

Modelo praxeológico para o ensino de construções de triângulos: um olhar para a articulação entre blocos praxeológicos

A Praxeological Model for teaching triangle construction: a look at the relationship between praxeological blocks

Modelo praxeológico para la enseñanza de la construcción de triángulos: una mirada a la articulación entre bloques praxeológicos

Elizabeth Cristina Rosendo Tomé da Silva¹

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Doutora em Educação Matemática e Tecnológica

Franck Gilbert René Bellemain²

Universidade Federal de Pernambuco
Doutor em Didactique des Mathématiques

Paula Moreira Baltar Bellemain³

Universidade Federal de Pernambuco
Doutora em Didactique Des Disciplines Scientifiques

Resumo: Este artigo tem como objetivo apresentar a estruturação do *MPR_Triângulos* que visa à articulação entre os blocos praxeológicos em tarefas de construção de triângulos em um ambiente de Geometria Dinâmica. Esse modelo surge como resultado de uma tese de doutorado e teve como fundamentação teórico-metodológica a Teoria Antropológica do Didático e seus pressupostos, com a intenção de contribuir na formação de professores que ensinam geometria em sua abordagem gráfica. Partimos da problemática relacionada ao ensino das construções geométricas, ainda pautada na descrição de procedimentos desarticulado das suas justificativas teóricas. Metodologicamente, a estruturação do *MPR_Triângulos* aqui apresentada baseou-se em três estudos prévios, direcionados às análises de obras didáticas que contemplavam tarefas de construção de triângulos e, posteriormente, à resolução e ao estudo das técnicas no GeoGebra. A partir dos dados obtidos nesses estudos, foi possível conceber o modelo, considerando etapas como: (i) escolhas didáticas; (ii) descrição dos blocos praxeológicos e da natureza das tarefas previstas para o modelo; e (iii) apresentação dos tipos de tarefas incorporadas no *MPR_Triângulos*. A estruturação do modelo evidenciou que, ao adotar pressupostos teóricos-metodológicos, como a quádrupla praxeológica e a noção de modelo praxeológico de referência, foi possível elaborar uma organização praxeológica robusta, que articula os saberes práticos e teóricos por meio da natureza das tarefas propostas, as quais exploram as potencialidades do software GeoGebra. Visamos, assim, superar lacunas como o ensino desassociado das construções geométricas e suas justificativas matemáticas, ainda

¹ E-mail: elizabeth.silva@uesb.edu.br. Id orcid: [0000-0002-0664-6991](https://orcid.org/0000-0002-0664-6991). Link do lattes: <http://lattes.cnpq.br/3457017190178025>

² E-mail: franck.bellemain@ufpe.br. Id orcid: [0000-0001-5358-2057](https://orcid.org/0000-0001-5358-2057). Link do lattes: <http://lattes.cnpq.br/8667486345431443>

³ E-mail: paula.bellemain@ufpe.br. Id orcid: [0000-0002-2864-8883](https://orcid.org/0000-0002-2864-8883). Link do lattes <http://lattes.cnpq.br/1264702708331679>

recorrentes no ensino desses conceitos em sua abordagem gráfica.

Palavras-chave: Geometria Gráfica. Construção de Triângulos. Geometria Dinâmica.

Abstract: The purpose of this article is to present the structure of *MPR_Triângulos*, which aims to integrate praxeological blocks into triangle-construction tasks within a Dynamic Geometry environment. This model emerged from a doctoral dissertation and was grounded theoretically and methodologically in the Anthropological Theory of Didactics and its assumptions, with the intention of contributing to the training of teachers who teach geometry using a graphical approach. We began with the problem related to the teaching of geometric constructions, which is still based on the description of procedures disconnected from their theoretical justifications. Methodologically, the structure of the *MPR_Triangles* model presented here was based on three previous studies focused on analyzing instructional materials that included triangle-construction tasks and, subsequently, on the resolution and study of techniques in GeoGebra. Based on the data obtained from these studies, it was possible to design the model, considering stages such as: (i) pedagogical choices; (ii) description of the praxeological blocks and the nature of the tasks envisaged for the model; and (iii) presentation of the types of tasks incorporated into the *MPR_Triangles*. The structuring of the model demonstrated that, by adopting theoretical and methodological assumptions—such as the praxeological quadruple and the notion of a praxeological reference model—it was possible to develop a robust praxeological framework that integrates practical and theoretical knowledge through the nature of the proposed tasks, which explore the capabilities of the GeoGebra software. We thus aim to address gaps such as the disjointed teaching of geometric constructions and their mathematical justifications, which persist in the instruction of these concepts when using a graphical approach.

Keywords: Graphic Geometry. Construction of Triangles. Dynamic Geometry.

Resumen El objetivo de este artículo es presentar la estructura del *MPR_Triángulos*, que busca la articulación entre los bloques praxeológicos en tareas de construcción de triángulos en un entorno de Geometría Dinámica. Este modelo surge como resultado de una tesis de doctorado y se basó, desde el punto de vista teórico-metodológico, en la Teoría Antropológica de la Didáctica y sus supuestos, con la intención de contribuir a la formación de maestros que enseñan geometría mediante un enfoque gráfico. Partimos de la problemática relacionada con la enseñanza de las construcciones geométricas, que aún se basa en la descripción de procedimientos desvinculados de sus justificaciones teóricas. Desde el punto de vista metodológico, la estructuración del *MPR_Triángulos* que aquí se presenta se basó en tres estudios previos, orientados al análisis de materiales didácticos que incluían tareas de construcción de triángulos y, posteriormente, a la resolución y al estudio de las técnicas en GeoGebra. A partir de los datos obtenidos en esos estudios, fue posible concebir el modelo, considerando etapas como: (i) decisiones didácticas; (ii) descripción de los bloques praxeológicos y de la naturaleza de las tareas previstas para el modelo; y (iii) presentación de los tipos de tareas incorporadas en el *MPR_Triángulos*. La estructuración del modelo puso de manifiesto que, al adoptar supuestos teórico-metodológicos, como la cuádruple praxeológica y la noción de modelo praxeológico de referencia, fue posible elaborar una organización praxeológica sólida, que articula los conocimientos prácticos y teóricos a través de la naturaleza de las tareas propuestas, las cuales exploran las potencialidades del software GeoGebra. De este modo, buscamos superar brechas como la enseñanza desarticulada de las construcciones geométricas y sus justificaciones matemáticas, que aún persisten en la enseñanza de estos conceptos en su enfoque gráfico.

Palabras-clave: Geometría gráfica. Construcción de triángulos. Geometría dinámica.

Introdução

O texto apresentado é o resultado de uma tese de doutorado que se debruçou na estruturação de um Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de construções de triângulos que possa contribuir na formação de professores que ensinam geometria em sua abordagem gráfica. Esta estruturação tem como objetivo articular os blocos praxeológicos $[T, \tau, \theta, \Theta]$, elementos centrais na Teoria Antropológica do Didático (1991, 2020) em tarefas de construção de triângulos em um ambiente de Geometria Dinâmica.

A estruturação se deu a partir de três estudos, parte integrantes da tese da primeira autora, sobre o modelo praxeológico dominante de duas instituições: Licenciatura em Expressão Gráfica e Licenciaturas em Matemática, que oferecem disciplinas que abordam os conteúdos de triângulos, bem como das obras didáticas adotadas por essas instituições. Partindo dos esboços do MPD e da estruturação de técnicas ao realizar as construções no software GeoGebra foi possível propor um modelo de referência para a formação docente. Nomeamos este modelo como *MPR_Triângulos*.

É válido destacar que o modelo aqui proposto, assim como todo modelo praxeológico de referência, não deve ser interpretado como algo “engessado” e finalizado, mas sim, como um modelo flexível e adaptável para os contextos aos quais ele poderá ser aplicado, questionado, refinado e/ou retificado.

Nossa proposta visa estruturar um conjunto de tarefas de construção de triângulos de diferentes naturezas que articulem as representações gráficas com as justificativas matemáticas tendo como base um software de geometria dinâmica, posicionando-o como um ambiente de validação das propriedades geométricas envolvidas no processo construtivo.

Este modelo, estabelece uma organização para o que se espera de uma tarefa no momento de sua seleção e, portanto, pressupõe um conjunto de praxeologias que poderão auxiliar o professor no planejamento de suas aulas. Ainda que sua estrutura, baseada na quádrupla praxeológica seja pré-definida, a implementação de quais tarefas e qual a profundidade das tecnologias e teorias é sensível ao contexto institucional.

Nesse sentido, esse artigo tem como objetivo apresentar a estruturação do *MPR_Triângulos* que visa a articulação entre os blocos praxeológicos em tarefas de construção de triângulos em um ambiente de Geometria Dinâmica.

A Teoria Antropológica do Didático: Blocos Praxeológicos e Modelos Praxeológicos de referência

Como mencionado em nossa introdução, o modelo praxeológico proposto se fundamenta em elementos da TAD, mas especificamente nos blocos praxeológicos.

É válido começar destacando alguns desses conceitos que norteiam e ajudam a compreender os elementos que foram adotados na estruturação do *MPR_Triângulos*.

Chevallard (2020) destaca que o objetivo contínuo dessa teoria é dar sentido a todos os possíveis formatos de aprendizagem e ensino, modelando-os e analisando-os adequadamente em termos de investigação.

O autor também enfatiza que a noção de praxeologia permite formular plenamente o objeto da didática sob a ótica da TAD: a didática dedica-se a estudar as condições e as restrições sob os quais as praxeologias começam a viver, a migrar, a mudar, a operar, a murchar, a desaparecer, a renascer etc., dentro dos grupos humanos (Chevallard, 2006).

O trecho abaixo, extraído de Chevallard (2006) ajuda a compreender o significado do termo praxeologia no contexto da TAD:

A praxeologia é, de alguma forma, a unidade básica na qual se pode analisar a ação humana em geral. [...] O que é exatamente uma praxeologia? Podemos contar com a etimologia para nos guiar aqui – pode-se analisar qualquer fazer humano em dois componentes principais e inter-relacionados: a **práxis**, ou seja, a parte prática, por um lado, e o **logos**, por outro. "Logos" é uma palavra grega que, desde os tempos pré-socráticos, tem sido usada constantemente para se referir ao pensamento e raciocínio humanos – particularmente sobre o cosmos. [...] [De acordo com] um princípio fundamental da TAD – a teoria antropológica do didático – nenhuma ação humana pode existir sem ser, pelo menos parcialmente, "explicada", tornada "inteligível", "justificada", "explicada", em qualquer estilo de "raciocínio" que tal explicação ou justificativa possa ser lançada. A práxis, portanto, implica logos, que, por sua vez, sustenta a práxis. Pois a práxis precisa de apoio justamente porque, a longo prazo, nenhum fazer humano passa inquestionável. (Chevallard, 2006, p. 23, tradução nossa)

Nesse sentido, uma praxeologia é uma entidade formada por quatro componentes, comumente chamados de “quatro T’s”, sendo eles: um tipo de tarefas, um conjunto de técnicas, um discurso tecnológico e uma teoria.

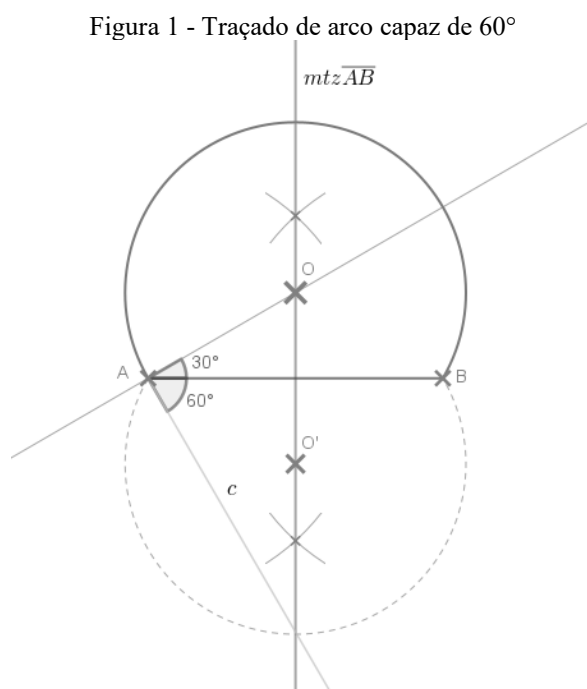
No contexto da nossa pesquisa, optamos para apresentar essa quádrupla em termos de um enunciado para uma construção: *Construa um arco de circunferência sobre o segmento $\overline{AB}$ e obtenha pontos que enxerguem esse segmento a 60° .*

Partindo dos pressupostos da TAD esse enunciado demanda que se realize uma tarefa (t), de um determinado tipo (T), que como já está presente no enunciado é *construir* algo. Para isso, o sujeito precisará realizá-la por meio de uma técnica (τ), que pode ser traduzida, em

termos de uma construção geométrica com instrumentos tradicionais de desenho, traçados que determinem os elementos necessários para construir um arco no qual os pontos enxerguem o segmento $\overline{AB}$ a 60° . A tarefa e técnica descritas compõem a *práxis* ou a prática matemática para realizar a atividade e está associada ao bloco denominado como saber-fazer ou bloco técnico-prático, representado como $\Pi = [T, \tau]$ de uma praxeologia.

Podemos então descrever a tarefa (t) como algo particular e específico que nesse caso é construir um arco de circunferência. Já o tipo de tarefas (T) é descrito em termos de gênero de tarefa, que se refere a um verbo de ação e se exprime, nesse exemplo, construir. Quando temos uma tarefa que $t \in T$ a praxeologia relativa a ela, ou ao gênero de tarefa determina também uma maneira ou um caminho de como realizá-la, ou seja, uma maneira de fazer (Chevallard, 1998). Nesse bloco há então, uma associação entre um certo tipo de tarefas e uma técnica (τ) que permite realizar a tarefa e que é composta por um rigoroso subconjunto de tipos de tarefas (ST).

Na tarefa apresentada, a técnica adotada pode ser descrita a partir de subtarefas que utilizam objetos geométricos, como mediatriz, ângulo de segmento, entre outros, conforme apresentado na Figura 1 e descrito no



Fonte: Elaborado pela autora

Os procedimentos construtivos aplicados utilizando ferramentas de um software de geometria dinâmica podem ser descritos por meio das seguintes subtarefas (*ST*):

Quadro 1 - Subtarefas

<i>ST</i>	Descrição das subtarefas
<i>ST</i> ₁	Construir um ângulo de 60° apoiado no segmento dado $\overline{AB}$, com o vértice $\hat{A}$.
<i>ST</i> ₂	Traçar a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.
<i>ST</i> ₃	Construir uma reta perpendicular a semirreta c passando pelo ponto A .
<i>ST</i> ₄	Determinar a interseção entre a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ e a reta perpendicular – centro do arco, gerando o centro do arco, denominado O .
<i>ST</i> ₅	Construir o arco com centro em O com raio igual à medida do segmento $\overline{AB}$.
<i>ST</i> ₆	Refletir o ponto O a partir do segmento $\overline{AB}$, gerando O' e o segundo arco capaz.

Fonte: Elaborado pela autora

Cada uma das subtarefas descritas compõe a técnica escolhida para resolver essa tarefa. É importante ressaltar que diferentes técnicas podem ser adotadas para resolver um mesmo tipo de tarefas, visto que existem técnicas que serão mais, ou menos, eficiente e/ou viáveis.

Chevallard (2020) destaca que em uma instituição, seja qual for o tipo de tarefas (T), a técnica relativa a T está sempre acompanhada de um vestígio de uma tecnologia (θ), ou seja, algo que a descreva e justifique.

Essa tecnologia compõe o *logos*, ou seja, o saber, de uma praxeologia juntamente com a teoria (θ) que serve para fundamentar a tecnologia. Esse bloco é denominado como bloco tecnológico-teórico, representado por $\Lambda = [\theta, \theta]$.

É a tecnologia que permite simultaneamente pensar e produzir a tarefa por meio das técnicas adotadas, ou seja, o que justifica por exemplo que a *ST*₃ tenha sido realizada. Para exemplificar melhor a tecnologia, podemos apontar que a subtarefa *ST*₃ - *Construir uma reta perpendicular a semirreta c passando pelo ponto A* foi eficaz na subtarefa escolhida, pois ela se justifica pela determinação do ângulo complementar ao ângulo de segmento traçado.

Segundo Matheron (2000), ao evocar elementos que justifiquem a técnica adotada, esse recurso assume a função de elemento tecnológico, servindo como base para organizar um discurso tanto de apoio quanto de justificação.

Esse discurso encontra fundamentação na teoria (θ), que tem como função descrever a tecnologia com precisão e rigor matemático, sendo um nível superior de justificação – explicação – produção (Chevallard, 2020).

Nessa situação podemos apontar que o discurso teórico da tarefa se apoia em noções da geometria plana, como a relação entre ângulos na circunferência e servem para fundamentar as tecnologias e consequentemente as subtarefas adotadas para determinar um arco no qual todos os pontos enxergassem o segmento $\overline{AB}$ à 60° , sendo isso possível pela determinação do arco capaz e a relação do ângulo inscrito nesse arco.

Entendemos que o trabalho com articulação entre os blocos praxeológicos, no contexto das construções geométricas fortalece a compreensão das propriedades matemáticas envolvidas, evitando assim um ensino que foque apenas nos traçados.

Em nossa pesquisa, adotamos então a análise praxeológica como ferramenta fundamental para descrever a estrutura dos modelos dominantes presentes em materiais didáticos (como livros e apostilas) sobre construções de triângulos. Ressalta-se que o modelo praxeológico da TAD não permite analisar conceitos, técnicas ou problemas isoladamente, devido à natureza dinâmica das praxeologias e à inter-relação entre seus componentes (Farras *et al.*, 2013).

Um modelo praxeológico dominante (MPD) é construído a partir das praxeologias que mais ocorrem na instituição na qual se situa a investigação e “sua elaboração permite identificar os elementos do quarteto praxeológico e a relação desses com os sujeitos da instituição analisada” (Matos, 2020, p. 46).

Quanto à elaboração de um modelo praxeológicos de referência a partir dos elementos que são evidenciados no MPD, podemos destacar que possibilita explicitar o referencial praxeológico adotado, bem como confrontar modelos dominantes. No entanto, Farras (*et al.*, 2013) alerta que para a concepção do modelo de referência não se deve cair na ingenuidade de pensar que um modelo é uma cópia ou reprodução do sistema que modela, mas sim que é um acréscimo a esse sistema, uma construção artificial. Assim, enfatiza-se que a principal função do modelo não é a de “parecer-se” com o sistema que modela, mas sim a de fornecer conhecimentos sobre ele e fazê-lo da forma mais econômica e eficaz possível.

Para isso, em nossa pesquisa, o modelo praxeológico de referência, para além do esboço do MPD - esse apresentado por meio de dois estudos realizados pela primeira autora em sua tese de doutorado, perpassa pelo estudo teórico, estudos das técnicas e a resolução de construções de triângulos em ambiente de geometria dinâmica, em um processo de análise do ponto de vista tanto matemático quanto didático. Esse processo exige, então, idas e vindas entre os modelos em um processo de ajuste progressivo, gerado por questionamentos constantes da eficácia do modelo, que tem como objetivo responder tanto às questões iniciais quanto às que

surgem ao longo do processo de estudo (Farras, *et al*, 2013).

Estruturação do Modelo praxeológico de referência: *MPR_Triângulos*

Após realizar estudos sobre as construções de triângulos a partir das obras adotadas nas instituições Licenciatura em Expressão Gráfica e Licenciaturas em Matemática nos debruçamos na estruturação de um Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de construções de triângulos que contribua na formação de professores que ensinam geometria em sua abordagem gráfica.

Nessa seção, apresentamos as etapas metodológicas que orientaram a construção do referido modelo, desde a descrição de etapas que antecederam o MPR até a proposta de tipos de tarefas e suas articulações, visando o objetivo da pesquisa de articular os blocos praxeológicos no ensino de construção de triângulos.

Etapas metodológicas do MPR_Triângulos

Metodologicamente a estruturação do *MPR_Triângulos* se baseou em três estudos realizados durante o desenvolvimento da tese de doutorado da primeira autora.

A estruturação do modelo teve como objetivo articular os blocos praxeológicos $[T, \tau, \theta, \Theta]$ a partir das informações obtidas nos estudos prévios.

No Estudo 1 foram analisadas as tarefas de triângulos presentes na Apostila Construção de Polígonos (Costa, 1995) adotada em disciplinas da Licenciatura em Expressão Gráfica, já no Estudo 2, as tarefas analisadas foram aquelas presentes em obras adotadas por Licenciaturas em Matemática, sendo elas: Construções Geométricas (Wagner, 1993), Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas (Rezende e Queiroz, 2000), Desenho Geométrico (Carvalho, 1970) e Geometria Euclidiana Plana (Barbosa, 1995). Nos dois estudos a análise foi direcionada para a natureza das tarefas, diversidade de elementos do triângulo considerados, componentes praxeológicos e aportes e incompletudes das obras.

Além disso, o Estudo 3, que se situa na interface entre as tarefas propostas nas obras e objetivo da pesquisa de integrar o ambiente de geometria dinâmica, foi direcionado para o estudo das técnicas propostas pelos autores a partir da resolução no software GeoGebra. Dessa maneira, foram selecionadas 22 tarefas presentes nas obras com o objetivo de identificar as praxeologias mobilizadas nas resoluções e análise das técnicas propostas na obra empregadas com ferramentas do GeoGebra.

Destacamos que esses estudos, apresentados na íntegra na tese de doutorado, permitiu simultaneamente, investigar como o ensino dos triângulos está organizado nas obras analisadas e assim, identificar lacunas na articulação entre os blocos prático e teórico. Além disso, forneceram elementos que permitiram, de forma, estruturada, caracterizar as praxeologias vigentes nas obras, especificamente quanto às construções de triângulos. A partir dele foi possível identificar os elementos do quarteto praxeológico, bem como, as incompletudes e limitações, evidenciadas principalmente por meio da pouca variação da natureza dos tipos de tarefas em algumas obras, como exemplo Costa (1995).

A partir do quantitativo de tipos de tarefas em cada obra foi possível identificar aquelas em que a ênfase das tarefas está mais relacionada ao bloco saber-fazer, como Costa (1995), Carvalho (1970) e Wagner (1993) daquelas que focam em tarefas de validação com rigor matemático, associadas ao bloco saber, como Barbosa (1995). Na obra de Rezende e Queiroz (2001) há, no entanto, um equilíbrio entre a natureza das tarefas em relação ao bloco do saber e do saber fazer.

Diante dos dados obtidos por meio dos estudos que antecederam o MPR, destacamos como o modelo foi concebido, a partir das etapas anunciadas a seguir.

- 1ª etapa: Apontamentos acerca de escolhas didáticas pertinentes ao ensino das construções de triângulos no ambiente de geometria dinâmica;
- 2ª etapa: Descrição dos blocos praxeológicos por meio da descrição da natureza de tarefas previstas para o *MPR_Triângulos*;
- 3ª etapa: Apresentação dos tipos de tarefas incorporados no *MPR_Triângulos*.

Escolhas didáticas do MPR_Triângulos

A estruturação do *MPR_Triângulos* parte da análise de obras didáticas, consideradas como representantes institucionais, bem como de aspectos relacionados ao ensino das construções geométricas evidenciados na revisão bibliográfica da pesquisa. Nesse sentido, destacamos escolhas didáticas e elementos que surgem como fundamentais para a elaboração do modelo.

Um primeiro elemento é que o trabalho com as construções de triângulos, do ponto de vista da apropriação das suas propriedades, demanda a compreensão dos fundamentos teóricos da geometria euclidiana, uma vez que, o bloco prático-técnico é mais bem explorado, quando

acompanhado de suas justificativas.

Além disso, considerando a implementação das resoluções de construção de triângulos em um ambiente de geometria dinâmica, como o GeoGebra, se espera que haja a apropriação do software por professores e estudantes quanto as ferramentas, possibilidades e aspectos próprios de um ambiente de GD.

Nosso modelo visa que o ambiente de GD seja utilizado não apenas como uma ferramenta digital para traçados e técnicas similares as do ambiente de régua e compasso, mas como um espaço no qual se explore uma classe de triângulos que atendam às variáveis dadas. Busca-se que seja possível manipular diretamente ou a partir dos controles deslizantes os valores dos elementos dos triângulos, permitindo investigar as condições de existência de maneira dinâmica, bem como criar macro-ferramentas que tornem as técnicas mais econômicas e eficientes.

Nessa perspectiva, a geometria dinâmica, não deve ser vista apenas como um recurso, mas como uma parte constitutiva da praxeologia, na qual as técnicas são modificadas, enriquecendo inclusive a validação do bloco tecnológico-teórico.

Outro aspecto do modelo é promover uma articulação crítica dos dois blocos utilizando a GD para o estudo teórico, promovendo investigação de teoremas e propriedades que não são possíveis de maneira econômica estaticamente. Esta articulação se dá tanto pela natureza da tarefa proposta como pela maneira que ela será implementada no ambiente de geometria dinâmica. Além disso, essa articulação permite que as construções de triângulos não seja uma tarefa por si só, mas um meio pelo qual seja possível explorar diversos conceitos da geometria euclidiana, trigonometria, semelhança de triângulos, transformações geométricas, entre outros.

Os blocos praxeológicos no MPR_Triângulos

Tendo como base a análise das obras e os fundamentos da TAD expostos anteriormente, propõe-se, neste momento, uma discussão em torno dos blocos praxeológicos, ou seja, tipos de tarefas, técnica, tecnologias e teorias que compõe o Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de construção de triângulos.

Quanto aos tipos de tarefas, destacamentos que ao considerar a problemática em torno das construções geométricas, que por vezes têm seu ensino reduzido à prática dos traçados com menos ênfase nos aspectos teóricos (Zuin, 2001), seja por questões atreladas a formação docente ou por demandas por eficácia na produção do desenho que tendem a relegar a justificação dos processos construtivos a um plano secundário (Bellemain e Bellemain, 2024),

propomos que em nosso MPR sejam contempladas tarefas com ênfase tanto nos aspectos práticos, quanto teóricos.

A nossa compreensão quanto às tarefas atribuídas para o ensino das construções de triângulos é que estudar as construções de triângulos não é necessariamente aprender a “construir triângulos” graficamente, ou seja, realizar tarefas apenas do gênero construir. Para além de construir, em nosso modelo indicamos como essencial que sejam exploradas tarefas que demandem análise das construções, validação por meio da dinamicidade, bem como a exploração das propriedades e seus invariantes.

O *MPRTriângulos* propõe, então, um equilíbrio quanto à natureza das tarefas de construção de triângulos, sendo contempladas tanto aquelas em que a ênfase se dá sobre o processo construtivo, quanto aquelas em que o foco reside na análise, exploração e validação de construções já feitas.

No modelo denominamos a natureza destas tarefas como *Construção, Análise, Exploração e Validação*.

Quanto aos tipos de tarefas no *MPRTriângulos*, destacamos como essencial na escolha das tarefas:

1. Variedade de tipos de tarefas quanto ao gênero, natureza e aos elementos fornecidos;
2. Tarefas que envolvam a exploração de propriedades por meio do software de geometria dinâmica;
3. Validação das condições de existência por meio da dinamicidade;
4. Explorar técnicas mais econômicas e/ou novas técnicas a partir da escolha da ordem dos elementos na construção.

Ao propor tarefas de diferentes naturezas, o ensino de triângulos e de suas construções deixa de se limitar aos processos construtivos — os quais, vale destacar, já carregam em si diversas propriedades, axiomas e teoremas — e possibilita a docentes e discentes uma nova perspectiva para compreender toda a fundamentação matemática envolvida.

Quanto à variedade dos elementos, compreendemos a importância de incorporar ao ensino de construções de triângulos tarefas em que sejam explorados desde elementos mais comuns, como exemplo a determinação de um triângulo *ABC* conhecendo-se o comprimento de lados e ângulos, dados diretos que podem ser aplicados imediatamente na construção, até

dados que demandem relações mais complexas, como exemplo, tarefas que tratam da igualdade de área entre um círculo e um triângulo equilátero, sendo necessário considerar a adequação ao nível de ensino.

Do ponto de vista das tarefas de exploração e validação por meio da dinamicidade, destacamos que estas servem como articuladoras entre os blocos praxeológicos, favorecendo um estudo mais aprofundado dos triângulos.

No que se refere às técnicas para as construções no ambiente de geometria dinâmica, apoiamo-nos na compreensão de Acosta (2008) na qual destaca que em uma praxeologia estática no papel, deve-se ter em conta os inevitáveis erros na precisão do desenho, logo, não são considerados os pequenos desvios obtidos na construção face ao resultado esperado, mas numa praxeologia dinâmica é necessário distinguir duas situações: se o valor for ajustado, pequenos desvios não invalidam a construção (como exemplo, arredondamentos ao medir área); por outro lado, se a construção for exata (uso de ferramentas como pontos, círculos e interseções), qualquer desvio é uma invalidação da construção.

Essa distinção entre construção estática e dinâmica precisa ser evidenciada ao realizar as construções com as ferramentas do GeoGebra, favorecendo que elas sejam robustas e possam ser manipuladas para explorar e validar propriedades, proposições e condições de existência.

Além disso, as diferentes naturezas de tarefas exigem adaptações específicas nos processos construtivos no GeoGebra, ou seja, há uma variação de técnicas a serem exploradas. Para a construção básica de um triângulo equilátero, utiliza-se uma técnica direta: cria-se um segmento AB de comprimento fixo, traçam-se dois círculos com centros em A e outro em B com raio igual a AB , e marca-se a interseção C , seguindo rigidamente os passos fundamentados na Geometria Euclidiana. Já se houver a proposta de explorar a área desse mesmo triângulo por meio da manipulação de controles deslizantes ou da medida de um segmento de comprimento fixo, a técnica muda, pois para essa construção, será necessário vincular o triângulo a um controle deslizante, que pode ser associado aos comprimentos dos lados, à altura ou à própria área. Essa adaptação das técnicas de implementação dos dados do triângulo no software, de uma técnica mais “fechada” para uma técnica vinculada à dinamicidade, ocorre essencialmente pela natureza distinta de cada tarefa, uma vez que a primeira foca na representação de um objeto, enquanto a segunda, na investigação de um comportamento dos elementos do objeto.

Dessa maneira, o *MPR_Triângulos* configura-se não como um repertório de tarefas, mas como uma estrutura que visa intencionalmente valorizar a articulação entre as construções

geométricas e suas justificativas com a potencialidade do ambiente de GD.

Ao equilibrar sistematicamente os tipos de tarefas (Construir, Analisar, Explorar e Validar) e propor uma diversificação de elementos e técnicas empregados, se almeja com o modelo superar o ensino meramente procedimental e situa as construções geométricas como um campo fértil para o desenvolvimento do pensamento geométrico “mais completo”, ou seja, um pensamento geométrico no qual a articulação dos componentes da quádrupla praxeológica é fortalecida.

O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ no *MPR_Triângulos* constitui o conjunto de saberes que justificam, fundamentam e validam as técnicas a serem empregadas nas construções dos triângulos. Nesse contexto, no qual utilizamos o software GeoGebra como ambiente para validação visual, esse bloco fornece as explicações locais sobre porque determinadas técnicas funcionam, além de estabelecer as conexões conceituais entre a prática construtiva e os fundamentos teóricos da geometria euclidiana.

Almejamos com a integração desse bloco praxeológico no trabalho com as construções de triângulos que ele sirva como uma ponte epistemológica entre o saber fazer e o saber, a partir do qual os procedimentos construtivos sejam vistos como uma oportunidade para uma compreensão teórica mais aprofundada.

Um dos aspectos desse bloco é que a articulação entre $[T, t]$ e $[\theta, \Theta]$ seja caracterizada por uma relação dialética, uma vez que, cada técnica implementada no GeoGebra exige uma justificativa teórica correspondente, ou seja, o uso do ambiente “força” o trabalho com o bloco $[\theta, \Theta]$, pois as técnicas só serão efetivamente implantadas, definido pela robustez da construção, se “amarradas” as suas propriedades matemáticas. Ao mesmo tempo, a compreensão teórica possibilita a implementação de técnicas mais eficientes.

Ao considerar tipos de tarefas que demandam validação por meio da manipulação dos elementos, o GeoGebra facilita o ciclo de validação empírica e teórica.

O bloco tecnológico é nesse caso uma interface entre as justificativas locais e as teorias globais. Exemplo, a técnica de construção do circuncentro (τ) justifica-se pela propriedade das mediatrizes (θ), que por sua vez se insere na teoria dos lugares geométricos (Θ).

Entendemos que o bloco tecnológico-teórico no *MPR_Triângulos* não se constitui apenas como um conjunto de explicações teóricas, mas como um elemento necessário para tornar o estudo dos triângulos mais aprofundado e fundamentado. Ao articular as justificativas com as validações no GeoGebra, este bloco permite que estudantes e professores compreendam

as construções não como procedimentos construtivos, mas como a materialização de princípios matemáticos abstratos.

Esse tipo de trabalho com o bloco tecnológico no contexto da formação inicial de professores contribui para que sejam explicitados os conceitos relacionados a cada construção além do desenvolvimento da capacidade de justificação teórica. Vale aqui destacar que, como mencionado anteriormente, é fundamental considerar as condições e restrições que cada instituição apresenta para que se defina o nível de aprofundamento teórico pertinente às construções dos triângulos.

Natureza de tarefas para o MPR_Triângulos

Nesta seção, descrevemos e exemplificamos tipos de tarefas incorporadas no *MPR_Triângulos*. Destacamos que não é intenção do modelo esgotar todas as possibilidades de tipos de tarefas que possam ser exploradas nas construções de triângulos, mas propor praxeologias que atendam ao objetivo da pesquisa e que possam ser usadas como referência para articular os blocos $[T, \tau]$ e $[\theta, \Theta]$.

Inicialmente destacamos que foram consideradas diferentes naturezas de tarefas no sentido de enriquecer aquelas que foram identificadas nos modelos praxeológicos dominantes (Estudos 1 e 2), bem como a sugestão de outras tarefas que visam enriquecer a formação de professores quanto ao campo da geometria, em específico no estudo das construções de triângulos. A descrição da natureza das tarefas propostas é apresentada Quadro 2.

Quadro 2 -Natureza das tarefas propostas no *MPR_Triângulos*

T_C	Construir	Tarefas com ênfase na construção de triângulos a partir de elementos dados.
T_A	Analisar	Tarefas com foco na análise de condições de existência, soluções possíveis e propriedades dos triângulos e seus elementos.
T_E	Explorar	Tarefas que envolve a exploração de propriedades e invariantes de triângulos dados.
T_V	Validar	Tarefas que visam validar propriedades por meio da dinamicidade.

Fonte: Elaborada pela autora

Quanto a T_C , destacamos a importância de trabalhar com as construções dos triângulos, pois este tipo de tarefa é essencial para a compreensão de elementos, propriedades, axiomas e teoremas da geometria euclidiana plana, que são “materializados” por meio das construções de triângulos. Além disso, o estudo dos triângulos, assim como de outros objetos em sua abordagem gráfica, possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico, haja vista a necessidade de realizar uma ordem correta de traçados, verificar empiricamente as propriedades, manipular

diferentes elementos em torno da mesma figura.

Quadro 3 - Exemplo de tarefas T_C

MPR _{Triângulos} : [T_C]	T_{C_1} : Construir um $\triangle ABC$ conhecendo os lados a e b e a altura ha . Utilize os controles deslizantes e/ou segmentos com comprimento fixo para determinar os segmentos.
	T_{C_2} : Construir um $\triangle ABC$ conhecendo dois lados e uma mediana. Inicie a construção pelo dado que torne a construção mais econômica.
	T_{C_3} : Construir um $\triangle ABC$ dados: $a + b$, c e ha .
	T_{C_4} : Construa o triângulo $\triangle ABC$ de lados $a = 5\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$ e $c = 4\text{ cm}$ e posteriormente determine um triângulo isósceles $\triangle DEF$ com base igual a 5 cm equivalente a ele.

Fonte: Elaborada pela autora

Para as tarefas T_A , compreendemos que além de construir é essencial que os professores em formação consigam analisar os triângulos, suas condições de existência, propriedades, quantidade de soluções possíveis nas construções, entre outros aspectos além dos traçados.

Ainda que a análise de uma tarefa, como as de construção, já pressuponha uma análise dos elementos dados e de como aplicá-los no traçado, é evidente que há um enfoque maior no traçado e não necessariamente na exploração do bloco tecnológico-teórico. As tarefas do tipo “analisar” estimulam o raciocínio dedutivo e a capacidade de justificação matemática.

Neste sentido, a T_A pressupõe tarefas que o enfoque não seja na construção do triângulo em si, ainda que a construção possa estar presente na tarefa, mas nas técnicas que explore propriedades, condições de existência, soluções possíveis.

Quadro 4 - Exemplo de tarefas T_A

MPR _{Triângulos} : [T_A]	T_{A_1} : Para um $\triangle ABC$ de ângulo $\hat{A} = 30^\circ$, $a = 6$ e $c = 8$ a) Quantas soluções existem? Por quê? b) Qual é a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$?
	T_{A_2} : Se $\hat{A} = 120^\circ$, $a = 5$, $c = 3$ a) A construção é possível? b) Qual é a medida do lado b ($\overline{AC}$)? Ele pode ser determinado analiticamente antes da construção?
	T_{A_3} : Por que todo ponto sobre a mediatriz de $\overline{BC}$ gera automaticamente um triângulo isósceles ABC ?

Fonte: Elaborada pela autora

As tarefas T_E consideram principalmente o trabalho de exploração de propriedades e invariantes dos triângulos no ambiente de geometria dinâmica. Estas tarefas se caracterizam por investigações do comportamento geométrico dos objetos, descoberta de padrões por meio da manipulação direta e formulação de conjecturas a partir da observação empírica.

Quadro 5 - Exemplo de tarefas T_E

MPR _{Triângulos} : [T_E]	T_{E_1} : Dado o ΔABC com base BC fixa, movimente o vértice A e investigue: a) A soma das medidas dos ângulos permanece constante? E a área?
	T_{E_2} : A partir dos pontos notáveis marcados no ΔABC , arraste os vértices e investigue: a) Quais pontos permanecem alinhados? b) Em que triângulos eles coincidem?

Fonte: Elaborada pela autora

Diferente das tarefas de exploração, nas quais o foco é na descoberta de propriedades e observação de invariantes, as tarefas T_V , são aquelas nas quais busca-se confirmar propriedades conhecidas ou testar conjecturas.

As tarefas de validação, ao possibilitar aos estudantes testar propriedades como congruência de triângulos, condições de existência e invariância entre outros, direcionam para um estudo no qual são questionadas a robustez das construções, limitações das técnicas, possíveis erros, ao mesmo tempo em que exige a confrontação entre a construção e o conhecimento teórico. Sendo essa validação em um ambiente dinâmico, ela serve como uma ponte entre as técnicas de construção e o rigor matemático envolvido.

Quadro 6 - Exemplo de tarefas T_V

MPR _{Triângulos} : [T_V]	T_{V_1} : Observe o ΔABC , mova os controles deslizantes para testar quando $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$ falha e identifique quando as condições de desigualdade triangular não são satisfeitas.
	T_{V_2} : Dado o ΔABC , marque os ângulos opostos a cada lado e arraste um dos vértices para aumentar um lado. Verifique se o ângulo oposto a ele aumenta proporcionalmente.

Fonte: Elaborada pela autora

A natureza das tarefas propostas no Modelo Praxeológico de Referência (MPR_{Triângulos}) visam equilibrar, no trabalho com construções de triângulos, as dimensões do saber teórico e do saber-fazer, promovendo praxeologias completas que articulem os quatro blocos $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

Articulação entre naturezas de tarefas

Considerando o objetivo do MPR_{Triângulos}, entendemos que as construções de triângulos se enriquecem quando diferentes tipos de tarefas são articulados. Nesse sentido, a

praxeologia prevista no modelo visa uma articulação entre elas, sendo denotada como:
 $MPR_{Triângulos}: [T_C, T_A, T_E, T_V]$.

Quadro 7 -Exemplo de possibilidades de articulação entre natureza de tarefas no $MPR_{Triângulos}$

Agrupamento de tarefas	$MPR_{Triângulos}: [T_C, T_A, T_E, T_V]$
Comparação e Análise	$MPR_{Triângulos}: [T_C \rightleftharpoons T_A]$
Sequência	$MPR_{Triângulos}: [T_C \rightarrow T_E \rightarrow T_V]$
	$MPR_{Triângulos}: [T_A \rightarrow T_C \rightarrow T_E]$
	$MPR_{Triângulos}: [T_C \rightarrow T_V]$

Fonte: Elaborada pela autora

A combinação entre as diferentes naturezas de tarefas possibilita uma vasta quantidade de tarefas voltadas a um estudo mais completo das construções de triângulos, do ponto de vista da quádrupla praxeológica. Além disso, essa variedade permite atender a diferentes níveis de ensino dessas construções, considerando a importância de se compreender em que nível — no sentido da escala de co-determinação didática — o estudo dos triângulos está situado.

Nesse texto, optamos por apresentar 3 (três) tarefas elaboradas na perspectiva de articulação dos tipos de tarefas que foram estruturadas durante a tese.

A primeira tarefa propõe o agrupamento de tarefas T_C, T_A, T_E, T_V : *lados e Ângulos*.

Quadro 8 - $MPR_{Triângulos}: [T_C, T_A, T_E, T_V]$: Lados e ângulos

$MPR_{Triângulos}: [T_C, T_A, T_E, T_V]$	Enunciado: Dados os lados a e b e o ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC qualquer, realize a construção utilizando as ferramentas oferecidas no software GeoGebra. Considere utilizar para os comprimentos dos lados e do ângulo os controles deslizantes dados. Após realizar a construção, analise e explore buscando responder: - Explique por que a construção funciona. - Qual(is) a(s) condição de existência deste triângulo? - Quantas soluções são possíveis com estes dados? - Ao iniciar a construção pelo ângulo $\hat{A}$, as técnicas se tornam mais ou menos econômicas? - Dois triângulos construídos com os mesmos a, b e $\hat{A}$ são sempre congruentes? Sua construção garante essa unicidade? Demonstre usando seu modelo.
--	---

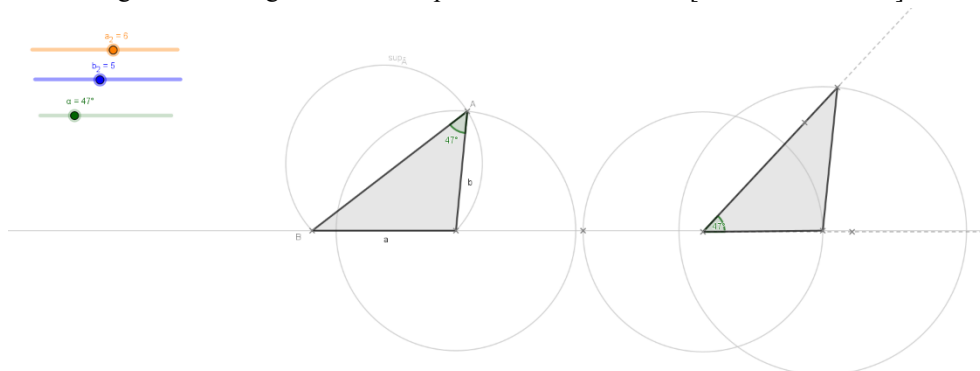
Fonte: Elaborado pela autora

Nesse exemplo, o estudo do triângulo, inicia-se pela sua construção dinâmica (T_C), uma vez que orienta o uso dos controles deslizantes para os comprimentos dos lados e do ângulo $\hat{A}$.

Esse direcionamento favorece que a construção possa ser manipulada, o que irá auxiliar na análise e exploração do triângulo mediada pelos questionamentos que se caracterizam como T_A e T_E (**a, b, c e d**). Já o item **e**, favorece o trabalho com tarefas de validação dinâmica, ao

propor o questionamento a partir da noção de congruência, a qual o estudante poderá além de validar a partir das propriedades, postulados e axiomas de congruência de triângulos, mas validar dinamicamente se a construção realizada atende as condições.

Figura 2 - Triângulos obtidos a partir dos elementos de $[TC, TA, TE, TV]$



Fonte: Elaborada pela autora

As diferentes naturezas de tarefa também podem se articular em pares, em uma proposta que favoreça a comparação e a análise entre a construção realizada e as propriedades, condições de existência e elementos do triângulo.

A proposta da tarefa $MPR_{Triângulos}: [T_A \rightleftharpoons T_E]$: *Altura do triângulo*, adaptada de Rezende e Queiroz (2001), tem como propósito levar os estudantes a analisarem a figura geométrica previamente construída, na qual já está representada graficamente uma propriedade associada à altura do triângulo isósceles.

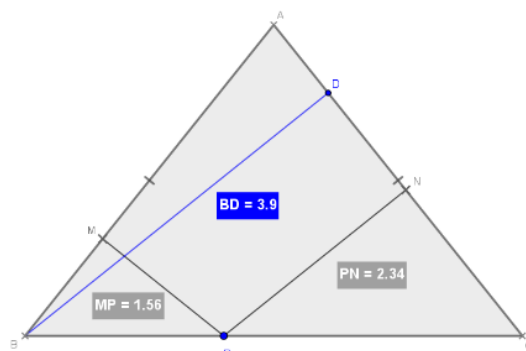
Quadro 9 - $MPR_{Triângulos}: [T_A \rightleftharpoons T_E]$: Altura do triângulo

$MPR_{Triângulos}: [T_A \rightleftharpoons T_E]$	Enunciado (Adaptado de Rezende e Queiroz, 2001, p.71): A partir do triângulo ABC dado observe que a soma dos comprimentos dos segmentos $(\overline{PM}$ e $\overline{PN})$, traçados desde um ponto P qualquer (móvel sob BC) na base de um triângulo isósceles até os outros dois lados e respectivamente perpendiculares a eles, é igual à altura correspondente a qualquer destes lados. Explore o <i>applet</i> buscando analisar: - O que acontece com $\overline{PM}$ quando P se aproxima de B? E de C? - O que acontece com $\overline{PN}$ quando P se aproxima de B? E de C? - A soma $\overline{PM} + \overline{PN}$ permanece constante quando P se move sobre BC?
--	--

Fonte: Elaborada pela autora

Nesse exemplo, a ideia é que seja possível analisar e explorar o *applet* buscando compreender a propriedade enunciada a partir da manipulação dos elementos, neste caso o ponto P sobre a base do triângulo.

Figura 3 - Triângulo a ser analisado em $T_A \rightleftharpoons T_E$



Fonte: Elaborado pela autora

Outra articulação possível é $MPR_{Triângulos}: [T_C \rightarrow T_E \rightarrow T_V]$, na qual o objetivo se dá pela associação da construção com a exploração e validação de propriedades envolvidas. No exemplo apresentado tratamos da equivalência de área entre triângulo e quadrado, ou seja, quadratura do triângulo.

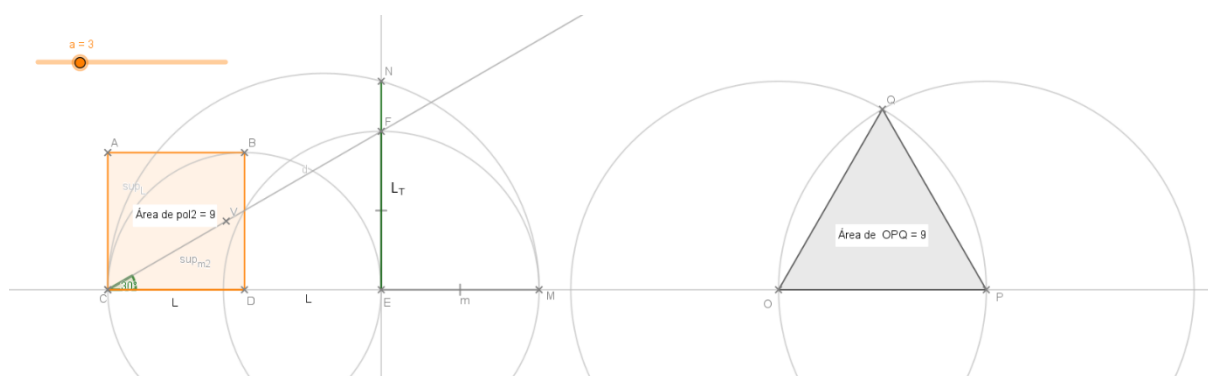
Quadro 10 - $MPR_{Triângulos}: [T_C \rightarrow T_E \rightarrow T_V]$

$MPR_{Triângulos}: [T_C \rightarrow T_E \rightarrow T_V]$	Enunciado: 1. Construa um quadrado $ABCD$ qualquer utilizando os controles deslizantes para o comprimento do lado (l). 2. Ative/ Exiba a área do quadrado cm^2 3. Construa o triângulo ABC de área equivalente ao quadrado $ABCD$. Considere encontrar o lado do triângulo a partir das fórmulas de áreas dos polígonos. 4. Ative/Exiba a área do triângulo cm^2 Vamos explorar a construção? 5. Arraste o controle deslizante l (base do quadrado) a) Observe como o triângulo se redimensiona automaticamente. b) Verifique se as áreas permanecem equivalentes. Responda: Por que o lado do triângulo muda quando a base do quadrado muda? 6. Valide no GeoGebra a proposição: "O lado l do quadrado de área equivalente a um triângulo é a média geométrica entre $(\frac{b}{2})$ e h", onde b é a base do triângulo e h sua altura".
---	---

Fonte: Elaborada pela autora

Esse tipo de tarefa leva a uma compreensão mais aprofundada da fórmula de área a partir da relação entre os elementos construtivos do triângulo, sendo assim uma maneira de realizar uma validação empírica, uma vez que a construção “prova” a fórmula.

Figura 4 - Igualdade de área entre quadrado e triângulo



Fonte: Elaborada pela autora

Entendemos essa tarefa como mais avançada, pois exige já o conhecimento dos traçados de equivalência, da fórmula da área do triângulo e do quadrado, e da própria definição de média geométrica – conceitos que devem ser articulados de forma estruturada para se chegar à expressão $l = \sqrt{(b/2)h}$. Além disso, a construção no GeoGebra demanda o uso de ferramentas de medição, cálculo e verificação dinâmica, o que pressupõe familiaridade com o ambiente e capacidade de planejamento de uma sequência construtiva robusta.

A exploração proposta no item 5, que envolve variar os valores do controle deslizante do lado do quadrado e observar a invariância da relação eleva o nível de abstração e exige que o estudante não apenas reproduza um procedimento, mas compreenda e valide uma propriedade geométrico-algébrica intrínseca.

Após o estudo e concepção das tarefas e suas possíveis articulações destacamos que a estruturação desse modelo propõe então uma reorganização em termos praxeológicos para o ensino das construções de triângulos. A partir das tarefas **Construir, Analisar, Explorar e Validar**, o estudo desse objeto geométrico não se limita à execução de traçados.

A articulação entre as tarefas realizadas com o suporte do GeoGebra, permite que o triângulo, uma figura plana básica, se transforme em um objeto de investigação dinâmico, no qual as condições de existências, lugares geométricos, pontos notáveis e propriedades invariantes sejam explorados e compreendidos.

Os exemplos aqui desenvolvidos para o *MPR_Triângulos*, têm como objetivo propor um modelo de referência para que outras tarefas sejam pensadas, considerando superar o ensino das construções geométricas pautado apenas nos procedimentos construtivos. Diversas outras articulações são possíveis ao considerar a instituição, as relações institucionais dos sujeitos quanto a articulação prático-teórico quanto ao estudo dos triângulos, do nível no qual as construções de triângulos ocupam na escala de co-determinação didática, da complexidade das tarefas entre outros fatores que precisam ser considerados.

Além disso, o *MPR_Triângulos*, posiciona o ambiente de geometria dinâmica como um componente constitutivo das praxeologias, uma vez que, para implementar cada técnica o estudante ou professor precisa refletir sobre o que justifica cada procedimento e isso reforça a integração entre os blocos praxeológicos.

Considerações Finais

O objetivo desse artigo foi apresentar a estruturação do *MPR_Triângulos* que visa a articulação entre os blocos praxeológicos em tarefas de construção de triângulos em um ambiente de Geometria Dinâmica (GD).

A concepção do *MPR_Triângulos* esteve sempre direcionada a discussão em torno do lugar das justificativas teóricas por trás das construções geométricas, no âmbito da geometria gráfica, e como dar luz às questões históricas relacionadas a uma tendência de ensino pautada em ensinar traçados como “receitas de bolo” desassociada dos seus fundamentos.

Destacamos, no entanto, que o *MPR_Triângulos* não se propõe a ser uma estrutura fixa para o ensino das construções de triângulos, mas uma referência, que partiu da problemática relacionada a uma tendência de ensino que dissocia os aspectos práticos e teóricos ao tratar das construções geométricas. O modelo, longe de ter conseguido dar conta de todas as naturezas de tarefas possíveis para explorar os triângulos, se estruturou em torno daquelas que ajudam a conduzir o ensino dos triângulos tendo o GeoGebra como um ambiente que permite construir e investigar esse polígono e suas propriedades.

A escolha pela natureza de tarefas Construir, Analisar, Explorar e Validar se caracteriza quase que como um ciclo investigativo para as construções de triângulos, e que permitem diversas adaptações praxeológicas no âmbito das instituições que o modelo venha a ser implementado. Entendemos que a estruturação entre essas tipologias garante um equilíbrio entre ação (construir), reflexão (analisar e validar) e investigação (explorar).

Para além de ser um modelo que enfoca as construções de triângulos, ele é um modelo que tem como propósito auxiliar as escolhas didáticas em torno do objeto matemático. Logo, ele não se configura como um repertório de tarefas, mas como uma estrutura que valoriza intencionalmente e didaticamente a articulação entre as construções geométricas e suas justificativas com a potencialidade do ambiente de GD.

Do ponto de vista da TAD, destacamos que ao adotar alguns dos seus pressupostos teóricos-metodológicos, como a quádrupla praxeológica e a noção de modelo praxeológico de referência, foi possível elaborar uma organização praxeológica robusta, que articula os saberes práticos e teóricos, por meio da natureza das tarefas propostas que exploram as potencialidades do software GeoGebra.

Já no que se refere ao papel da GD no modelo, destacamos que ao situar o software como um ambiente de validação das construções, foi possível propor tarefas de exploração (T_E) e validação pela dinamicidade (T_V), tarefas essas que seriam impraticáveis ou pouco econômicas no papel. Além disso, pudemos integrar técnicas de manipulação dinâmica (controles deslizantes, arrastar, rastro) que são inexistentes no ambiente lápis e papel.

Do ponto de vista do lugar das justificativas teóricas nas construções dos triângulos, podemos enfatizar que o uso do software como um ambiente de validação enriqueceu a tecnologia (θ) pois ao possibilitar explorar e validar dinamicamente e visualmente é possível “concretizar” o discurso teórico.

Após todas as etapas que envolveram a concepção do *MPR_Triângulos*, reconhecemos, a partir da visão enquanto pesquisadora e docente atuante na área da Geometria Gráfica, que assegurar, para cada tarefa, a necessária articulação entre técnica e discurso teórico, no contexto de sala de aula, considerando as condições e restrições relacionadas à carga horária, ao planejamento, à instituição à qual se está submetido e às lacunas na formação quanto aos próprios conhecimentos matemáticos, não é algo simples de ser realizado. Ao mesmo tempo, apontamos que vislumbramos a contribuição do *MPR_Triângulos* no sentido de oferecer referência e critérios para repensar as praxeologias dominantes, ainda que de maneira parcial em cada aula, ou seja, o modelo possibilita ao professor refletir “Esta tarefa promove apenas o bloco prático-técnico? Onde posso inserir uma questão de análise ou validação de uma propriedade dinamicamente?”.

Por fim, esperamos que o *MPR_Triângulos* sirva não como uma estrutura finalizada, mas como um ponto de partida para refletir e incentivar outros modos de fazer a geometria gráfica viver dentro das instituições.

REFERÊNCIAS

- ACOSTA, M. **Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés: implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie**. 2008. Tese (Doctoral) – Université Joseph Fourier – Grenoble I, Grenoble, 2008.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1995
- BELLEMAIN, Franck; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Futuro ancestral da geometria. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2024, Brasília. **Anais eletrônicos** [...]. Brasília: SBEM, 2024. p. 1-12. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/eventos/index.php/sipem/article/view/495>.
- CARVALHO, Benjamin de Araújo. **Desenho geométrico**. 3. ed. Rio de Janeiro: Imperial Novo Milênio, 1970. 332 p.
- CHEVALLARD, Y. Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic = Quelques questions sensibles dans l'utilisation et le développement de la théorie anthropologique du didactique. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 22, n. 4, p. 13-53, 2020.
- CHEVALLARD, Yves. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. In: UNIVERSITÉ D'ÉTÉ ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 1998, La Rochelle. **Anais** [...] Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand, 1998. p. 91-120.
- CHEVALLARD, Yves. **Steps towards a new epistemology in mathematics education**. In: CONGRESS OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION (CERME), 4., 2005, Barcelona. Proceedings [...] Barcelona: Fundemí IQS, 2006. p. 21-30. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Steps_towards_a_New_Epistemology.pdf.
- COSTA, M. **Construção de Polígonos**. 2ª ed. Recife, 1995.
- FARRAS, Berta Barquero; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática
 The three dimensions of the didactical problem of mathematical modeling. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 15, n. 1, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12757>.
- MATHERON, Y. Analyser les praxéologies: quelques exemples d'organisations mathématiques. **Petit x**, Grenoble, n. 54, p. 51-78, 2000.
- REZENDE, E.; QUEIROZ, M. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas: Editora da Unicamp; São Paulo: Zahar, 2000.
- WAGNER, E. **Construções geométricas**. 6. ed. São Paulo: SBM, 2007.
- ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil**. 201. 211 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.