

As ideias fundamentais do cálculo integral no ensino médio: um diálogo entre história da matemática e tecnologia

Fundamentals ideas of integral calculus in high school: a dialogue between history of mathematics and technology

ALESSANDRO EMILIO TERUZZI¹
ALEXANDRE MANIÇOBA DE OLIVEIRA²

Resumo

A partir da história da matemática, as ideias fundamentais associadas ao cálculo integral podem ser debatidas em sala de aula em relação ao cálculo do volume dos sólidos – a saber, a pirâmide e a esfera. Esta atividade, que envolve a compreensão e o uso do princípio de Cavalieri, requer um diálogo entre os aspectos práticos e a dimensão do “experimento mental”, que pode ser construído, elaborado e debatido aproveitando-se as possibilidades que um recurso tecnológico, como a impressora 3D, pode oferecer.

Palavras-chave: Cálculo integral, história da matemática, infinitésimos, princípio de Cavalieri, impressora 3D, experimento mental

Abstract

By the study of history of mathematics, fundamentals ideas relative to integral calculus may be discussed in the classroom to explain solids volumes calculations and formulas – particularly pyramid and sphere. This activity, that involves the comprehension and the use of Cavalieri’s principle, needs a dialogue between practical aspects and the “mental experiment” dimension, that can be built and discussed exploiting the possibilities offered by a modern tool, such as 3D printer.

Keywords: Integral calculus, history of mathematics, infinitesimals, Cavalieri’s principles, 3D printer, mental experiment

Introdução

Com as turmas do segundo ano do ensino médio integrado (curso de automação industrial e química), foi elaborada uma dinâmica em aula para discutir aspectos da geometria sólida, particularmente no que diz respeito ao cálculo dos volumes, que remetem às ideias fundamentais do cálculo infinitesimal, tais como o princípio de Cavalieri. O elemento central de tal roteiro foi construir uma parceria entre nós, professores, a fim de trabalhar essas ideias a partir da experiência feita com a impressão 3D.

¹ Prof. Me. IF Suzano - alessandro.teruzzi@ifsp.edu.br

² Prof. Dr. IF Suzano - amanicoba@labmax.org

Desenvolvimento

O *frame* epistemológico em que este trabalho se insere é constituído pela concepção de que as ideias fundamentais do ensino [1] (e, em particular, do ensino da matemática [2]) são elementos valiosos em uma visão construtivista do saber, na qual elas se organizam em redes de conhecimentos [3] [4]. Assim, essas ideias representam ótimos candidatos para se tornar “supernós” ou centros de interesses.³

As noções de cálculo infinitesimal, tais como os pares aproximado-exato, variável-constante e o próprio conceito de infinito (com o par infinitamente pequeno e infinitamente grande) representam uma escolha interessante e fértil na perspectiva das ideias fundamentais, como destaca Machado [5]. É importante ressaltar que não estamos defendendo aqui a introdução das técnicas diferenciais e integrais, mas sim as ideias fundamentais na raiz do cálculo, abordadas de maneiras intuitivas e sem demasiada preocupação com os formalismos.

Para resgatar tais ideias, de acordo com Teruzzi [6], é útil mergulharmos na história da matemática para verificar como elas apareceram – ou seja, em que contexto, dialogando com quais outras concepções filosóficas, políticas (neste caso, é significativo o trabalho de Furinghetti [7,8,9], relativo às *cognitive roots* que podem ser encontradas no estudo da história da matemática) –, e como elas mudaram de significado ao longo do tempo (aqui, a referência é ao conceito de razão histórica de Ortega y Gasset [10]). Assim, ao mergulharmos na história da matemática, é possível verificar como a disputa sobre os infinitésimos, sobre a possibilidade de usá-los como meio para o cálculo de áreas e volumes, é um debate que remete à Grécia Clássica do século V, antes da era comum, envolvendo filósofos e matemáticos do calibre de Zenão, Platão, Aristóteles, Antifon – o sofista, Eudoxo e, evidentemente, Arquimedes [ver 6]. Um enfrentamento de ideias que não fica confinado na bacia do Mediterrâneo (as contribuições do chinês Lui Hui são notáveis) e que prossegue na Renascença, com as contribuições, dentre outros, de Stevin, Kepler, Galileo, Cavalieri e Torricelli. Um debate, inclusive, no qual a experiência e os “experimentos mentais” [6] dialogam continuamente: a abstração de se cortar uma pizza em fatias, ou um cilindro em camadas, é uma operação que pode ser efetivamente feita, mas que requer “imaginação” para ser levada ao extremo de considerar infinitas fatias de tamanho infinitésimo.

De acordo com os PCNs [11], o campo tecnológico é um eixo a ser explorado no estudo das ciências e da matemática. Assim, surgiu a proposta de se trabalhar as ideias do cálculo integral – particularmente, a intuição por trás do princípio de Cavalieri –, aproveitando-se do recurso oferecido por uma impressora 3D, tal como conjecturado em [6]. Ou seja, por meio deste recurso tecnológico, é possível trabalhar em cima da compreensão de que uma linha pode ser vista como composta por “infinitos” pontos; uma superfície pode ser enxergada como composta por “infinitas” linhas paralelas; e um sólido pode ser compreendido como composto por “infinitas” superfícies (camadas) paralelas e sobrepostas. O próprio modelo de funcionamento de uma impressora 3D propicia esta visão: ao derreter o filamento de PLA⁴, ela depõe, na superfície que está na base, linhas de filamento derretidas “ponto a ponto”; coloca várias linhas, uma do lado da outra, para formar superfícies; e, por fim, coloca camadas uma em cima da outra, para formar volumes. Desta maneira, no diálogo entre experiência efetiva e experiência de pensamento, a atividade da impressora 3D ocuparia a polaridade “prática”.

A atividade proposta foi organizada de modo a programar a impressora para produzir: um cubo cuja aresta fosse de 2 cm; uma pirâmide de base quadrada, com mesma base e mesma altura que o cubo; e uma esfera cujo raio fosse de 2 cm. Todos os sólidos foram programados para serem produzidos “cheios”, isto é, preenchendo totalmente o espaço em seu interior.

³ Existem vários paralelismos que podem ser esboçados entre a rede de conhecimentos e a internet: por exemplo, as duas não são estáticas, mas se modificam continuamente e, também, não existem compartimentos, tampouco uma organização hierárquica, no entanto, existem centros de interesse.

⁴ PLA, ou *ácido polilático*, é um dos materiais mais usados para impressão 3D. É um derivado do milho e de outros amidos renováveis e, por isso, é um material biodegradável e ambientalmente amigável.



Figura 1. O professor Alexandre explica o funcionamento da impressora 3D. Os três alunos ao redor da impressora estão observando, de perto, a sua ação.

Enquanto a impressora trabalhava, foram mostradas aos alunos várias técnicas de impressão em 3D, utilizando-se vídeos e explicações tecnológicas acerca das características dos diferentes processos. Os objetivos eram, basicamente, três, quais sejam: primeiramente, fascinar e cativar os alunos com as maravilhas que a tecnologia oferece neste campo; posteriormente, indicar para eles, que estudam em cursos técnicos, campos inovativos e em expansão do mundo industrial e das novas tecnologias; e, por último, mostrar plasticamente a tensão entre platonismo e aristotelismo na concepção da matemática. Este último ponto refere-se ao jeito de entender a matemática como algo que existe independentemente do ser humano (platonismo) ou como algo produzido pelas pessoas (aristotelismo): assim, a impressora que usamos em nossa atividade seria “aristotélica”, criando, linha após linha, camada após camada, algo que antes “não existia”; enquanto, por exemplo, a fotopolimerização, semelhante a um processo de escultura humana, parece liberar uma escultura que... já estava no bloco de material (platonismo).

Ao longo da apresentação os alunos podiam sanar dúvidas sobre os diferentes processos e a sua utilidade e, alternadamente, podiam ficar próximos da impressora para assistir ao processo “ao vivo”⁵. A atividade do dia foi concluída com uma demonstração “*all in one*”, na qual um objeto sólido foi projetado, texturizado e imprimido na hora⁶. A essa atividade foi dada continuidade nas 4 aulas seguintes, discutindo-se com os alunos os volumes de prismas, pirâmides⁷ e esferas, debatendo o princípio de Cavalieri na ideia de equivalência entre pirâmides com a mesma área de base e mesma altura, e para calcular o volume da esfera, tanto com o método de Kepler (decompor a esfera em infinitas pirâmides com altura igual ao raio) como com o método da “xícara de Galileo” (ver, por detalhes, [6], especialmente pág.144-150).

⁵ A impressora trabalhando era gravada e projetada em uma tela ao lado da apresentação sobre os vários tipos de impressão.

⁶ Foi feito um toro elíptico com sulco no meio de um “lado” comprido: quase um anel achatado em uma direção e alongado na outra.

⁷ Para manter uma certa simplicidade esquemática, bem como para continuar a trabalhar as ideias conectadas com o infinito, o cilindro foi enxergado como um prisma com base circular e, o cone, como uma pirâmide com base circular.

As discussões realizadas ao longo desta trajetória foram muito animadas e participativas, sempre dialogando com a experiência da impressora 3D. Particularmente, muitas dúvidas dos alunos remetiam ao caso do obstáculo didático proposto por Brusseau [8], no qual o autor francês sugere que o obstáculo que o aluno pode ter, devido a um conhecimento prévio, tenha alguma relação com “obstáculos epistemológicos” com os quais, ao longo da história da matemática, as pessoas depararam-se. Assim, várias objeções sobre o caráter dos indivisíveis dialogam com os debates que ao longo da história apareceram (ver, para uma análise teórica detalhada, o item 6.3 de [6]).

Resultados e discussões

Um ponto que se manifestou com força ao longo deste trabalho com os alunos (e na reflexão seguinte) diz respeito ao papel de destaque que a possibilidade de atuar no IF representa para a realização deste tipo de parcerias e estratégias didáticas: no Instituto, a presença de recursos, a organização da jornada e da grade horária (que prevê uma parte dedicada ao ensino em sala de aula e, uma outra, ao estudo, à formação, à troca de ideias entre colegas), a coexistência de ensino médio e superior são, ao nosso ver, elementos indispensáveis para propiciar aulas diferenciadas, nas quais diversos saberes e recursos podem ser agregados para propiciar aulas significativas e interessantes para os alunos.

Avaliamos muito positivamente o desenvolvimento da atividade, sendo que vários alunos, por um lado, ficaram extremamente envolvidos com o aspecto tecnológico da impressora 3D, e, por outro, apropriaram-se dos conceitos intuitivos do cálculo integral, levantando questões muito refinadas, sendo, algumas, de cunho lógico-filosófico.

Na grandíssima maioria dos ensaios produzidos pelos alunos após estes blocos de atividades, estavam presentes vários aspectos tecnológicos levantados: a importância das técnicas de impressão 3D no mundo industrial, aplicações médicas e culinárias, as diferenças e variedades entre diversas tecnologias de impressão, os “parâmetros técnicos” de funcionamento da impressora (composição química do filamento de PLA, temperatura para derretê-lo, etc.), entre outros elementos.

Um número importante de ensaios (acerca de 70%) conseguiu destacar ideias e questões mais diretamente ligadas às problemáticas do cálculo integral, produzindo problematizações bem interessantes e profundas.⁸

Por exemplo, Luke Skywalker analisa o processo de impressão e propõe que o ponto (ou voxel⁹) tenha um tamanho, por exemplo, 0,2mm, nas três direções. Assim, as linhas serão formadas por um certo número (finito) de pontos alinhados; as superfícies, por linhas justapostas; e, os sólidos, por planos empilhados (e este raciocínio é sustentado por cálculos exemplificatórios). A partir disso, Luke problematiza uma situação bastante simples:

Então na vida real percebemos que os sólidos são construídos por pontos e linhas de certo volume, que gera[m] um sólido de um certo volume.

Já na matemática, os pontos e as retas não possuem dimensionamento [...].

E nesse ponto surge um desafio [...]: quantos pontos, quantas linhas foram necessárias para formar [um]a altura de 10mm [...]?

[...]crio a hipótese que [...] a altura [...] é constituída de infinitos pontos.

E conclui com as seguintes fórmulas (Figura 2)

⁸ Além deste dado ser, por si só, bem encorajante, as respostas que vários alunos deram na sucessiva prova sobre os cálculos dos volumes dos sólidos, mostraram que mais discentes tinham se debruçado sobre o problema: por exemplo, um aluno sustentou que a ideia de se pensar o volume de um cilindro ser formado de infinitas camadas circulares é como pensar um “tubo de Pringles”, no qual cada batata representa uma camada.

⁹ Dito informalmente, o voxel é o equivalente ao *pixel* em três dimensões. Assim como o *pixel* representa o “átomo” de uma imagem, o voxel representa o “átomo” de uma estrutura tridimensional. No caso da impressora 3D, o voxel representa a menor impressão que o equipamento consegue produzir: pode ser considerada como uma aproximação concreta do conceito geométrico ideal de ponto.

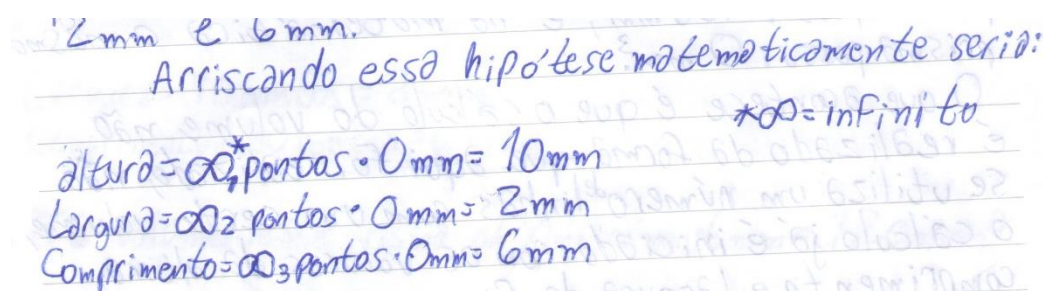


Figura 2. Luke Skywalker resume assim a possibilidade de infinitos pontos (de dimensão zero) formarem linhas de comprimento finito.

Han Solo, em seu ensaio, assim descreve a relação entre a impressão 3D e a geometria:

Este esquema de montagem [da impressora 3D] assemelha-se bastante com a geometria, na qual existem pontos teóricos que não têm nem largura, nem profundidade, nem comprimento; junta-se vários (algo próximo de infinito) e faz-se uma reta que possui comprimento, mas nenhuma largura; junta-se infinitos nadas (ou algo próximo de zero) e tem-se uma largura, um plano bidimensional; e juntando infinitos planos cria-se um volume diferente de zero. Este conceito de juntar $\infty * \infty * \infty$ pontos para criar um corpo tridimensional é muito útil na matemática moderna.

Mesmo o funcionamento da impressora não sendo igual ao conceito matemático, pois o filamento que usa possui uma largura, mostra na prática um conceito antigo, porém moderno (grifo nosso).¹⁰

¹⁰ Em classe foi citado o modo como o debate sobre os infinitésimos foi algo que já apareceu na Grécia Clássica e que foi levado, por Arquimedes, ao máximo grau de exploração da época pré-moderna. Também foi trabalhada a ideia de que o cálculo infinitesimal moderno, desde as primeiras retomadas na Renascença, demorou séculos para ganhar a atual elaboração teórica.

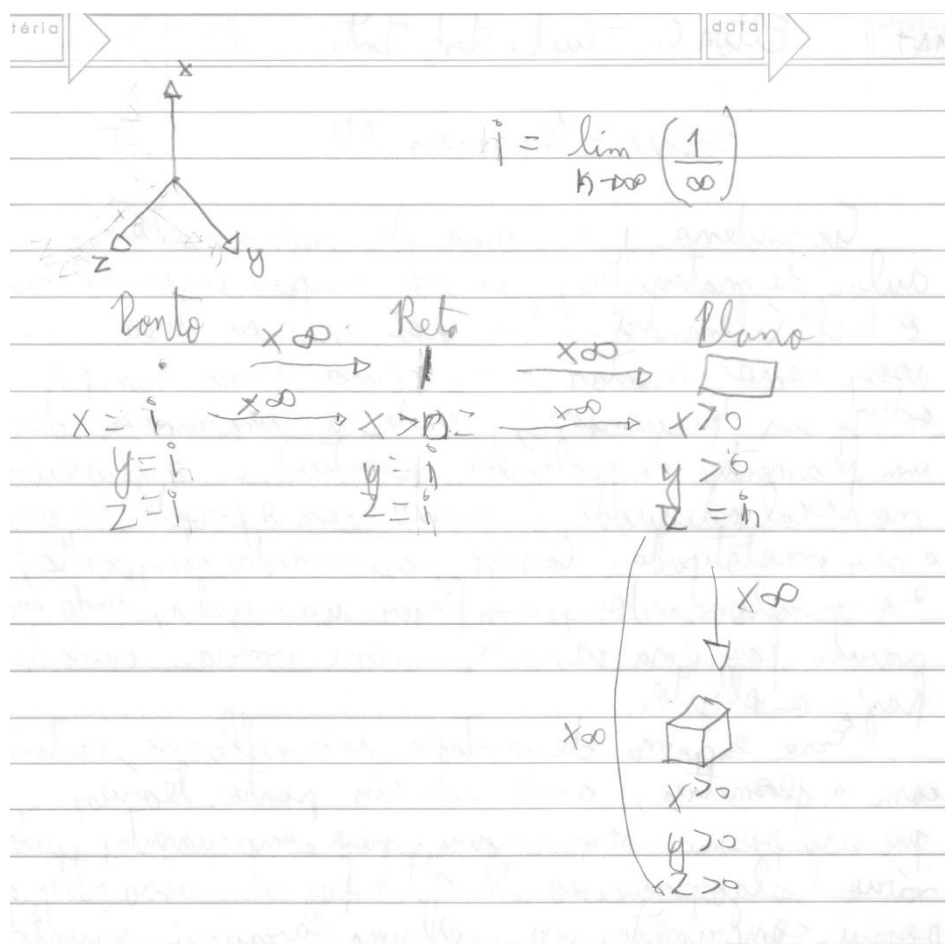


Figura 3. O esquema de Han Solo para mostrar a passagem de pontos para retas, de retas para planos e de planos para volumes.

Leia Organa resume assim a discussão que aconteceu na aula:

No dia seguinte [à apresentação da impressora 3D...], analisamos [a ideias d]os sólidos formados por linhas. Porém, linhas não têm largura, só têm comprimento. Então, como é possível formar um sólido? Esta pergunta intriga os pensadores antigos e contemporâneos...

Jyn Erso destaca deste modo o interesse e a vantagem em fazer dialogar a geometria com a impressão 3D:

Mais didaticamente citando, essa impressora nos ajuda a ter projeções de coisas impalpáveis e/ou difíceis de imaginar, na palma na mão.

Do ponto de vista do rigor matemático atualmente estabelecido, as fórmulas apresentadas, assim como alguns aspectos do raciocínio e da linguagem utilizados, não seriam aceitos em nenhum livro hodierno de análise. Mas, estas reflexões são extremamente preciosas porque demonstram uma problematização do conceito dos infinitesimais que remete a um debate histórico na própria matemática, muito polêmico e fecundo, que se desdobrou por séculos e que somente nos últimos 300 anos se assentou com o formalismo que atualmente se demanda. Novamente, vale lembrar que o foco destas atividades não é trazer as técnicas, as definições e os formalismos do cálculo infinitesimal para o ensino médio, mas sim provocar reflexões entre os alunos sobre ideias fundamentais do cálculo integral, como a relação infinito-infinitesimais, o conceito de aproximação e as antinomias e os paradoxos atrelados a estes aspectos.

Esta trajetória didática, acerca da qual estamos confiantes, permitiu uma compreensão mais profunda do mecanismo que está por trás das fórmulas para se calcular os volumes dos sólidos estudados no ensino médio: assim, a nossa sensação é de ter conseguido mudar o foco de uma matemática tecnicista [2] [12], baseada em fórmulas prontas e algoritmos, para uma matemática como atividade humana e cultural (matemática humanista), fruto de debate entre propostas e posições diferentes, que dialoga com a técnica, as ciências e, em geral, com a sociedade.

Estamos convencidos de que esta proposta didática é extremamente rica de possibilidade e desdobramentos, cabendo ao professor escolher possíveis roteiros e narrativas a serem explorados: por exemplo, uma possibilidade na qual pensamos na fase de preparação, mas que não coube na dinâmica de aula, consistia em trabalhar com o tempo de impressão dos diferentes sólidos e, sabendo que a “velocidade de impressão” é constante, calcular experimentalmente o volume dos sólidos. Ainda, a atividade de impressão requer alguns cuidados práticos: por exemplo, imprimir uma esfera cheia pode apresentar algumas dificuldades devido ao fato de que a “base” da esfera no plano de impressão, idealmente, seria somente um ponto: talvez seria melhor pensarmos em imprimir duas semiesferas, passíveis de serem montadas juntas, de modo a formar uma inteira.

Por tudo isso, quisemos compartilhar esta experiência de trabalho, que retoma ideias fundamentais na história da matemática utilizando como recurso didático as possibilidades oferecidas pela impressora 3D, esperando que possa ser um exemplo de boa prática a ser retomada, discutida e usada como base por outras atividades e por outros colegas docentes.

Referências

- [1] BRUNER J. O processo da educação. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1978.
- [2] CARAÇA, B. de J. Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa: Edições Cosmos, 1941.
- [3] MACHADO, N. J. Epistemologia e didática. São Paulo: Cortez, 1995.
- [4] AUSUBEL, D. P. Educational Psychology: A Cognitive View. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1968.
- [5] MACHADO, N. J. Matemática e língua materna. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993.
- [6] TERUZZI, A. E. A produção de sentido na aula de matemática: a história da matemática como base para a construção de narrativas no ensino médio. São Paulo: USP (Dissertação de Mestrado), 2017.
- [7] FURINGHETTI, F. Quattro anni di impegno internazionale su storia e didattica: bilanci e prospettive, 2004.
- [8] FURINGHETTI, F. A report on the ICMI study: “The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics”. L’Enseignement Mathématique, Genève, v. 51, p. 365-372.
- [9] RADFORD, L. et al. Reflections on history of Mathematics. History of mathematics and Mathematics Education. In: FRIED, M. N. DREYFUS, T. (Ed.). Mathematics & Mathematics Education: searching for common ground. Advances in Mathematics Education, 2014.
- [10] ORTEGA Y GASSET, José. La razón histórica. Obras Completas. 2ª reimpresión. v. XII. Madrid: Alianza, 1997.
- [11] Parametros Curriculares Nacionais, Brasil, 1998.
- [12] BISHOP, A. J. Mathematical enculturation, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Third printing, 1997.