

Corpo deslizando sobre uma superfície esférica convexa com atrito

A. J. Mania¹ e E. Mania²

¹ Universidade Estadual de Santa Cruz, DCET, 45662-000 Ilhéus, BA

² Universidade de S. Paulo, IFSC, 13560-970 São Carlos, SP

mania@uesc.br, edrian_mania@hotmail.com

Resumo

É proposto o estudo da dinâmica de um bloco que se move sobre uma superfície esférica, convexa, sob a ação dos atritos de Coulomb e viscoso. Pretende-se obter soluções analíticas e gráficas sob diversas situações de interesse.

Palavras-chave: forças de atrito, superfície esférica, energia.

Abstract

The study of the dynamic of a block is considered when it moves on a convex surface with both Coulomb's and fluid friction are present. It is intended to obtain analytical solutions and plotting for several situations of interest.

Keywords: friction forces, spherical surface, energy.

Introdução

Em cursos de mecânica é apresentado o problema de um corpo que está deslizando em uma superfície esférica sem atrito até o ponto onde ela decola e continua caindo em queda livre [1,2]. Há também o caso onde o corpo rola sem deslizamento. Um método eficiente que pode ser usado na resolução desse problema é o Multiplicadores de Lagrange. Estes são problemas bem conhecidos. Uma variação é introduzir o atrito cinético entre superfícies, definir uma velocidade adimensional, obter soluções analíticas e graficar situações relevantes [3]. Um caso mais completo é considerar quando ambas as forças de atrito estão presentes, como $F_a = -\mu N \hat{\theta}$ (força de Coulomb) e $F_v = -\beta v^2 \hat{\theta}$ (força de natureza viscosa). Esta última representa o efeito da presença atmosférica, por exemplo. Estamos considerando que a magnitude desta força viscosa seja proporcional ao quadrado da velocidade, em vez de linearmente proporcional, o que torna possível a combinação com o termo centrípeto. Soluções analíticas são possíveis e casos mais completos são então obtidos [4]. A constante de proporcionalidade β com dimensão [massa/comprimento] é um parâmetro intrínseco que depende da área de contato A do bloco com o meio que provoca a fricção, bem como do coeficiente de viscosidade κ onde o bloco está imerso. Esta pode ser escrita como $\beta = \kappa A$. Então, considerando um bloco que desliza sobre uma superfície esférica convexa, de raio R , desde um ponto de posição angular θ_0 relativa à linha vertical passando pelo seu centro, Fig.1, e usando a segunda Lei de Newton, temos as equações, $ma = mg \sin \theta - \mu N - \beta v^2$ e $N = mg \cos \theta - mv^2/K$ nas direções tangencial ($\hat{\theta}$) e normal ($\hat{r}$), respectivamente. K é o raio da trajetória descrita pelo centro de massa do bloco. Agora, escrevendo,

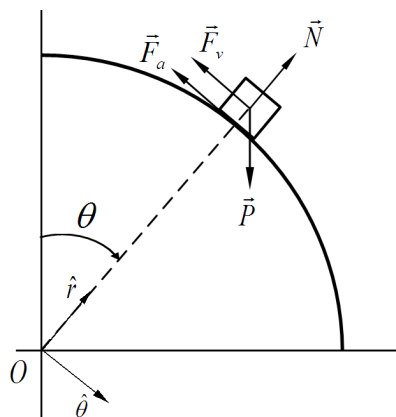


Figura 1 - Forças que atuam em um bloco de massa m deslizando sobre uma superfície esférica de raio R . O bloco tem altura $2h$, e seu centro de massa executa uma trajetória de raio $K=R+h$. No instante mostrado, ele está localizado em um ângulo θ com respeito ao eixo vertical.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{K} \frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{2K} \frac{dv^2}{d\theta}, \quad (1)$$

$$\frac{dV^2}{d\theta} - \gamma V^2 = 2(\sin\theta - \mu \cos\theta), \quad (2)$$

em que $V \equiv v/\sqrt{gK}$ é uma velocidade adimensional e $\gamma \equiv 2(\mu - \beta K/m)$ é o fator de atrito. Esta equação pode ser facilmente resolvida se multiplicarmos ambos os lados por $e^{-\gamma\theta}$. Sendo o lado esquerdo desta equação uma diferencial exata,

$$\frac{d(V^2 e^{-\gamma\theta})}{d\theta} = 2(\sin\theta - \mu \cos\theta) e^{-\gamma\theta}. \quad (3)$$

Agora, integrando com a ajuda de uma tabela de integrais, desde um ângulo inicial θ_0 até um ângulo final θ , rearranjando os termos, se obtém,

$$V^2 = V_0^2 e^{-\gamma(\theta - \theta_0)} - \frac{1}{1 + \gamma^2} \left\{ 2(1 - \mu\gamma) \cos\theta + (\mu + \gamma) \sin\theta - [(1 - \mu\gamma) \cos\theta_0 + (\mu + \gamma) \sin\theta_0] e^{-\gamma(\theta - \theta_0)} \right\}. \quad (4)$$

Em particular, daqui para a frente, vamos considerar a situação para $\theta_0 = 0$, i.e., o bloco parte do topo da superfície justamente como no caso convencional sem atrito. A solução final para a velocidade adimensional, torna-se,

$$V^2 = V_0^2 e^{2\left(\mu - \frac{K}{m}\beta\right)\theta} + \frac{\left[2 - 4\mu\left(\mu - \frac{K}{m}\beta\right)\right] \left[e^{2\left(\mu - \frac{K}{m}\beta\right)\theta} - \cos\theta \right] - \left[6\mu + 4\frac{K}{m}\beta\right] \sin\theta}{1 + 4\left(\mu - \frac{K}{m}\beta\right)^2}. \quad (5)$$

Se o caso sem a força viscosa é para ser considerado, então recuperamos a solução conhecida[3],

$$V^2 = V_0^2 e^{2\mu\theta} + \frac{(2 - 4\mu^2)(e^{2\mu\theta} - \cos\theta) - 6\mu \sin\theta}{1 + 4\mu^2}. \quad (6)$$

Na Eq. 5, há duas possibilidades para o movimento do bloco. Ou ele chega ao repouso sobre a superfície, ou ele perde o contato com a esfera e decola. É esperado que a primeira situação ocorra se houver um valor de θ entre 0° e 90° para a qual $V = 0$.

Na segunda situação o bloco decola da esfera se a componente da força normal for igual a zero. Esta condição é encontrada de $N = mg(\cos\theta - V^2)$, substituindo a expressão para V^2 , rearranjando os termos dentro da integral se obtém,

$$N = \frac{(3 - 2\mu\gamma + \gamma^2)\cos\theta + 2(\mu + \gamma)\sin\theta - 2(1 - \mu\gamma)e^{\gamma(\theta - \theta_0)}}{1 + \gamma^2} - V_0^2 e^{\gamma\theta} \quad (7)$$

A energia dissipada pelas forças de atrito quando o bloco transita por um comprimento $Kd\theta$ pode também ser explorada. Fazendo,

$$dW_f = -(F_a + F_v)Kd\theta = -(\mu N + \beta v^2)Kd\theta \quad (8)$$

A energia total W_f gasta pode ser encontrada por integrar esta última expressão, ou tomando o negativo da diferença entre as energias potencial e cinética. Isto vai resultar em,

$$W_f = mgK \left\{ 1 - \frac{(\mu + \gamma)(\gamma \cos\theta - \sin\theta) + (1 - \mu\gamma)e^{\gamma\theta}}{1 + \gamma^2} - \frac{V_0^2(e^{\gamma\theta} - 1)}{2} \right\} \quad (9)$$

Discussão

Para propósito de simplificação usaremos $K = 1.0m$ e $m = 1.0kg$ nesta seção. Nas Figs. (2-4) estão reproduzidas soluções numéricas em forma de gráficos de V versus θ , Eq. 5, em três situações alternadas com a presença ou não do atrito.

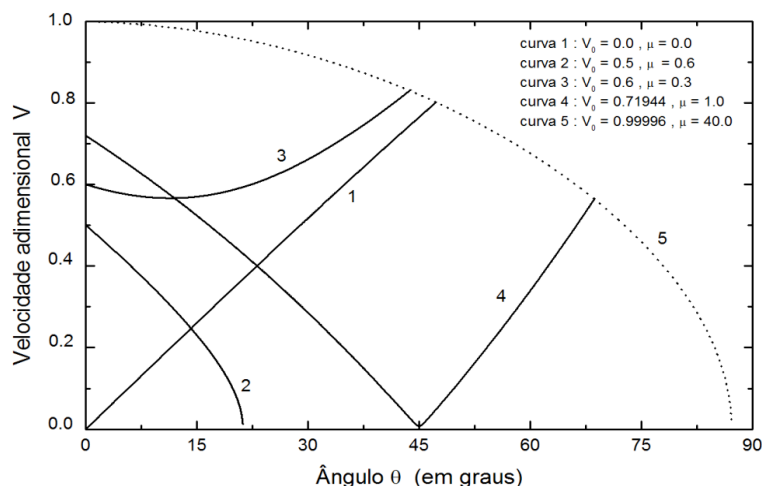


Figura 2 - Curvas comparativas em situações dinâmicas com a presença do atrito entre as superfícies, para a velocidade adimensional como uma função do ângulo θ . As curvas foram truncadas antes do bloco decolar, ou antes de atingir o ponto de repouso.

Os parâmetros μ , β e V_0 , com V_0 sendo a velocidade adimensional inicial no topo da esfera, estão exibidos também. Para referência, a curva padrão sem atrito é mostrada. A escolha dos valores para a

velocidade inicial e o coeficiente de atrito cinético são apropriados para exibir casos relevantes do movimento do bloco quando este desliza no trajeto esférico.

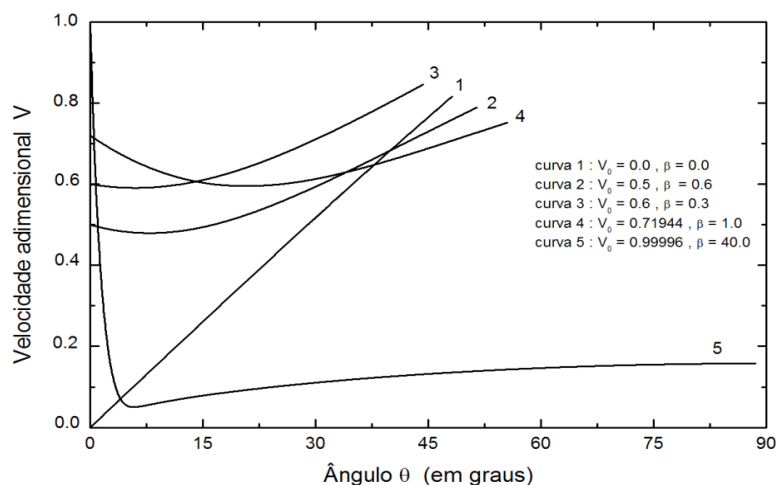


Figura 3 - Curvas comparativas em situações dinâmicas com a presença do atrito viscoso, para a velocidade adimensional como uma função do ângulo θ .

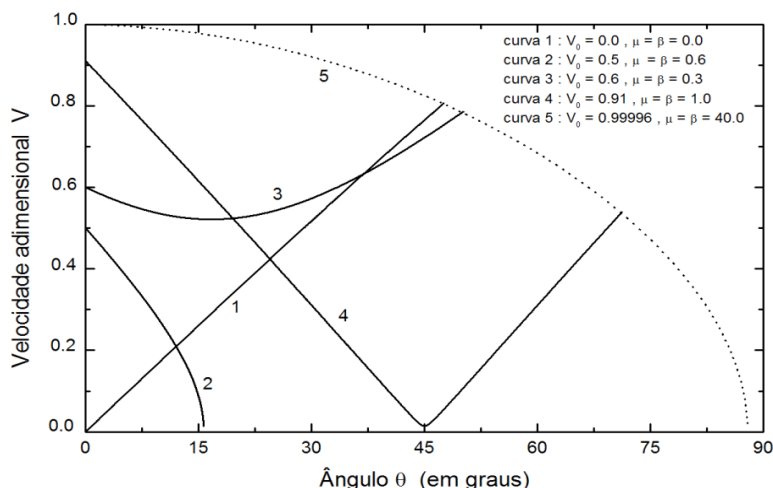


Figura 4 - Curvas comparativas da velocidade adimensional como uma função do ângulo θ , em situações dinâmicas com a presença de ambas as forças de atritos.

O movimento começa no topo com $V = V_0$ e prossegue até terminar contatando o eixo horizontal ou alcançar a velocidade de escape, dependendo daquilo que ocorrer primeiro. Nos casos nos quais a força de atrito de Coulomb está presente a velocidade inicial V_0 não pode ser zero, pois do contrário o atrito vai manter o bloco em equilíbrio estável no topo da superfície. Já a presença da força de atrito viscosa tem como função retardar o movimento, diminuindo a força centrípeta, e embora a situação dinâmica seja a mesma, as curvas diferem, inclusive no ponto de escape da superfície.

Também é interessante estudar situações nas quais o bloco mais se aproxima do equador de seu trajeto na superfície esférica quando sujeito a essas forças. Da Eq. 5, colocando $V = 0$ para $\theta = \pi/2$, e resolvendo para V_0^2 , fornece,

$$V_0^2 = \frac{2}{1 + \gamma^2} \left[- (1 - \mu \gamma) + (\mu + \gamma) e^{-\frac{\pi}{2} \gamma} \right] \quad (10)$$

e de volta, pondo $\theta = \pi/2 - \delta$, para obter,

$$V^2 = \frac{2}{1 + 4 \left(\mu - \frac{K}{m} \beta \right)^2} \left[\left(-1 + 2\mu^2 - 2\mu\beta \right) \sin \delta - \left(3\mu - 2\beta \right) \cos \delta \right] \quad (11)$$

com os casos limites $V^2 = \sin \delta - (3/2\mu) \cos \delta$ e $V^2 = 1/\beta \cos \delta$ quando $\beta = 0$ e $\mu = 0$, respectivamente. Estas soluções formam a região limitante para o movimento do bloco envolvido com a presença do atrito. Solução com os valores limitantes de $\mu = \beta = 40,0$ e uma velocidade adimensional de 0,99996 é mostrada em tracejado.

Nas Figs. (5-7) são mostradas soluções numéricas em forma de gráficos das energias dissipadas pelas forças de atrito, de acordo com a Eq. 9, e em situações dinâmicas concomitantes com os casos anteriores.

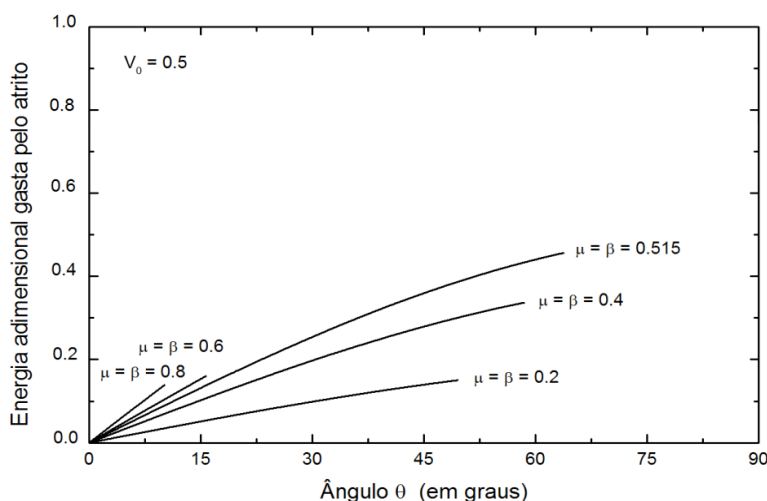


Figura 5 - Curvas comparativas em situações dinâmicas da energia dissipada pela presença da força de atrito entre superfícies.

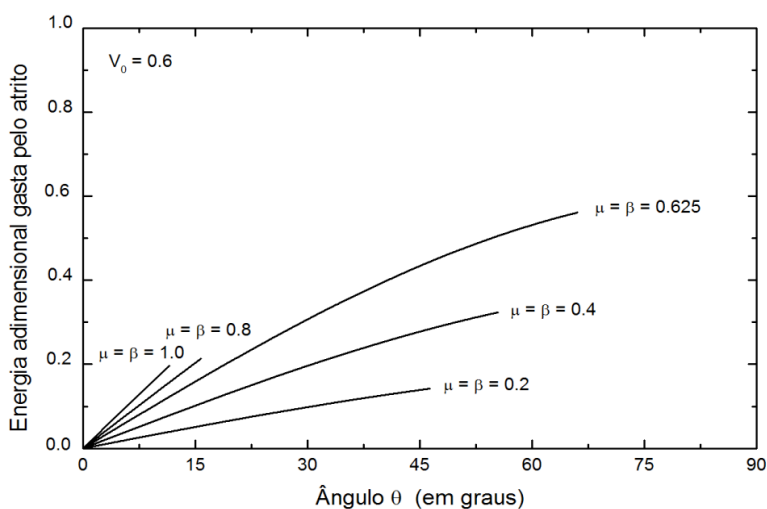


Figura 6 - Curvas comparativas em situações dinâmicas da energia dissipada pela presença da força de atrito viscosa.

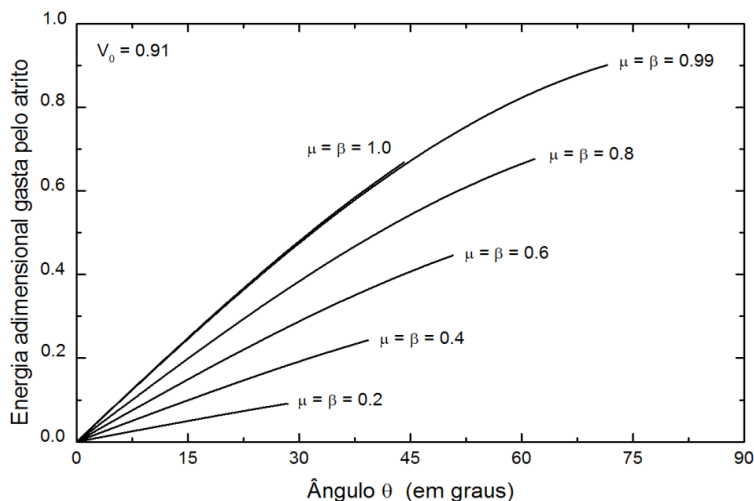


Figura 7 - Curvas comparativas em situações dinâmicas da energia dissipada pela presença de ambas as forças de atrito.

Finalizando, pode ser dito que o estudo da dinâmica do bloco que desliza sobre uma superfície de formato esférico, se traduz em um excelente método de treinamento discente no que tange a obter soluções numéricas e gráficas, sendo de utilidade nas disciplinas de curso básico e de física computacional.

Agradecimentos

Os autores são gratos à Universidade Estadual de Santa Cruz pelo apoio e incentivo durante a realização deste trabalho.

Referências

- [1] Uma excelente exposição está na página do Prof. Á. F. García, *Física con ordenador - Curso Interactivo de Física en Internet*. “<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/cupula/cupula.htm>”;
- [2] Página traduzida para o português pelo Prof. Everton G. de Santana, de *Física con ordenador – Curso Interactivo de Física en Internet*.
- [3] C. Mungan, *Sliding on the surface of a rough sphere*. The Physics Teacher, vol 41, September 2003.
- [4] A. J. Mania, A. W. Mol and C. S. S. Brandão, *Sliding Block on a Semicircular Track with Friction*. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 24, no. 3, setembro 2002.