
**Análise de algumas soluções topológicas do modelo de
Heisenberg na superfície de um paraboloide**
**Analysis of some topological solutions of the Heisenberg model
on the surface of a paraboloid**

Priscila da Silva Cunha Vilas-Boas¹, Vagson Luiz Carvalho Santos²

¹ Universidade do Estado da Bahia - Campus VII, Senhor do Bonfim - BA, Brasil

priscila_vilasboas@hotmail.com

² Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Baiano

Campus Senhor do Bonfim - BA, Brasil

vagson.santos@ufv.br

Resumo

Neste trabalho, investigamos o modelo de Heisenberg na superfície do paraboloide. Através das equações de Euler-Lagrange foram encontradas como soluções do modelo dois tipos de excitações: tipo-sóliton e tipo-vórtice. Na primeira, consideramos o modelo isotrópico ($\lambda = 0$) e encontramos, para o paraboloide infinito, sólitons topologicamente estáveis. No entanto, no caso da superfície com um “corte” ou do paraboloide finito, os sólitons fracionários aparecem. Considerando então o modelo anisotrópico ($\lambda = -1$), encontramos a solução tipo-vórtice, cuja energia é influenciada pela relação entre a altura e o raio máximo do paraboloide.

Palavras-chave: paraboloide, sólitons, vórtices.

Abstract

In this study, we investigate the Heisenberg model in the paraboloidal surface. Through the Euler-Lagrange equations, two types of excitation were found as solutions of the model: the soliton-like and the vortex-like. At the first one, we considered the isotropic model ($\lambda = 0$) and we found out, to the infinite paraboloid, topologically stable solitons. However, in the case of the surface with a hole in its center or the finite paraboloid, the fractional solitons appear. Then, considering the anisotropic model ($\lambda = -1$) we have found the vortex-like solution, whose energy is influenced by the relation between the high and the maximum radius of the paraboloid.

Keywords: paraboloid, solitons, vortices.

1 Introdução

Materiais magnéticos desempenham importante papel na tecnologia moderna. São aplicados em sensores de posição, fechaduras, balanças eletrônicas e motores elétricos, entre outros. No entanto, uma de suas aplicações mais importantes é a gravação magnética de dados.

Eles têm atraído a atenção de pesquisadores da Física da Matéria Condensada, cujas pesquisas buscam, por exemplo, compreender as origens microscópicas das propriedades magnéticas dos materiais, a descoberta de novos materiais e novas aplicações tecnológicas [1], de forma que a compreensão dos fenômenos relacionados ao magnetismo é de fundamental importância.

Assim, considerando a magnetização, temos que sua origem é dada no momento angular intrínseco dos elétrons (spin), cujas configurações de equilíbrio podem ser estudadas através do modelo de Heisenberg.

Esse modelo considera a interação de troca de spins eletrônicos entre os primeiros vizinhos dos sítios de uma rede de átomos, e a partir dele obtêm-se soluções, denominadas excitações topológicas. O comportamento de tais excitações é influenciado pela geometria do espaço físico, o que torna importante o seu estudo em diferentes geometrias [2].

Neste trabalho, estamos interessados em determinar a existência de excitações topológicas e calcular suas energias, fazendo para tanto um estudo teórico dos resultados obtidos através da aplicação do modelo de Heisenberg à superfície de um parabolóide.

O texto foi organizado da seguinte forma: na fundamentação teórica trazemos de forma resumida conceitos de magnetismo, defeitos topológicos e soluções, além do modelo de Heisenberg. Apresentamos então a superfície do parabolóide, e em seguida calculamos e definimos as soluções e suas energias. Por fim, apresentamos nossas conclusões.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Magnetismo

Um campo magnético $\mathbf{B}$ pode ser produzido de duas formas: usando partículas eletricamente carregadas em movimento, ou a partir de partículas elementares que possuem um campo magnético intrínseco, como os elétrons. Estes, por sua vez possuem um momento angular, conhecido como momento angular de spin, representado pelo símbolo $\mathbf{S}$ [3].

Quanto à intensidade do campo magnético $\mathbf{H}$, esta relaciona-se ao campo magnético $\mathbf{B}$ de forma proporcional:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (1)$$

onde μ_0 é a permeabilidade do vácuo [4].

Denominada momento de dipolo magnético por unidade de volume, a magnetização $\mathbf{M}$ é definida por:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_i m_i, \quad (2)$$

onde m_i é o momento magnético do átomo de índice i [5].

Considerando o ponto de vista microscópico, explica-se as propriedades magnéticas adquiridas por um corpo relacionando-as à existência de elétrons que se movem em torno do núcleo. Assim, se submetermos uma porção da matéria a um campo magnético externo, os elétrons que se movimentam em torno do núcleo passarão a sofrer a ação de uma força magnética causada pelo campo. No entanto, sem a presença de um campo magnético externo, e devido a agitação térmica, a orientação dos dipolos intrínsecos é aleatória. Dessa forma, ao aplicarmos um campo magnético externo, haverá uma orientação dos dipolos de forma a minimizar a energia de interação. Isso acontecerá se os momentos de spins estiverem paralelos ao campo magnético externo, sendo que tal orientação depende também da temperatura [6].

A suscetibilidade magnética por unidade de volume mede a resposta dos materiais à aplicação de um campo magnético externo através da quantidade escalar adimensional χ , definida através da relação [7]:

$$\chi = \frac{\mu_0 |\vec{M}|}{|\vec{B}|} \quad (3)$$

A depender de suas respostas, os materiais podem ser classificados como diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos, ferrimagnéticos e antiferromagnéticos. Neste trabalho porém, nosso interesse está nos materiais ferromagnéticos, e o resumo que segue foi feito a partir da referência [6].

O mecanismo responsável pelo aparecimento do ferromagnetismo são as chamadas interações de troca, existente nos elétrons do material. Essas fortes interações eletrostáticas de natureza quântica favorecem a configuração na qual os spins se alinham de forma que produzem um campo magnético não-nulo; isso acontece ainda que o campo magnético externo seja nulo. Tal configuração produz no material a formação de regiões denominadas *domínios magnéticos*, que contêm elevado número de spins eletrônicos orientados em uma determinada direção; o resultado é a existência de um momento magnético.

Assim, ainda que um pedaço de ferro não seja um ímã - dada a orientação aleatória dos momentos magnéticos, ele pode vir a sê-lo, e para tanto aplica-se um campo magnético externo. Nesse caso, os dipolos magnéticos intrínsecos dos elétrons ficarão sujeitos a um torque, que tende a orientá-los no mesmo sentido e direção do campo.

Os materiais ferromagnéticos são classificados como doces e duros. Os materiais doces ganham ou perdem magnetização com a aplicação ou a retirada do campo externo. Já nos materiais duros, a magnetização residual é mantida, mesmo quando o campo externo é nulo, sendo utilizados em aplicações que necessitam de campos magnéticos permanentes. Como exemplo, citamos o armazenamento magnético de informações, em discos rígidos e flexíveis de computadores.

2.2 Defeitos Topológicos

Tanto no estudo da teoria de campos, quanto no estudo de defeitos na física de matéria condensada, têm sido utilizados a linguagem, os métodos e os teoremas de topologia algébrica, como também a teoria da homotopia, pois fornecem uma linguagem natural para a descrição e classificação de defeitos.

Um meio ordenado é definido como uma região do espaço descrita por uma função $f(r)$, que associa a cada ponto da região um parâmetro de ordem, sendo que os possíveis valores desse parâmetro constituem um espaço conhecido como espaço interno, ou parâmetro de espaço ordenado. Tal meio é dito uniforme se a função f é constante, ou seja, se o valor do parâmetro de ordem é sempre o mesmo. O interesse, no entanto, está no estudo dos defeitos topológicos, que são regiões de dimensão menor que a do meio ordenado, pertencentes a meios *não-uniformes*. Nestes, o parâmetro de ordem varia continuamente no espaço exceto, às vezes, em pontos isolados, linhas ou superfícies [8].

Considerando agora conceitos de Homotopia (extraídos das referências [7] e [2]), tomamos um sistema ordenado descrito por um campo $\vec{f}(\vec{x})$ definido sobre os pontos $\vec{x}$ de algum domínio espacial X . Chamando de F o contorno dos possíveis valores de $\vec{f}$, então $F = S^1$ é um círculo se $\vec{f}$ é um vetor de duas componentes e comprimento fixo; $F = S^2$ se $\vec{f}$ é um vetor de três componentes e comprimento fixo, e assim por diante.

Caminhos fechados podem ser definidos a partir um sistema X unidimensional, parametrizado por $0 \leq x \leq 2\pi$, e um campo $\vec{f}(\vec{x})$ qualquer, de maneira que a cada ponto $x_i \in X$ há um ponto imagem $\vec{f}(x_i) \in F$. Uma vez que x varia de 0 a 2π , o ponto imagem traça uma curva em F partindo de $\vec{f}(0)$ e terminando em $\vec{f}(2\pi)$. No entanto, serão considerados apenas os campos que obedecem à condição $\vec{f}(0) = \vec{f}(2\pi) = \vec{f}_0$.

A partir do estudo do comportamento desses caminhos fechados, também chamados de *loops*, é possível classificá-los dentro das chamadas classes de homotopia. Assim, temos que quaisquer loops pertencentes à mesma classe podem ser deformados um no outro, sendo que loops pertencentes a diferentes classes não o podem. Como exemplo, podemos citar que um triângulo ou um quadrado podem ser deformados continuamente para se obter um círculo; pertencem, portanto, à mesma classe e seus membros são ditos homotópicos um ao outro.

Ainda acerca de caminhos fechados, é possível classificar as superfícies como simplesmente conexas e não-simplesmente conexas. Na primeira classificação, qualquer caminho fechado pode ser continuamente reduzido a um ponto; na segunda, porém, nem todas as curvas fechadas o podem.

Se considerarmos, por exemplo, o espaço euclidiano bidimensional (E^2), temos que qualquer *loop* nessa superfície pode ser deformado em um outro através de deformações contínuas, pois a superfície é simplesmente conexa; no entanto, se for feito “corte” no plano, ou seja, se um determinado ponto for excluído, teremos então uma superfície não-simplesmente conexa.

Assim, considerando um ponto excluído, então um *loop* fechado em torno dele não será um *loop* puntiforme, sendo que tais *loops* que o circulam podem ser classificados através de um inteiro Q , cuja magnitude e sinal especificam o número de vezes e o sentido no qual o ponto é envolvido.

O conjunto $\{\bar{f}^0, \bar{f}^1, \bar{f}^2, \dots\}$, onde $\bar{f}^Q$ representa todos os *loops* que circulam o ponto excluído Q vezes, é chamado de “grupo fundamental”, ou “primeiro grupo de homotopia” de F , sendo denotado por $\pi_1(F)$. O subscrito 1 indica que X adquire a forma de uma superfície fechada unidimensional, isto é, um *loop* que é topologicamente equivalente a um círculo, S^1 . Se X é um região bidimensional do espaço, e todos os pontos do contorno são mapeados em um ponto $x_0 \in X$, então X assumirá a forma de uma superfície fechada bi-dimensional, topologicamente equivalente a uma superfície esférica, S^2 ; nesse caso, o grupo é $\pi_2(F)$.

2.3 Soluções

Neste trabalho, estudamos as soluções tipo-sóliton e tipo-vórtice, que são soluções especiais de equações não-lineares.

A teoria de campos clássica não-linear possui soluções comumente conhecidas como sólitons, que representam configurações estáveis, com energia bem definida e sem singularidades. Por serem soluções de equações de equações não-lineares, o princípio da superposição não é obedecido. Dessa forma, quando se encontram, assintoticamente, ao se separarem, eles voltam à forma anterior [9].

Por ser um objeto topológico, sua estabilidade permite que exista uma lei de conservação, de forma que há uma quantidade Q que é igual a um número inteiro e se conserva. Tal quantidade é associada a uma carga topológica, não sendo possível a deformação de um sólito com carga igual a 1 ao estado fundamental [2]. No caso do sólito, o mapeamento da superfície deve envolver um esfera de spins.

Vórtices, por sua vez, são excitações topológicas encontradas na busca por soluções se considerados o modelo XY, como também o modelo do rotor planar. A diferença entre os modelos está ligada aos vínculos do espaço interno de cada um: no caso do rotor planar, tem-se o vínculo $S^2 = S_x^2 + S_y^2 = 1 \Rightarrow S_z = 0$; já para o modelo XY o vínculo é $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1$, sendo que apenas S_x e S_y aparecem na Hamiltoniana, por causa da anisotropia [12].

Eles podem ser vistos como um conjunto de spins em torno de um circuito fechado em volta do núcleo, ou seja, em torno do centro ou caroço do vórtice. O núcleo, por sua vez, é uma obstrução topológica, o que torna impossível mudar, topologicamente, a configuração dos spins de forma a estarem perfeitamente alinhados a uma distância arbitrária dele [7]. Vórtices, particularmente os magnéticos, são caracterizados por terem a carga topológica associada ao grupo fundamental $\pi_1(F)$, de forma que adquirem carga pelo mapeamento de um círculo de spins na superfície magnética em questão.

Excitações tipo-vórtice associadas ao modelo de Heisenberg foram estudadas, por exemplo, em geometrias como a esfera [10] e a fita de Möbius [7]; já as excitações tipo-sóliton foram estudadas no toro [2], no cone [11] e na pseudo-esfera [12], entre outras.

2.4 O modelo de Heisenberg

O modelo de Heisenberg é usado no caso de problemas de sistemas magnéticos de baixas dimensões (1D, 2D). Ele descreve a configuração de spins em uma rede e calcula sua energia considerando a interação de troca entre os spins.

Seu Hamiltoniano, em uma aproximação contínua das variáveis espaciais e de spin, válida para grandes comprimentos de onda e temperatura suficientemente baixa, é dado por:

$$H = J \int \int \sum_{i,j=1}^2 \sum_{a,b=1}^3 g^{ij} h_{ab} (1 + \delta_{a3} \lambda) \left(\frac{\partial S^a}{\partial \eta_i} \right) \left(\frac{\partial S^b}{\partial \eta_j} \right) \sqrt{|g|} d\eta_1 d\eta_2 \quad (4)$$

Aqui, J é o parâmetro de acoplamento entre spins vizinhos, dado pela diferença entre as energias do estado singleto e do estado tripleto, onde os spins são paralelos (estado ferromagnético) e antiparalelos (estado antiferromagnético) entre si, respectivamente. Além disso, se $J > 0$, a Hamiltoniana descreve um sistema ferromagnético; se $J < 0$, descreverá um sistema antiferromagnético.

Aqui, a métrica é definida por [13]:

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad (5)$$

Quanto a g^{ij} , são os elementos contravariantes da métrica, que podem ser definidos a partir dos elementos da métrica covariante através da relação:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij} \quad (6)$$

na qual δ_{ij} é o delta de Kronecker, onde $\delta_{ij} = 1$, se $i=j$, e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

Já os elementos da métrica do espaço interno (spins) são dados por h_{ab} ; $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\det[g_{ij}]|}$; η_1 e η_2 são as coordenadas da superfície.

O parâmetro λ , por sua vez, representa a anisotropia de interação entre os spins de forma que, para $\lambda = 0$, tem-se o caso isotrópico; o caso anisotrópico, por sua vez, é dado por $\lambda = -1$.

No caso do campo vetorial de spins clássicos, a parametrização foi feita em termos dos campos Θ e Φ , e avaliado numa esfera unitária. Desse modo, obtêm-se $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z) \equiv (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$, sendo $\Theta = \Theta(\eta_1, \eta_2)$ e $\Phi = \Phi(\eta_1, \eta_2)$.

3 A superfície do parabolóide

A superfície em estudo é o parabolóide, uma especial superfície quádrlica. São dois os tipos de parabolóide: o elíptico, que tem a forma de um copo oval, e o hiperbólico, que tem forma de sela.

O parabolóide elíptico pode ser representado pela equação:

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} = z \quad (7)$$

Neste trabalho, estamos interessados no parabolóide elíptico de revolução, obtido através da rotação de uma parábola ao redor de seu eixo; para obtê-lo, faz-se $R_1 = R_2 \equiv R$. Em um sistema de coordenadas cilíndricas dado por $(\rho, \varphi, z(\rho))$, onde ρ é o raio da superfície, φ o ângulo azimutal e z a altura da superfície, uma de suas possíveis equações paramétricas é dada por:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= \frac{a}{R^2} \rho^2 \end{aligned} \quad (8)$$

onde a é a altura do parabolóide, e R é o raio máximo.

Tomando $\kappa = 2a/R^2$, as métricas covariante e contravariante são dadas, respectivamente, por:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 + \kappa^2 \rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \kappa^2 \rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

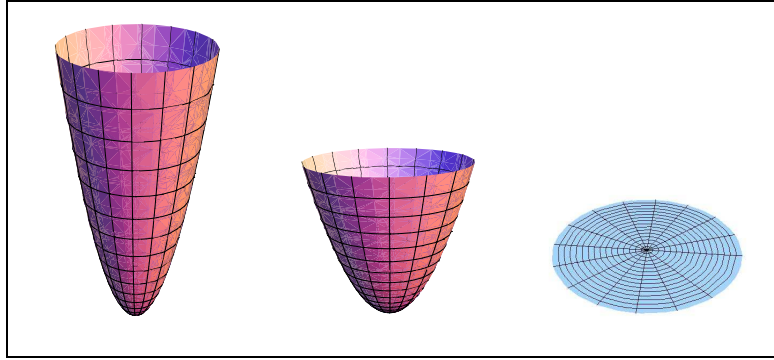


Figura 1: Representação de parabolóides elípticos de revolução com $\rho \in [0, 19]$ e diferentes alturas. Na primeira figura à esquerda, $\kappa = 0, 2$; na segunda $\kappa = 0, 1$. Ao tomar $\kappa = 0$, o parabolóide é reduzido ao plano.

3.1 Modelo de Heisenberg e soluções topológicas no parabolóide

Considerando o modelo ferromagnético, onde $J > 0$, e utilizando a representação do vetor de spin $\vec{S} = (\sin \Theta \cos \Phi, \sin \Theta \sin \Phi, \cos \Theta)$ obtemos a seguinte Hamiltoniana para nosso modelo:

$$\begin{aligned} H &= J \int \int \left(\frac{\rho^2}{1 + \kappa^2 \rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\rho \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\rho \Phi)^2] \\ &\quad + \left(\frac{1 + \kappa^2 \rho^2}{\rho^2} \right)^{\frac{1}{2}} [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\varphi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\varphi \Phi)^2] d\rho d\varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

onde $\partial_\rho \equiv \frac{\partial}{\partial \rho}$ e $\partial_\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Determinamos ainda um parâmetro associado à superfície:

$$\zeta_{par} = \sqrt{1 + \kappa^2 \rho^2} - \ln \left(\frac{2(1 + \sqrt{1 + \kappa^2 \rho^2})}{\rho} \right) \quad (12)$$

Substituindo ζ na equação (11), a Hamiltoniana fica assim reescrita:

$$H = J \int \int \{ [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\zeta \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\zeta \Phi)^2] + [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\varphi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\varphi \Phi)^2] \} d\zeta d\varphi \quad (13)$$

As equações de movimento acopladas para os campos $\Theta(\zeta, \varphi)$ e $\Phi(\zeta, \varphi)$ podem ser calculadas via equações de Euler-Lagrange para os campos. Aqui, está definida através da forma utilizada por [2], onde:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} = 0, \quad (14)$$

Temos então as equações de movimento para os campos Θ e Φ , respectivamente:

$$\frac{\partial h}{\partial \Theta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial h}{\partial (\partial_\zeta \Theta)} \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial h}{\partial (\partial_\varphi \Theta)} \right] = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\partial h}{\partial (\partial_\zeta \Phi)} \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial h}{\partial (\partial_\varphi \Phi)} \right] = 0 \quad (16)$$

Uma vez que buscamos soluções estáticas, a densidade hamiltoniana assume o papel desempenhado por L em (14). Em nosso caso, ela é dada por:

$$h = [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\zeta \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\zeta \Phi)^2] + [(1 + \lambda \sin^2 \Theta)(\partial_\varphi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta(\partial_\varphi \Phi)^2] d\zeta d\varphi \quad (17)$$

As equações (14) e (17) nos levam à equação de movimento acopladas para os campos $\Theta(\zeta, \varphi)$ e $\Phi(\zeta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \sin \Theta \cos \Theta \{ -\lambda [(\partial_\zeta \Theta)^2 + (\partial_\varphi \Theta)^2] + (\partial_\zeta \Phi)^2 + (\partial_\varphi \Phi)^2 \} \\ = (1 + \lambda \sin^2 \Theta) [(\partial_\zeta^2 \Theta) + (\partial_\varphi^2 \Theta)] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sin 2\Theta [(\partial_\zeta \Phi)(\partial_\zeta \Theta) + (\partial_\varphi \Phi)(\partial_\varphi \Theta)] \\ + (\sin^2 \Theta) [(\partial_\zeta^2 \Phi) + (\partial_\varphi^2 \Phi)] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Tais equações diferenciais acopladas são não-lineares, de forma que soluções gerais somente podem ser obtidas desde que sejam impostas algumas condições, o que nos leva às soluções especiais.

3.2 Soluções tipo-sóliton

Para soluções tipo-sóliton, consideramos o modelo isotrópico, onde $\lambda = 0$, e assumimos a simetria cilíndrica, onde $\Theta(\zeta, \varphi) = \Theta(\zeta)$ e $\Phi(\zeta, \varphi) = \Phi(\varphi)$. Dessa forma, obtemos da equação (13) a seguinte Hamiltoniana:

$$H = J \int_0^{2\pi} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} [(\partial_\zeta \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\varphi \Phi)^2] d\zeta d\varphi \quad (20)$$

Enquanto as equações acopladas (18) e (19) tomam a seguinte forma:

$$\sin \Theta \cos \Theta (\partial_\varphi \Phi)^2 = (\partial_\zeta^2 \Theta) \quad (21)$$

$$\sin^2 \Theta (\partial_\varphi^2 \Phi) = 0 \quad (22)$$

Se fizermos $\Theta = n\pi$, onde n é um inteiro, chegamos a uma solução para as equações. Porém, por representar o estado fundamental do modelo utilizado, não nos é interessante, tendo em vista o objetivo de determinar a energia da excitação.

A partir da equação (22), fizemos $(\partial_\varphi^2 \Phi) = 0$, assumimos $(\partial_\varphi \Phi) = 1$, e fizemos a devida substituição na equação (21), obtendo a equação de sine-Gordon:

$$\sin \Theta \cos \Theta = (\partial_\zeta^2 \Theta), \quad (23)$$

A equação (23) tem como solução mais simples [12]:

$$\Theta(\zeta) = 2 \arctan(e^\zeta) \quad (24)$$

Observamos então que, tomando $\rho \rightarrow 0$, $\zeta_{par} \rightarrow -\infty$ e $\Theta \rightarrow 0$; já para $\rho \rightarrow \infty$, $\zeta_{par} \rightarrow \infty$ e $\Theta \rightarrow \pi$. Assim, no caso do paraboloide infinito, temos que a equação (24) representa um π -sóliton. Além disso, como a esfera de spins é completamente mapeada, ele tem carga topológica igual a 1, pertencendo assim à primeira classe do segundo grupo de homotopia, e por isso tem estabilidade topológica.

A energia do sóliton é calculada substituindo a equação (24) em (20). Fazendo a integração, temos:

$$E_S = -\frac{8\pi J}{e^{2\zeta} + 1} \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (25)$$

Considerando o intervalo $\rho \in [0, \infty)$, a equação (25) nos dá $E_S = 8\pi J$. No entanto, observa-se que o modelo falha na origem, fazendo-se necessário um “corte” no paraboloide, de forma que a esfera de spins não será completamente mapeada; neste caso, a carga topológica é fracionária, motivo pelo qual o sóliton é instável.

Concluimos então que o paraboloide punturado, bem como o paraboloide finito (onde $\rho \in [0, r]$, sendo r finito), não suportam sólitons estáveis, fazendo com que a configuração de spins decaia para o estado fundamental.

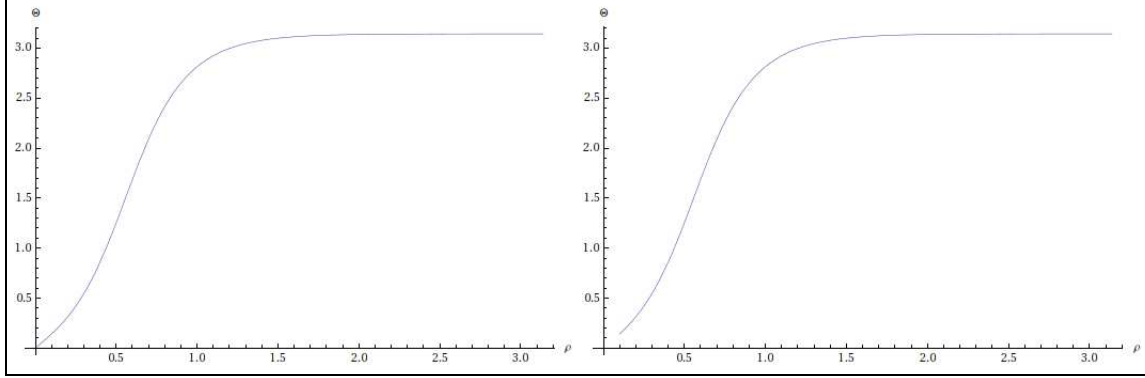


Figura 2: Comportamento de Θ em função de ρ , com $\kappa = 3$. Na figura à esquerda, tem-se um π -sóliton; à direita, um sóliton fracionário, dada a inserção de um “corte”.

3.3 Soluções tipo-vórtice

Considerando agora um modelo com anisotropia, sendo $\lambda = -1$, temos o modelo XY, que é frequentemente considerado como a forma em que os spins estão paralelos à superfície; fazendo $\Theta = \pi/2$, tem-se o regime do rotor planar, que garante que o eixo Z da esfera de spin (espaço interno) esteja sempre perpendicular à superfície.

Assim, sendo $\lambda = -1$, $\Theta = \pi/2$ e considerando simetria cilíndrica, onde $\Theta(\zeta, \varphi) = \Theta(\zeta)$ e $\Phi(\zeta, \varphi) = \Phi(\varphi)$, temos uma solução tipo-vórtice. A equação (13) toma então a seguinte forma:

$$H = J \int_0^{2\pi} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (\partial_\varphi \Phi)^2 d\zeta d\varphi \quad (26)$$

As equações de movimento, por sua vez, são reduzidas a:

$$\sin^2 \Theta (\partial_\varphi^2 \Phi) = 0 \quad (27)$$

Nessa equação, fazemos $(\partial_\varphi^2 \Phi) = 0$ e assumimos $(\partial_\varphi \Phi) = 1$, o que nos leva à seguinte solução:

$$\Phi(\phi) = Q\phi + \phi_0, \quad (28)$$

onde Q é a carga do vórtice e ϕ_0 é uma constante de integração.

Para calcular a energia do vórtice, foi feita a substituição da equação (28) na (26), cujo resultado é:

$$E_v = 2\pi J Q^2 \zeta \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} \quad (29)$$

Assumimos então a carga topológica do vórtice como $Q = 1$, pois assim ele tem tanto estabilidade topológica quanto física. Dessa forma, distorcê-lo continuamente com objetivo de trazê-lo para o estado fundamental demanda quantidade considerável de energia, o que não acontece quando a carga $Q > 1$, pois assim ele não adquire estabilidade física facilmente.

A partir dessas considerações, temos que a equação (29) toma a seguinte forma:

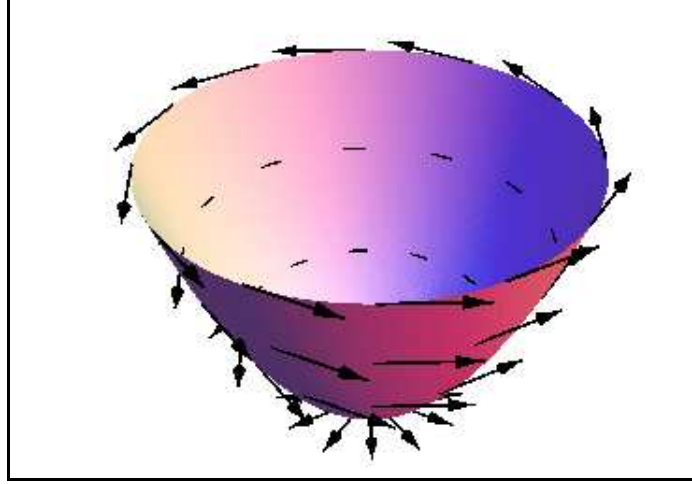


Figura 3: Comportamento do campo de spins clássicos na superfície do parabolóide, para o caso em que $\lambda = -1$ e $\Theta = \frac{\pi}{2}$. O vórtice tem carga $Q=1$.

$$E_v = 2\pi J \zeta \Big|_0^R \quad (30)$$

No entanto, o modelo de Heisenberg aqui utilizado falha, motivo pelo qual foi inserido um “corte” de tamanho l no centro do parabolóide, de forma que a energia do vórtice pode então ser determinada:

$$E_{vpar} = E_c + 2\pi J \left[\eta + \ln \left(\frac{R(1 + \sqrt{1 + \kappa^2 l^2})}{l(1 + \sqrt{1 + \kappa^2 R^2})} \right) \right] \quad (31)$$

Nesta equação, E_c é a energia do núcleo do vórtice (associada à destruição do parâmetro de ordem no caroço do defeito) e $\eta = \sqrt{1 + \kappa^2 R^2} - \sqrt{1 + \kappa^2 l^2}$.

4 Conclusões e perspectivas

Estudamos o modelo de Heisenberg para spins clássicos na superfície do parabolóide e encontramos, através das equações de Euler-Lagrange, excitações tipo-sóliton e tipo-vórtice como solução.

No caso dos sólitons, vimos que sua estabilidade é válida apenas no caso do parabolóide infinito, onde obtivemos como solução um π -sóliton com carga topológica $Q = 1$. Já para o parabolóide ponturado ou o parabolóide finito, encontramos sólitons instáveis. A razão da instabilidade é a carga fracionária, uma vez que a esfera de spins não foi completamente mapeada.

Quanto à solução tipo-vórtice, vimos que foi necessária a inserção de um “corte” para que sua energia pudesse ser calculada, sendo que esta é influenciada pela relação entre a altura e o raio máximo do parabolóide.

A partir desses resultados pudemos comparar, por exemplo, nossa solução tipo-sóliton com a obtida na *pseudo*-esfera, sendo que neste caso ela é instável; é interessante notar que as superfícies são topologicamente equivalentes.

Observações como esta nos instigam a dar continuidade ao trabalho, fazendo comparações com os resultados obtidos em outras superfícies, como também aprofundando nossos conhecimentos acerca das teorias a ele relacionadas.

Agradecimentos

P.S.C. Vilas-Boas agradece à UNEB/Campus VII através do curso de Especialização em Matemática Aplicada; a A.F. Santos por coordená-lo, junto a sua equipe; e a V.L. Carvalho-Santos, pela orientação e incentivos. V.L.C.S. agradece à agência brasileira CNPq (número 229053/2013-0) pelo suporte financeiro.

Referências

- [1] REZENDE, Sergio Machado. **Magnetismo e materiais Magnéticos no Brasil**. Boletim Informativo da SBF. São Paulo: SBF(3), p. 26-35, 1998.
- [2] SANTOS, Vagson Luiz de Carvalho. **Soluções topológicas de spins no toro**. 2008, 74f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2008.
- [3] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física. 8a Edição, Vol. 3: eletromagnetismo**. Rio de Janeiro, LTC, 2009.
- [4] SHACKELFORD, James F. **Ciência dos materiais**. São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008.
- [5] REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. Rio de Janeiro, Elsevier, 1982.
- [6] MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do Eletromagnetismo, Vol. II**. Ponta Grossa, Editora UEPG, 2002.
- [7] FREITAS, Walter Andrade de. **Soluções tipo-vórtice de spin na fita de Möbius**. 2009. 63f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2009.
- [8] MERMIN, N. David. **The topological theory of defects**. Reviews of Modern Physics, v. 51, 1979.
- [9] RYDER, Lewis H. **Quantum Field Theory**. 2nd ed. Cambridge University Press, 1996.
- [10] MILAGRE, G. S.; MOURA-MELO, Winder A. **Magnetic vortex-like excitations on a sphere**. Physics Letters A, v. 368, p. 155-163, 2007.
- [11] FREITAS, W. A.; MOURA-MELO, W. A.; PEREIRA, A. R. **Heisenberg spins on a cone: an interplay between geometry and magnetism**. Physics Letters A, v. 336, p. 412-422, 2005.
- [12] BELO, Leandro Ribeiro. **Modelo de Heisenberg em um espaço com curvatura negativa: excitações topológicas de spin na pseudo-esfera**. 2007. 68f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2007.

-
- [13] ARFKEN, George B. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
 - [14] CARVALHO-SANTOS, V. L.; APOLONIO, F. A.; OLIVEIRA-NETO, N. M. **On geometry-dependent vortex stability and topological spin excitations on curved surfaces with cylindrical symmetry**. Physics Letters A, v. 377, p. 1308-1316, 2013.
 - [15] MOURA-MELO, W.A.; PEREIRA, A.R.; MÓL, L.A.S.; PIRES, A.S.T. **Geometrical pinning of magnetic vortices induced by a deficit angle on a surface: Anisotropic spins on a conic space background**. Physics Letters A, v. 360, p. 472-480, 2007.
 - [16] RAJARAMAN, R. **Solitons and instantons**. North-Holland, Amsterdam, 1982.
 - [17] SAXENA, A.; DANDOLOFF, R.; LOOKMAN, T. **Deformable curved magnetic surfaces**. Physica A, v. 261, p. 13-25, 1998.