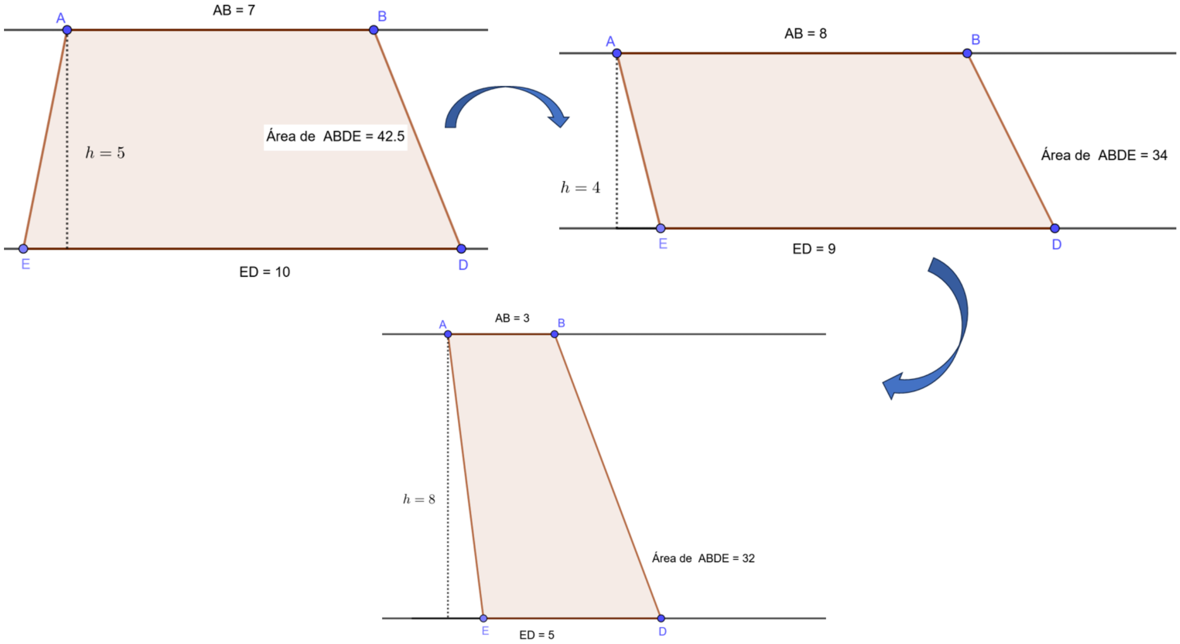
Figura 6: variação simultânea das medidas da base menor e da altura e determinação da medida das áreas dos trapézios




Fonte: Elaborado pelos autores.

Por fim, a última simulação que sugerimos que o professor explore junto a seus estudantes diz respeito à alteração simultânea das três variáveis de entrada, isto é, medidas das duas bases e medida da altura, visando identificar os resultados na variável de saída – a medida da área do trapézio. É o que apresentamos na Figura 7.

Figura 7: variação simultânea das medidas da base menor, da base maior e da altura do trapézio e determinação da medida de sua área




Fonte: Elaborado pelos autores.

Ao trabalhar com essas simulações descritas, o professor, além de direcionar a atenção do estudante para que ele se conscientize de que as três variáveis de entrada $B$, $b$ e $h$ impactam na variável $A$ de saída (ação mental I1), poderá também estimular, por meio de mediações e questionamentos adequadamente pensados para esse fim, que o discente desenvolva estratégias visando compreender como coordenar as mudanças individuais ou simultâneas em $B$, $b$ e $h$ em uma mudança direcional global líquida na variável $A$ (ação mental I2) e analisar se, diante dessa mudança global, a medida $A$ experimentará um crescimento ou um decrescimento (ação mental I3).

Para auxiliar os estudantes na exploração da ação mental I4, relativa à coordenação de quanto a medida da área $A$ varia como resposta à variação conjunta de $B$, $b$ e $h$, o professor poderá destacar aspectos relacionados a esta coordenação que puderam ser observados nas simulações anteriores. Pode, por exemplo, chamar a atenção para o fato de que, na situação inicial presente nas Figuras 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, em que há um trapézio com base maior medindo

10 unidades de comprimento, base menor medindo 7 unidades de comprimento, altura medindo 5 unidades de comprimento e medida da área do trapézio sendo 42,5 unidades de área, que pode ser obtida algebricamente por $A = \frac{(10+7)}{2} \cdot 5 = 42{,}5$, se variarmos somente a medida da base maior, por exemplo, de 10 unidades de comprimento para 13 unidades de comprimento, a medida da área passará a ser 50 unidades de área, havendo com consequência deste aumento de 3 unidades em uma das variáveis de entrada, um aumento de 7,5 unidades na variável de saída. Se, por outro lado, alterarmos somente a medida da base menor, por exemplo, de 7 unidades de comprimento para 4 unidades de comprimento, a nova medida de área será 35 unidades de área, havendo, portanto, uma diminuição de 7,5 unidades na variável de saída, como consequência da diminuição de 3 unidades em uma das variáveis de entrada. O mesmo tipo de análise pode ser feito em relação a uma variação na medida da altura, mantendo fixas as demais variáveis de entrada.

O professor pode também solicitar que o estudante analise o caso em que duas das variáveis de entrada são alteradas simultaneamente. Por exemplo: suponha que, a partir da situação original, na qual $B = 10$ unidades de comprimento, $b = 7$ unidades de comprimento, $h = 5$ unidades de comprimento e $A = 42{,}5$ unidades de área, optamos por manter $h$ fixo e alterar $B$ para 11 unidades de comprimento (acréscimo de 1 unidade) e $b$ para 8 unidades de comprimento (acréscimo também de uma unidade). Nesta nova situação, a medida da área será $47{,}5$ unidades de área. Ou seja, as alterações em duas das três variáveis de entrada ocasionaram uma variação líquida de 5 unidades para mais na medida da área do trapézio.

Essa discussão poderia culminar então em uma tentativa de generalização, por parte do estudante sob a mediação do professor, do comportamento observado. Por meio de estratégias adequadas, o docente poderá estimular que o discente perceba que:

- ao variar somente a medida da base maior $(B)$ ou somente a medida da base menor $(b)$, teremos, no primeiro caso, um aumento em relação à medida da área original de um fator de $\frac{\Delta B \cdot h}{2}$ e, no segundo caso, um aumento em relação à medida da área original de um fator de $\frac{\Delta b \cdot h}{2}$, sendo, $\Delta B$ e $\Delta b$, respectivamente, as variações realizadas nas medidas da base maior e da base menor;
- ao variar somente a medida da altura $(h)$, teremos um aumento em relação à medida da área original de um fator de $\left(\frac{B+b}{2}\right) \cdot \Delta h$, sendo $\Delta h$ a variação realizada na medida da altura;

Vitória da Conquista (BA), v. 10, n. 26, p. 01-17, 2025

- ao variar, simultaneamente, as medidas da base maior e da base menor, teremos uma variação, em relação à medida da área original, de um fator de $\frac{\Delta B \cdot h}{2} + \frac{\Delta b \cdot h}{2}$, sendo, $\Delta B$ e $\Delta b$, respectivamente, as variações realizadas nas medidas da base maior e da base menor.
- já ao variar simultaneamente as medidas da base menor e da altura, a variação em relação à medida da área original será de um fator de

$$\frac{B \cdot \Delta h}{2} + \frac{b \cdot \Delta h}{2} + \frac{\Delta b \cdot h}{2} + \frac{\Delta b \cdot \Delta h}{2}$$

- por fim, ao variar simultaneamente as medidas da base maior e da altura, a variação em relação à medida da área original será de um fator de

$$\frac{B \cdot \Delta h}{2} + \frac{b \cdot \Delta h}{2} + \frac{\Delta B \cdot h}{2} + \frac{\Delta B \cdot \Delta h}{2}$$

- já variando simultaneamente as medidas da base maior, da base menor e da altura, a variação em relação à medida da área original será de um fator de

$$\frac{B \cdot \Delta h}{2} + \frac{\Delta B \cdot h}{2} + \frac{\Delta B \cdot \Delta h}{2} + \frac{b \cdot \Delta h}{2} + \frac{\Delta b \cdot h}{2} + \frac{\Delta b \cdot \Delta h}{2}$$

Realizadas essas generalizações, como forma de dar a elas um caráter mais concreto, o professor pode pedir que os estudantes observem que elas podem ser percebidas também por meio das simulações realizadas no software GeoGebra apresentadas anteriormente.

Caso o professor tenha realizado juntamente com os estudantes essas simulações propostas e queira verificar o que eles, ao final do trabalho, efetivamente introjetaram, sugerimos que proponha a eles um problema em que os aspectos sobre os quais refletiram sejam mobilizados. A seguir, apresentamos, na Figura 8, uma sugestão de problema que pode ser trabalhado com este objetivo.

Figura 8: exemplo de problema a ser proposto aos estudantes

**Construindo a passarela entre dois patamares**: em uma escola técnica, um grupo de estudantes foi convidado a ajudar na construção de uma passarela de madeira que ligará dois patamares com alturas diferentes. Quando vista de lado, essa passarela tem a forma de um trapézio no qual: a base maior $B$: representa o comprimento da parte de

cima da estrutura; a base menor $b$ representa o comprimento da parte de baixo; a altura $h$ é a distância entre os dois patamares (a diferença de altura). A parte interna da estrutura da passarela é formada por longarinas e travessas, que são as vigas de madeira que dão firmeza e sustentação à construção. A quantidade de madeira usada depende da medida da área do trapézio que representa a passarela vista de lado. O engenheiro que orienta o grupo nesta construção pediu que a medida da área deste trapézio não ultrapassasse 30 metros quadrados, para que não seja usada uma quantidade de madeira muito grande e o orçamento se torne mais enxuto.
Considere que a medida da altura da passarela é 4 metros.
(a) Descubra quais pares de medidas $B$ e $b$ para as bases fazem com que a medida da área seja exatamente 30 m².
(b) Escolha uma das respostas obtidas no item (a) e imagine que você aumenta a medida da base maior $B$ em 2 metros e diminui a medida da base menor $b$ em 1 metro. A medida da área aumenta, diminui ou continua igual? Se houver aumento ou diminuição, indique de quanto.
(c) E se você diminuir a medida de $B$ em 1 metro e aumentar a medida de $b$ em 2 metros, o que acontece com a medida da área? O resultado é parecido com o anterior? Por quê?
(d) Agora o engenheiro decidiu que a passarela deve ser um pouco mais alta, com 5 metros de altura, mas a medida da área precisa continuar igual (30 m²). Quais novas medidas de $B$ e $b$ poderiam ser escolhidas?

Fonte: Elaborado pelos autores.

Por meio deste problema, o professor, além de verificar o que os estudantes compreenderam e introjetaram do trabalho anteriormente realizado, poderá discutir com eles os seguintes aspectos:

- no item (a), a condição que deve ser satisfeita pelos pares $B$ e $b$ para que a o valor de $A$ se mantenha constante em 15 m$^2$, fixada a medida $h$ em 4 m, é $B + b = 15$;
- no item (d), como conclusão do que foi observado nos itens (b) e (c), que mantendo a medida da altura fixa, aumentar a medida de uma das base na mesma quantidade em que diminuímos a medida da outra mantém a medida da área constante;
- no item (e), que o aumento da medida de $h$ de 4 m para 5 m ocasiona um aumento no fator $\frac{h}{2}$ de 2 para 2,5 e, deste modo, para a manutenção da medida de $A$ em em 15 m$^2$, é necessário não mais que $B + b = 15$, mas que $B + b = 12$.

Convém observar, até mesmo para apresentarmos outra possibilidade de trabalho para o docente, que, para a elaboração deste problema, contamos com o auxílio de uma ferramenta de Inteligência Artificial Generativa, o ChatGPT. Inserimos, para isso, o seguinte *prompt* e anexamos um arquivo de texto contendo as simulações que apresentamos nesse artigo:

*Olá, somos pesquisadores em Educação Matemática e estamos escrevendo um artigo sobre possibilidades de explorar a ideia de multivariação independente nos anos finais do ensino fundamental a partir de situações envolvendo o cálculo da medida da área de um trapézio qualquer de bases B e b e altura h. No arquivo anexo, apresentamos algumas ideias de simulações a serem realizadas no GeoGebra visando explorar as diferentes ações mentais* *relativas a este tipo de multivariação e que podem ser exercitadas a partir desta questão do cálculo da medida da área do trapézio. Gostariamos então que você, atuando como um consultor em Educação Matemática, nos desse ideias de dois problemas que poderíamos apresentar neste artigo como possíveis ideias para o professor explorar junto aos estudantes esta questão da multivariação independente, ainda recorrendo ao cálculo da medida da área do trapézio, mas de uma maneira diferente da que propusemos, de modo mais aplicado envolvendo a estratégia de resolução de problemas. É possível?*

Como resposta a este *prompt*, a IA nos sugeriu duas possíveis situações a serem exploradas, a que optamos e explicitamos na Figura 8, e outra envolvendo o consumo de concreto para a construção de uma rampa de acesso.

Obviamente, o que apresentamos nesta seção é apenas um exemplo de tipos de discussões e problemas que o professor poderia propor aos estudantes de modo a viabilizar o desenvolvimento das ações mentais que são requeridas ao se trabalhar com a multivariação independendente no contexto da determinação da medida da área de um trapézio por meio da expressão que a relaciona às medidas das suas bases e de sua altura. O docente poderá desenvolver outras estratégias e outros problemas a partir da realidade de seus estudantes, de suas experiências em sala de aula e de seus objetivos didáticos, mas, para isso, é fundamental que tenha consciência de que a multivariação independente está intrinsecamente presente no trabalho com a expressão $A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$. Passamos então à apresentação de nossas considerações finais.

## Considerações Finais

A análise desenvolvida neste artigo evidencia que, mesmo em temas aparentemente simples e introdutórios do currículo da Educação Básica, como o cálculo da medida da área de um trapézio, estão presentes ideias matemáticas de grande sofisticação conceitual, entre elas a de multivariação independente. Quando o professor reconhece essa presença, amplia-se sua capacidade de favorecer, intencionalmente, o desenvolvimento do pensamento variacional dos estudantes.

Assim, o trabalho, por exemplo, com a expressão $A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$ deixa de ser apenas um exercício de substituição de valores e passa a constituir uma oportunidade para refletir sobre como diferentes variáveis e mudanças, simultâneas ou não em seus valores, influenciam globalmente o resultado obtido por meio da expressão que as relacionam.

Ao explorar didaticamente situações em que a multivariação se manifesta, o professor estimula o estudante a desenvolver ações mentais fundamentais, tais como: perceber as variáveis envolvidas, coordenar suas variações, analisar direções de crescimento ou decrescimento e compreender quantidades resultantes da combinação das mudanças realizadas. Esse tipo de raciocínio favorece o pensamento relacional e funcional, permitindo que o aluno compreenda a Matemática como uma ciência que descreve e interpreta fenômenos em transformação.

É importante salientar que, além da que apresentamos, há outras situações presentes na Educação Básica que favorecem o trabalho com a multivariação. Ela se faz presente em inúmeros outros contextos, tais como: a determinação da medida do volume de sólidos geométricos, em que as medidas de duas ou mais dimensões influenciam conjuntamente o resultado; o cálculo de juros simples e compostos, no qual o tempo, a taxa e o capital interagem para determinar o montante; e as equações paramétricas que representam algebricamente retas e planos, nas quais o parâmetro comum estabelece uma relação entre as coordenadas.

É fundamental, portanto, que o professor compreenda que o desenvolvimento do pensamento variacional, incluindo a ideia de multivariação e o raciocínio multivariacional, requer não a inserção em sala de aula de novos conteúdos, mas de *novos olhares* sobre conteúdos já tradicionalmente abordados. Essa mudança de olhar pode potencializar, no ensino de Matemática, a oportunização de espaços para a investigação sobre relações e dependências entre grandezas. Reconhecer e explorar esse aspecto em sala de aula é um passo importante para formar estudantes capazes de compreender fenômenos dinâmicos nos quais a interdependência entre variáveis é ponto-chave, e professores que percebam a Matemática como um instrumento essencial para interpretar e explicar a complexidade dos fenômenos naturais, sociais e tecnológicos.

## Referências

CARACA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. **O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

JONES, S. R. Building on covariation: making explicit four types of “multivariation”. In: Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, 21., 2018, San Diego, CA. ***Proceedings*** […]. San Diego, CA: SIGMAA on RUME, 2018. p. 1110–1118.

JONES, S. R.; JEPPSON, H. P. Students’ reasoning about multivariational structures. In:

Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 42. 2020. **Proceedings** […]. 2020. p. 1139–1147.

JONES, S. R.; KUSTER, G. E. Examining students' variational reasoning in differential equations. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 64, p. 1–15, 2021.

LIMA, G. L. *et al.* A importância de refletir acerca da multivariação no ensino de Matemática para a Engenharia. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia – COBENGE, 52., 2024, Vitória, ES. **Anais** […]. Vitória: Associação Brasileira de Educação em Engenharia, 2024. p. 1–13.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa, n. 15, p. 3–9, 1990.

REIS, F. da S.; LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L. Pensamento variacional. In: BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. (orgs.). **O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem**. São Paulo: Livraria da Física, 2023. p. 249–299.