
Análise dos operadores vetoriais em coordenadas curvilíneas ortogonais por meio da notação indicial de Einstein

Analysis of vectorial operators in orthogonal curvilinear coordinates by using Einstein's index notation

L. M. Holanda¹, J. P. M. Braga², I. R. O. Ramos³

¹Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Campus Pau dos Ferros, Pau dos Ferros, Rio Grande do Norte, Brasil

²Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Campus dos Palmares, Acarape, Ceará, Brasil

³Universidade Estadual Vale do Acaraú, Campus Cidao, Sobral, Ceará, Brasil
Autor para Correspondência: ² philipe@unilab.edu.br.

Resumo

Sabemos que os fenômenos físicos apresentam-se naturalmente em diversos tipos de simetria, tornando-se evidente a necessidade de usarmos sistemas de coordenadas adequados para aproveitarmos essas características da natureza. Nesse sentido, as equações precisam ser adaptadas para que suas soluções sejam mais simples e com menos cálculos extensos. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é desenvolver, a partir da notação indicial de Einstein, os principais operadores vetoriais de forma a simplificar a escrita das equações. Para isso, inicialmente, vamos escrevê-los em uma notação mais elegante e compacta que contenha as características gerais dos sistemas de coordenadas, como métrica e vetores unitários direcionais e, em seguida, particularizar para os sistemas de coordenadas mais utilizados em problemas físicos. Com isso, esperamos que o desenvolvimento destes operadores vetoriais em coordenadas curvilíneas ortogonais seja feito de forma descomplicada e acessível a todos que se proponham a estudar ou trabalhar com ciências exatas. Em particular, esse trabalho pode ser utilizado como material complementar nas disciplinas de Cálculo Vetorial, onde a notação indicial de Einstein nem sempre é apresentada, apesar de ser uma ferramenta muito útil tanto na representação quanto na demonstração de diversas equações.

Palavras-chave: Operadores, Sistema de Coordenadas, Notação Indicial.

Abstract

We know that physical phenomena naturally present themselves in different types of symmetry, becoming evident the need to use adequate coordinate systems to take advantage of these characteristics of nature. In this sense, the equations need to be adapted in order to obtain simpler solutions and with less extensive calculations. Thus, the aim of this work is to develop, by using Einstein's index notation, the main vector operators in order to simplify the writing of the equations. For this, we will initially write them in a more elegant and compact notation that contains the general characteristics of coordinate systems, such as metric and directional unit vectors and, after that, we will particularize them to the coordinate systems most used in physical problems. With this procedure, we hope that the development of these vector operators in orthogonal curvilinear coordinates will be done in an uncomplicated and accessible way for all who intend to study or work with exact sciences. In particular, this work can be used as a complementary material in the disciplines

of Vector Calculus, where Einstein's index notation is not always presented, despite being a very useful tool both in representing and demonstrating several equations.

Keywords: Operators, Coordinate System, Index Notation.

1 Introdução

As leis da natureza são expressas de maneira precisa e elegante por meio de equações matemáticas, tornando indispensável o domínio de conceitos matemáticos avançados para que possamos utilizá-las com maestria. Aqui, podemos citar inúmeras equações belíssimas que descrevem desde as menores entidades como as partículas atômicas e subatômicas, as quais são descritas pela mecânica quântica [1, 2, 3], até o domínio do macrocosmos descrito pela relatividade geral [4, 5]. Nesse meio termo temos equações para descrever a mecânica newtoniana [6, 7], as leis da termodinâmica [8, 9], as equações de Maxwell para o campo eletromagnético [10, 11], dentre tantas outras. Algumas destas equações são bastante simples, porém, outras podem ser bem extensas e complexas; portanto, é útil desenvolvermos ferramentas matemáticas que nos auxiliem na representação e na resolução de tais equações.

Ao observarmos a natureza percebemos que ela se manifesta, via de regra, com base em variações, sejam elas de energia, de velocidade ou de campos. Dessa forma, inúmeras leis que descrevem os fenômenos naturais aparecem na forma de derivadas, como, por exemplo, as equações de Maxwell que descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético. São quatro equações que descrevem, de maneira bastante sucinta, como são gerados os campos e como a variação de um deles dá origem ao outro e vice-versa. Matematicamente, essas equações são escritas como

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3)$$

e

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (4)$$

O divergente que aparece na primeira equação indica que o campo elétrico diverge (ou converge) de uma distribuição de cargas ρ . A segunda apresenta divergente nulo, indicando um fato bastante conhecido no magnetismo: não existem polos magnéticos isolados (ou monopolos) e, conseqüentemente, as linhas de campo magnético devem descrever curvas fechadas. A terceira lei do conjunto identifica que um campo magnético variável no tempo dá origem a um campo elétrico. Essa é a famosa lei da indução de Faraday. A última das equações representa a variação temporal do campo elétrico como fonte geradora de campo magnético e também identifica uma corrente elétrica (ou densidade de corrente, $\vec{J}$) como uma fonte para campos magnéticos. As duas últimas equações apontam para um comportamento bastante peculiar dos campos elétrico e magnético gerados: eles rotacionam em torno das linhas do campo que o gerou.

O operador diferencial “nabla” aparece nas equações (1), (2), (3) e (4) com diferentes definições. Nas duas primeiras, $\nabla \cdot$ é identificado como o divergente dos campos elétrico e magnético. Sua interpretação remete ao fluxo do campo vetorial por unidade de volume, ou simplesmente a dispersão ou divergência do campo. Nas duas últimas equações, o operador $\nabla \times$ aparece atuando como um rotacional, o qual grosso modo representa a circulação de um campo vetorial.

Uma consequência surpreendente destas equações é que manipulando-as de maneira adequada e usando algumas propriedades dos operadores diferenciais [12, 13], podemos desacoplar as equações de Maxwell mostrando que

$$\nabla^2 \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5)$$

e

$$\nabla^2 \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} . \quad (6)$$

As equações (5) e (6) são claramente identificadas como equações de uma onda. Isso significa que os campos elétrico e magnético propagam-se como ondas cuja velocidade é c (velocidade da luz no vácuo). Aqui, ∇^2 é identificado com o laplaciano, um operador diferencial de segunda ordem. A demonstração das equações (5) e (6) nos leva a importante conclusão de que a luz é uma onda eletromagnética e, conseqüentemente, de que a ótica é um ramo do eletromagnetismo.

Outro exemplo clássico envolvendo operadores vetoriais tem papel central em uma das grandes descobertas científicas da física do século XX, a mecânica quântica [1, 2]. Esse formalismo surpreendente descreve o mundo das partículas subatômicas como prótons, elétrons e neutrons através de funções de onda $\psi(\vec{r})$ associadas aos estados quânticos dessas partículas e suas energias correspondentes. Embora a função de onda forneça todas as informações sobre o estado da partícula, a natureza não se revela por completo nesse estranho mundo de coisas muito pequenas. Há uma limitação natural descrita pelo princípio da incerteza de Heisenberg que dita o quão preciso é o resultado de uma medida simultânea das características associadas a um estado quântico. Por exemplo, no mundo subatômico é impossível determinar a posição e a velocidade de uma partícula ao mesmo tempo com muita precisão. Em um mundo determinístico do início do século XX, esse fato levou muitos dos cientistas mais renomados da época a desacreditarem nessa nova teoria, o mais famoso deles sendo Albert Einstein que em sua famosa declaração acerca da mecânica quântica disse: “Deus não joga dados”.

O início da década de 1920 foi memorável para a consolidação da mecânica quântica. Um jovem físico francês chamado Louis Victor de Broglie em seus primeiros trabalhos tentou fazer uma síntese entre as teorias ondulatória e corpuscular proposta por Einstein em 1905 para a luz. De Broglie estendeu as ideias de dualidade onda-partícula para as partículas de matéria, argumentando que a quantização de Bohr-Sommerfeld para as órbitas eletrônicas somente poderiam ser entendidas em termos de ondas estacionárias. Essa proposição o levou a postular a existência das ondas de matéria. A partir dessa nova visão de mundo, o físico austríaco Erwin Schrödinger desenvolveu uma equação muito elegante que descrevia o mundo das partículas quânticas através de uma função de onda de matéria e, finalmente, o alemão Max Born deu a interpretação probabilística a esta função de onda ao investigar o espalhamento de partículas em colisão [15]. A equação para as ondas de matéria ficou conhecida como equação de Schrödinger [1, 2, 3].

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) , \quad (7)$$

onde $\hbar$ é a constante de Plank dividida por 2π e i é a unidade imaginária. O potencial $V(\vec{r}, t)$ que aparece na equação (7) descreve a interação a qual a partícula está submetida. No caso do átomo de hidrogênio, $V(\vec{r}, t)$ é o potencial eletrostático, o qual é independente do tempo e pode ser descrito por

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} , \quad (8)$$

onde “ e ” é a carga elétrica elementar e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo.

A equação de Schrödinger, independente do tempo e com simetria radial, tem aplicações em diversos fenômenos como, por exemplo, na resolução do átomo de Hidrogênio. Ela pode ser resolvida escrevendo o operador laplaciano em coordenadas esféricas e fazendo uma separação

de variáveis do tipo $\psi(\vec{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$. Apesar de a solução desta equação não ser o objetivo aqui, o ponto é que mais uma vez surge a necessidade de escrever os operadores vetoriais em um determinado sistema de coordenadas para aproveitar a simetria do problema. Isso mostra a importância que esse tipo de matemática tem para a física e, consequentemente, para o entendimento da natureza.

A resolução de equações envolvendo os operadores descritos acima em sistemas de coordenadas diferentes do sistema cartesiano pode ser bastante complicada. No entanto, o formalismo da notação indicial de Einstein nos fornece uma excelente ferramenta para nos ajudar na escrita desses operadores. Dessa forma, o intuito do presente trabalho reside justamente na exploração dos conceitos básicos dessa poderosa ferramenta aplicada especialmente à descrição dos operadores vetoriais em diferentes sistemas de coordenadas curvilíneas e ortogonais. Comumente os sistemas cilíndrico e esférico são os mais utilizados, porém, pode haver situações em que um sistema diferente seja necessário. Com base nessa necessidade, iremos analisar os operadores vetoriais em sua forma generalizada através da notação indicial de Einstein com a finalidade de simplificar nossos cálculos.

2 Notação Indicial

A notação indicial é uma ferramenta matemática aperfeiçoada por Albert Einstein para representar grandezas físicas em espaços com dimensões superiores a três no intuito de manipular sistemas de equações lineares e somatórios de forma compacta e, com isso, reduzir drasticamente o tamanho destas equações. Nessa notação, representa-se um conjunto de variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ simplesmente por x_i com $i = 1, 2, \dots, n$ [12]. Portanto, um vetor arbitrário $\vec{A}$ no espaço tridimensional ordinário, o qual convencionalmente escrevemos em termos de suas coordenadas como

$$\vec{A} = A_1\hat{x}_1 + A_2\hat{x}_2 + A_3\hat{x}_3 = \sum_{n=1}^3 A_i\hat{x}_i, \quad (9)$$

pode ser representado em notação indicial desconsiderando o somatório, como forma de simplificar ainda mais a notação, ou seja

$$\vec{A} = A_i\hat{x}_i. \quad (10)$$

Nesta notação, índices repetidos representam uma soma com respeito a este índice, a qual deve seguir a dimensão do espaço em questão. O índice, empregado neste contexto unicamente para representar uma soma, é chamado de índice “falso” (ou mudo), pois o símbolo usado não interfere no resultado final. Quando um índice não aparece repetido e, portanto, não representa uma soma, ele é dito “livre” e denotará o número de equações do sistema, por exemplo

$$a_{ij}b_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij}b_j = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3. \quad (11)$$

Como o próprio índice i tem seu intervalo de variação de 1 a 3, teremos um total de 3 equações.

Uma ferramenta muito útil no cálculo de somas com índices é conhecido como delta de Kronecker, δ_{ij} , um símbolo matemático definido como [12, 13, 14]

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (12)$$

Esse símbolo é útil em diversas manipulações matemáticas, em especial no cálculo do produto escalar entre dois versores (os quais chamaremos de forma genérica de $\hat{e}_i$) de um sistema de coordenadas ortogonal, o qual fica escrito como

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}. \quad (13)$$

Nessa relação, fica evidente que o delta de Kronecker é simétrico em relação aos seus índices, ou seja $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Com essa propriedade do delta de Kronecker, podemos escrever o produto escalar entre dois vetores simplesmente

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \hat{e}_i \cdot B_j \hat{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i , \quad (14)$$

onde os termos cruzados irão todos se anular ($\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0$).

Outra ferramenta de extrema importância é o símbolo de Levi-Civita, ε_{ijk} , cuja manipulação em somas indiciais é definida como [12, 13, 14]

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } i, j, k \text{ estão em ordem cíclica,} \\ -1, & \text{se } i, j, k \text{ não estão em ordem cíclica,} \\ 0, & \text{se dois ou mais índices são repetidos.} \end{cases}$$

A ordem cíclica corresponde a sequência natural em que os índices aparecem, ou seja, ijk , kij e jki . Os símbolos de Levi Civita e de Kronecker estão relacionados da seguinte maneira

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} . \quad (15)$$

Esta definição tem importância particular na definição de um produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, uma vez que os versores direcionais podem ser descritos pela seguinte relação

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k . \quad (16)$$

Dessa forma, podemos escrever o produto vetorial como

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_i \hat{e}_i \times B_j \hat{e}_j = A_i B_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j = A_i B_j \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k . \quad (17)$$

Além disso, é possível definir operações de diferenciação utilizando notação indicial. Considere uma função escalar $\Phi = \Phi(x_i)$ em coordenadas cartesianas, a derivada de Φ em relação à coordenada x_i é escrita como $d\Phi/dx_i$ (derivada total) ou $\partial\Phi/\partial x_i$ (derivada parcial). Com isso, podemos escrever o diferencial total de Φ como

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i . \quad (18)$$

Observamos, portanto, a praticidade que temos ao usar essa notação na compactação das equações. Cálculos complicados podem ser realizados de forma elegante e simplificada uma vez que se tenha o domínio dessa ferramenta.

3 SISTEMA DE COORDENADAS

René Descartes é considerado um gênio da matemática do século XVII e teve papel fundamental na revolução científica. Conhecido por seus pensamentos filosóficos, como a célebre frase “*Cogito, ergo sum*” (Penso, logo existo), Descartes também é considerado o pai da matemática moderna [16]. Um de seus memoráveis feitos nasceu da relação da álgebra com a geometria na tentativa de descrever numericamente retas, planos e curvas através de equações matemáticas. Dessa fusão nasceu o sistema de coordenadas cartesiano, consistido por eixos perpendiculares entre si que tem como característica representar pontos no espaço. Junto com essa ideia revolucionária, nasceram também áreas da matemática como a geometria analítica além de ter fundado as bases para o cálculo diferencial e integral, desenvolvido por Issac Newton e posteriormente por Gottfried Wilhelm Leibniz [17]. Hoje a importância dos sistemas de coordenadas ultrapassa

qualquer tentativa de defini-los de forma simplória, tendo importância em todas as áreas do conhecimento.

Inicialmente definido em sua forma mais básica, que consistia em retas ortogonais entre si representando funções lineares em cada uma das direções, logo foi ampliado e escrito de forma mais genérica, associando-se a esferas e cilindros no espaço, os quais deram origem aos sistemas de coordenadas esférico e cilíndrico, respectivamente [13, 14]. No entanto, a necessidade nos levou ainda mais adiante nessa busca de representar o espaço, e sistemas mais complexos foram definidos com o intuito de acompanhar essa necessidade.

Consideremos um sistema de coordenadas curvilíneo arbitrário descrito por (u_1, u_2, u_3) e o sistema cartesiano convencional representado por (x_1, x_2, x_3) . Apesar de as componentes u_i não servirem para escrevermos diretamente as componentes de um vetor, devido ao fato de suas transformações com x_i não serem lineares, sempre será possível definir em cada ponto um sistema de coordenadas local, com eixos tangentes às curvas de u_i constante. Dessa forma, os diferenciais das funções u_i podem ser tratados como componentes do vetor deslocamento infinitesimal (no sistema curvilíneo) da mesma forma que os diferenciais dx_i em coordenadas cartesianas [14]. Isso leva a uma relação linear entre du_i e dx_i e, conseqüentemente, podemos escrever o deslocamento infinitesimal como [13, 14]

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} du_i . \quad (19)$$

Com isso, o comprimento de um seguimento, ds , fica

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} \right) du_i du_j \quad (20)$$

ou

$$ds^2 = g_{ij} du_i du_j . \quad (21)$$

Os coeficientes g_{ij} são denominados coletivamente de métrica do sistema de coordenadas. Obtida pelo produto escalar entre os vetores tangentes à curva $\vec{r}$, a métrica específica a natureza do sistema de coordenadas (u_1, u_2, u_3)

$$g_{ij} = \vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_j , \quad (22)$$

com

$$\vec{\epsilon}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} , \quad (23)$$

onde $\vec{\epsilon}_i$ ($i = 1, 2, 3$) são os vetores base do novo sistema de coordenadas, após a transformação. Portanto, a matriz que representa a métrica do sistema fica

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} . \quad (24)$$

No caso dos sistemas ortogonais, teremos $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Com isso, o comprimento do nosso seguimento pode ser escrito como

$$ds^2 = g_{ii} (du_i)^2 = (h_i du_i)^2 , \quad (25)$$

onde

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} \quad (26)$$

é definido como o fator de escala, de tal forma que o produto $h_i du_i$ sempre tenha dimensão de comprimento. Dessa forma, as coordenadas curvilíneas u_1, u_2, u_3 não precisam ter necessariamente unidades de comprimento.

A raiz quadrada dos elementos da métrica, h_i , terá um papel importante na definição do sistema de coordenadas, uma vez ela que representa a norma dos vetores base. De acordo com as equações (22) e (26), temos

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\vec{\epsilon}_i \cdot \vec{\epsilon}_i} = \|\vec{\epsilon}_i\| . \quad (27)$$

Assim, os vetores da base podem ser expressos em termos dos elementos da métrica do sistema

$$\vec{\epsilon}_i = h_i \hat{e}_i . \quad (28)$$

Com isso, pode-se representar um vetor $\vec{v}$ da seguinte forma

$$\vec{v} = u_i \vec{\epsilon}_i = h_i u_i \hat{e}_i . \quad (29)$$

Essa representação denota o vetor em termos de suas componentes no sistema de coordenadas específico, descrito pelos versores $\hat{e}_i$.

Outro importante conceito a ser definido é o Jacobiano da transformação, um operador linear obtido através da raiz quadrada do determinante da matriz métrica. Portanto, seja $\text{Det}(g_{ij}) = g$, podemos definir o operador Jacobiano de uma transformação entre sistemas de coordenadas como

$$J = \sqrt{g} . \quad (30)$$

Esse fator de transformação também é muito utilizado em mudanças de variáveis em integrais múltiplas e no teorema da função inversa [18].

4 Os Operadores Vetoriais

4.1 O operador Nabla ∇

Em cálculo vetorial o operador ∇ é um símbolo usado para denotar uma série de operações de diferenciação definidas ao atuarem em campos escalares e vetoriais. Simbolicamente ele é definido como

$$\nabla = \vec{\epsilon}_i \frac{\partial}{\partial u_i} . \quad (31)$$

Todas as relações obtidas com este operador são deduzidas de sua natureza híbrida em termos das derivadas parciais [13].

4.2 Gradiente

Suponha que tenhamos uma função escalar de três variáveis $\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ (p. ex. temperatura ou energia) em que cada ponto do espaço determina um valor de sua magnitude. Agora, imagine que desejamos encontrar a direção em que há a máxima variação dessa função, ou seja, precisamos encontrar a direção em que $d\Phi$ é máximo. De acordo com a equação (18), podemos escrever

$$d\Phi = \nabla \Phi \cdot d\vec{l} . \quad (32)$$

O produto escalar sugere que $d\Phi$ será máximo quando o cosseno do ângulo entre $\nabla \Phi$ e $d\vec{l}$ for igual a 0° , ou seja, a direção que devemos nos deslocar para encontrar a máxima variação na função Φ é paralela a $\nabla \Phi$. Essa quantidade é definida como o gradiente de Φ e é escrito em coordenadas cartesianas como

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \hat{e}_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \hat{e}_i . \quad (33)$$

No entanto, em coordenadas curvilíneas é preciso escrevê-lo de maneira geral, levando em consideração a métrica do sistema e os fatores de escala, ou seja

$$\nabla\Phi = \frac{h_1}{g_{11}} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \hat{e}_1 + \frac{h_2}{g_{22}} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \hat{e}_2 + \frac{h_3}{g_{33}} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} \hat{e}_3, \quad (34)$$

ou na forma de notação indicial [12]

$$\nabla\Phi = \frac{h_j}{g_{ij}} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \hat{e}_j. \quad (35)$$

4.3 Divergente

O nome divergente ou divergência de uma função vetorial foi apropriadamente escolhido, uma vez que ele representa quanto um vetor $\vec{v}$ se espalha (ou diverge) de um determinado ponto [10]. Assim, um divergente positivo/negativo significa que a função vetorial se espalha/converge de/para um ponto. Em coordenadas cartesianas o divergente pode ser escrito aplicando o operador nabla à função $\vec{v} = v_1\hat{x}_1 + v_2\hat{x}_2 + v_3\hat{x}_3$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (36)$$

A operação $\nabla \cdot$ não é definida para funções escalares, portanto, consideremos uma função vetorial definida em um sistema de coordenadas curvilíneo por $\vec{v}(u_1, u_2, u_3) = v_1(u_1, u_2, u_3)\hat{e}_1 + v_2(u_1, u_2, u_3)\hat{e}_2 + v_3(u_1, u_2, u_3)\hat{e}_3$. O divergente de $\vec{v}$ escrito nesse sistema será mais complicado, pois os vetores da base não são mais constantes; mesmo assim, a diferenciação pode ser entendida como uma simples extensão desta operação em quantidades escalares [13], ou seja

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_1} v_1 \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_2} v_2 \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_3} v_3 \right). \quad (37)$$

Escrito em termos de notação indicial, o divergente fica [12]

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_i} v_i \right). \quad (38)$$

4.4 Rotacional

Outra operação possível com o operador nabla consiste em uma espécie de produto externo (ou vetorial) com uma função $\vec{v}$. O nome rotacional novamente foi escolhido de forma adequada para representar tal operação, uma vez que ele representa a medida da intensidade com que um vetor gira (ou rotaciona) em torno de um ponto [10]. Assim como a operação de divergência, o rotacional somente será definido para atuações em funções vetoriais, não sendo, portanto, definido para funções escalares. Dessa forma, o rotacional de uma função vetorial $\vec{v} = v_1\hat{x}_1 + v_2\hat{x}_2 + v_3\hat{x}_3$ é expresso em coordenadas cartesianas como

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \hat{x}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \hat{x}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{x}_3 = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \hat{x}_i. \quad (39)$$

O rotacional é comumente expresso em termos de um determinante, cuidadosamente escrito de forma a dá o sentido correto do vetor resultante, uma vez que o produto vetorial não é comutativo, ou seja $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}. \quad (40)$$

Da definição desta operação, segue que seu divergente será sempre nulo uma vez que nada “entra” ou “sai” do ponto em questão, ou seja

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0. \quad (41)$$

Em coordenadas curvilíneas, o determinante acima pode ser modificado para refletir as características do sistema em questão. Assim, consideremos uma função vetorial $\vec{v}(u_1, u_2, u_3) = v_1(u_1, u_2, u_3)\hat{e}_1 + v_2(u_1, u_2, u_3)\hat{e}_2 + v_3(u_1, u_2, u_3)\hat{e}_3$, tal que seu rotacional pode ser escrito de forma genérica em um sistema ortogonal como

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Em termos de notação indicial, podemos escrevê-lo da seguinte forma [12]:

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial u_i} (h_j v_j) \vec{e}_k. \quad (43)$$

4.5 Laplaciano

As operações realizadas com o operador nabla descritas até aqui referem-se somente a sua aplicação uma única vez e, portanto, resulta em derivadas primeiras aplicadas de forma adequada. Existem outras possibilidades de operações com ∇ aplicando-o sucessivas vezes. Por exemplo, podemos obter o divergente e o rotacional de um gradiente ou o divergente e o rotacional de um rotacional ou ainda o gradiente de um divergente. Nem todas essas operações sucessivas resultam em novas leis; no entanto, uma delas tem significado bem definido: o divergente do gradiente de uma função escalar Φ . Simbolicamente essa operação é escrita $\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi$ e recebe o nome de laplaciano [10]. O significado físico do laplaciano representa a diferença entre o valor médio do campo Φ em um elemento de volume em torno de um ponto $\vec{r}_0$ e o valor Φ_0 no ponto $\vec{r}_0$. Essa definição nos ajuda a interpretar as equações que contenham esse operador, como, por exemplo, a equação de Laplace para o potencial eletrostático

$$\nabla^2 V(r) = 0. \quad (44)$$

Esse resultado nos diz que o valor médio do potencial nas vizinhanças de um ponto $\vec{r}_0$ é igual ao potencial no próprio ponto $\vec{r}_0$.

Das equações (33) e (36), segue que o laplaciano de uma função escalar Φ pode ser escrito em coordenadas cartesianas como

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}. \quad (45)$$

Em algumas situações é possível termos o laplaciano de um vetor, $\nabla^2 \vec{v}$, como no caso dos campos elétrico e magnético descritos nas equações (5) e (6). No entanto, devemos entender que nestes casos o laplaciano atua nas coordenadas do vetor, ou seja

$$\nabla^2 \vec{v} = (\nabla^2 v_1) \hat{x}_1 + (\nabla^2 v_2) \hat{x}_2 + (\nabla^2 v_3) \hat{x}_3 \quad (46)$$

o que representa simplesmente uma extensão conveniente do significado de ∇^2 [10].

Ao aplicarmos operações sucessivas em coordenadas curvilíneas, devemos levar em consideração que tanto os fatores de escala (equação (26)) quanto o Jacobiano da transformação (equação (30)) podem ter dependência com as coordenadas do sistema, de modo que $h_i = h_i(u_1, u_2, u_3)$ e $J = J(u_1, u_2, u_3)$. Assim, as derivadas segundas devem incluir esse fato e o laplaciano fica escrito como

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) . \quad (47)$$

Na forma indicial podemos escrever o laplaciano de Φ da seguinte forma [12]

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{ij}} \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} \right) . \quad (48)$$

Para sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais, a matriz da métrica será diagonal e teremos $g_{ij} = g_{ii}$.

5 Os operadores vetoriais escritos em coordenadas esféricas e cilíndricas

5.1 Coordenadas polares esféricas

O sistema de coordenadas esférico é definido pelas variáveis r , o qual define esferas concêntricas centradas na origem; θ , formando cones circulares retos centrados no eixo polar x_3 com vértice na origem e ϕ definindo semiplanos que passam pelo eixo polar, tal que $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

A partir dessas definições, podemos encontrar relações de transformação entre as coordenadas (r, θ, ϕ) e as coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) , de tal modo que

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = \text{constante} , \quad (49)$$

$$\theta = \arccos \left[\frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} \right] = \text{constante} \quad (50)$$

e

$$\phi = \arctg \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = \text{constante} . \quad (51)$$

As relações inversas, por sua vez, são dadas por

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi , \quad (52)$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \phi \quad (53)$$

e

$$x_3 = r \cos \theta . \quad (54)$$

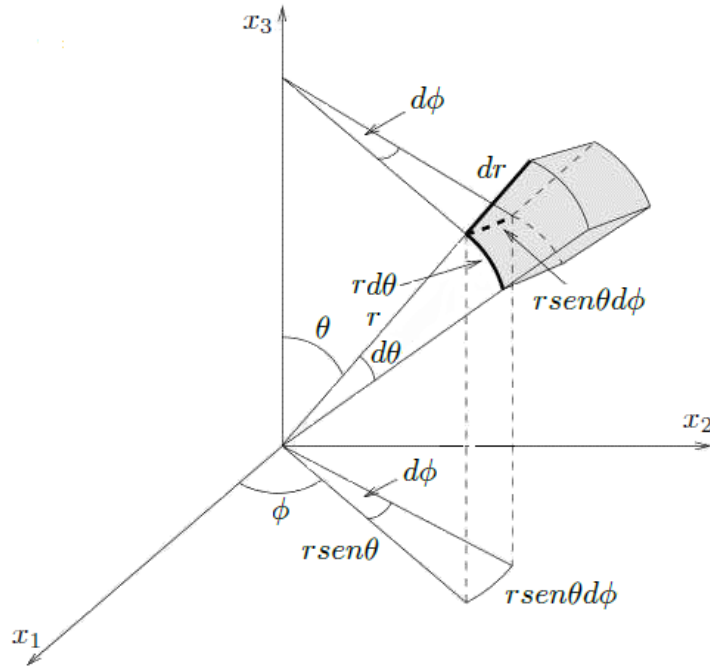


Figura 1: Sistema de coordenadas esférico. Aqui estão evidenciadas as variáveis esféricas (r, θ, ϕ) e um elemento de volume $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

Assim, a localização de um ponto no espaço, dada pelo vetor $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$, pode ser escrita em termos de suas coordenadas esféricas $\vec{r} = \vec{r}(r, \theta, \phi)$ como

$$\vec{r} = (r \sin \theta \cos \phi) \hat{x}_1 + (r \sin \theta \sin \phi) \hat{x}_2 + (r \cos \theta) \hat{x}_3 . \quad (55)$$

A partir das equações (23) e (55), podemos demonstrar que os vetores base do sistema de coordenadas esférico são

$$\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x}_1 + \sin \theta \sin \phi \hat{x}_2 + \cos \theta \hat{x}_3 , \quad (56)$$

$$\vec{\theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \hat{x}_1 + r \cos \theta \sin \phi \hat{x}_2 - r \sin \theta \hat{x}_3 \quad (57)$$

e

$$\vec{\phi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi \hat{x}_1 + r \cos \theta \cos \phi \hat{x}_2 . \quad (58)$$

Como o sistema esférico é ortogonal, de acordo com a equação (22) somente os termos diagonais da métrica serão não-nulos, dessa forma ficamos com

$$g_{11} = \vec{r} \cdot \vec{r} = 1 , \quad (59)$$

$$g_{22} = \vec{\theta} \cdot \vec{\theta} = r^2 \quad (60)$$

e

$$g_{33} = \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = r^2 \sin^2 \theta . \quad (61)$$

De acordo com a equação (26) os fatores de escala serão $h_1 = 1$, $h_2 = r$ e $h_3 = r \sin \theta$. Assim, a matriz métrica para este sistema de coordenadas será

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (62)$$

e o Jacobiano da transformação (equação (30)) ficará

$$J = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} = r^2 \sin \theta. \quad (63)$$

As quantidades encontradas acima estabelecem as características intrínsecas ao sistema de coordenadas esférico, permitindo assim escrever nossas equações físicas em tal sistema. Portanto, utilizaremos esses resultados na determinação das expressões dos operadores vetoriais definidos acima.

Começaremos pelo vetor gradiente de uma função escalar $\Phi = \Phi(r, \theta, \phi)$. De acordo com as equações (34) e (35)

$$\nabla \Phi = \frac{1}{1} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{r}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{r \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\phi}. \quad (64)$$

ou simplesmente

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\phi}. \quad (65)$$

O segundo operador vetorial da nossa lista é o divergente de uma função vetorial, a qual em coordenadas polares esféricas é designada por $\vec{v} = \vec{v}(v_r, v_\theta, v_\phi)$. Este operador pode ser escrito com o auxílio das equações (37) e (38). De tal modo que

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{1} v_r \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{r} v_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{r \sin \theta} v_\phi \right) \right]. \quad (66)$$

Após algumas simplificações, a equação (66) torna-se

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}. \quad (67)$$

Em seguida, temos o operador rotacional, o qual também opera sobre uma função vetorial $\vec{v}$ e é descrito pelas equações (42) e (43). Assim,

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{\theta} & \vec{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 1v_r & rv_\theta & r \sin \theta v_\phi \end{vmatrix}. \quad (68)$$

Esse determinante pode ser facilmente resolvido utilizando técnicas matriciais convencionais. Além disso, faremos uso da equação (28) para escrever os vetores direcionais, $\vec{e}_i$, em termos dos versores unitários, ou seja, $\vec{r} = \hat{r}$, $\vec{\theta} = r \hat{\theta}$ e $\vec{\phi} = r \sin \theta \hat{\phi}$, obtendo como resultado

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \{ & [r \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \hat{\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_\phi) \hat{r} + \\ & + r \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \hat{\phi}] - [r \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta v_\phi) \hat{\theta} + \\ & + r \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial \phi} (rv_\theta) \hat{r}] \}. \end{aligned} \quad (69)$$

Fazendo algumas simplificações e reorganizando os termos, ficamos com

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} . \quad (70)$$

Finalmente, temos o operador laplaciano de uma função escalar $\Phi = \Phi(r, \theta, \phi)$ como descrito pelas equações (47) e (48),

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{1} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) . \quad (71)$$

Fazendo algumas simplificações, podemos finalmente escrever o laplaciano como

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} . \quad (72)$$

Esses quatro operadores vetoriais escritos dessa forma nos permitem aplicá-los sempre que a simetria do problema nos permitir escrever as equações no sistema de coordenadas esférico. Problemas com simetria esférica aparecem com bastante frequência na natureza, como, por exemplo, cargas pontuais ou distribuições esféricas de cargas, onde a solução para o campo elétrico pode ser determinada através da equação (1) [10, 11]. O átomo de hidrogênio também possui simetria esférica, portanto podemos usar esses resultados para encontrar uma solução para a equação de Schrödinger com o potencial descrito pela equação (8) [1, 2].

5.2 Coordenadas cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndrico é descrito pelas coordenadas curvilíneas ρ, ϕ e z , de tal forma que $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ e $-\infty \leq z \leq \infty$. A coordenada ρ é utilizada para a distância perpendicular em relação ao eixo x_3 , e descreve cilindros circulares tendo o eixo x_3 como eixo principal. Em coordenadas cilíndricas deixamos a letra r para designar a distância de um determinado ponto a partir da origem. A coordenada ϕ é utilizada para designar semiplanos que passam pelo eixo x_3 e a coordenada z representa, assim como no sistema cartesiano, planos paralelos ao plano $x_1 x_2$ [12, 13].

A partir dessas definições, podemos escrever as relações de transformações entre as coordenadas (ρ, ϕ, z) e as coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) como

$$\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = \text{constante} , \quad (73)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = \text{constante} \quad (74)$$

e

$$z = \text{constante} . \quad (75)$$

As relações inversas, por outro lado, podem ser escritas como

$$x_1 = \rho \cos \phi , \quad (76)$$

$$x_2 = \rho \sin \phi \quad (77)$$

e

$$x_3 = z . \quad (78)$$

Assim, a localização de um ponto no espaço, dada pelo vetor $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$, pode ser escrita em termos de suas coordenadas cilíndricas $\vec{r} = \vec{r}(\rho, \phi, z)$ como

$$\vec{r} = (\rho \cos \phi) \hat{x}_1 + (\rho \sin \phi) \hat{x}_2 + z \hat{x}_3 . \quad (79)$$

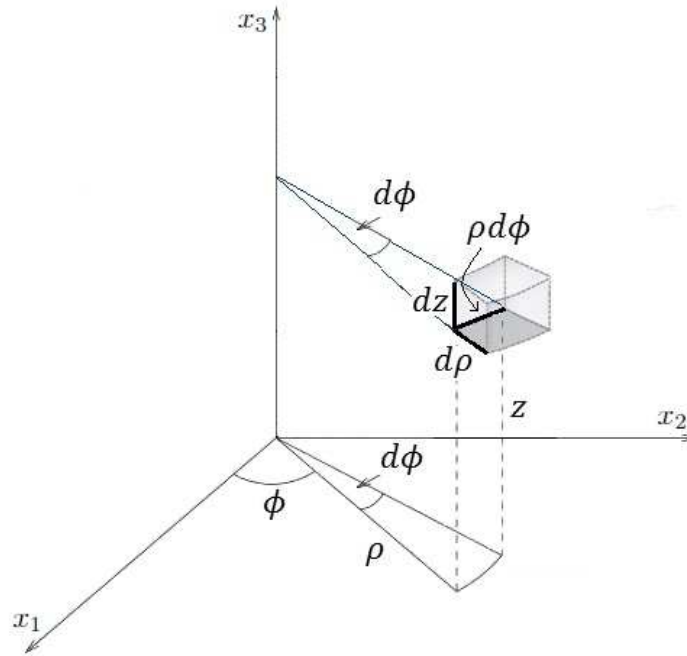


Figura 2: Sistema de coordenadas cilíndrico. Destacam-se as variáveis cilíndricas (ρ, ϕ, z) e um elemento de volume $dV = \rho d\rho d\phi dz$.

Portanto, de acordo com a equação (23), os vetores base do sistema de coordenadas cilíndrico serão

$$\vec{\rho} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos\phi \hat{x}_1 + \sin\phi \hat{x}_2, \quad (80)$$

$$\vec{\phi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\rho \sin\phi \hat{x}_1 + \rho \cos\phi \hat{x}_2 \quad (81)$$

e

$$\vec{z} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \hat{x}_3. \quad (82)$$

Como o sistema cilíndrico, assim como o esférico, é ortogonal, somente os termos diagonais da métrica (equação (22)) serão não-nulos. Dessa forma, ficamos com

$$g_{11} = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} = 1, \quad (83)$$

$$g_{22} = \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = \rho^2 \quad (84)$$

e

$$g_{33} = \vec{z} \cdot \vec{z} = 1. \quad (85)$$

De posse destes resultados, a equação (26) nos permite encontrar $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$ e $h_3 = 1$. Assim, a matriz métrica para este sistema de coordenadas será

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (86)$$

cujo Jacobiano, que pode ser determinado através da equação 30, será

$$J = \sqrt{\rho^2} = \rho . \quad (87)$$

As relações que estabelecem as características do sistema de coordenadas cilíndrico foram encontradas e, com isso, temos as ferramentas necessárias para escrever as equações físicas neste sistema. Utilizaremos esses resultados na determinação das expressões dos operadores vetoriais.

Novamente iremos começar pelo vetor gradiente de uma função escalar $\Phi = \Phi(\rho, \phi, z)$. De acordo com as equações (34) e (35)

$$\nabla \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z} . \quad (88)$$

Simplificando, ficamos com

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \hat{z} . \quad (89)$$

Seguindo nossa lista, temos o divergente de uma função vetorial $\vec{v} = (v_\rho, v_\phi, v_z)$. De acordo com as equações (37) e (38) este operador pode ser escrito da seguinte maneira

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho v_\rho \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\rho v_\phi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \right) . \quad (90)$$

Realizando algumas simplificações, temos

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} . \quad (91)$$

O rotacional da função vetorial $\vec{v}$ pode ser encontrado com o auxílio das equações (42) e (43). A matriz construída como uma forma mnemônica para o cálculo do rotacional é escrita como

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{\rho} & \vec{\phi} & \vec{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_\rho & \rho v_\phi & v_z \end{vmatrix} . \quad (92)$$

A resolução do determinante é facilmente encontrado por técnicas matriciais simples. Aqui, vamos escrever os vetores direcionais, $\vec{e}_i$, em termos de seus versores unitários com o auxílio da equação (28), ou seja, $\vec{\rho} = \hat{\rho}$, $\vec{\phi} = \rho \hat{\phi}$ e $\vec{z} = \hat{z}$. Dessa forma, ficamos com

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial v_\rho}{\partial z} \hat{\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \hat{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\phi) \hat{z} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \hat{\phi} + \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} \hat{z} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_\phi) \hat{\rho} \right) . \quad (93)$$

Após algumas simplificações e agrupamento dos termos em suas respectivas direções, obtemos

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \rho \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\phi) - \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z} . \quad (94)$$

Finalmente vamos escrever o operador laplaciano de uma função escalar $\Phi = \Phi(\rho, \phi, z)$ como descrito pelas equações (47) e (48). Assim, o laplaciano fica

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) . \quad (95)$$

Realizando algumas simplificações, obtemos finalmente a expressão

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} . \quad (96)$$

Esses quatro operadores vetoriais escritos em coordenadas cilíndricas podem ser utilizados para a resolução de diversos problemas em física, como, por exemplo, encontrar o campo eletrostático de um fio de cargas ou o campo magnético produzido por um cabo coaxial transportando uma corrente. Simetria cilíndrica aparece ainda em guias de onda, com o campo eletromagnético se propagando em seu interior, e em cavidades ressonantes gerando padrões de campo com frequência específica que armazenam a energia eletromagnética [11].

6 Considerações finais

Neste trabalho desenvolvemos, através da notação indicial de Einstein, a base matemática para a construção dos operadores vetoriais gradiente, divergente, rotacional e laplaciano que são uma das principais ferramentas utilizadas na descrição e resolução de fenômenos físicos. Equações envolvendo os operadores vetoriais aparecem em quase todos os modelos matemáticos que representam a natureza e são de fundamental importância na compreensão dos fenômenos físicos. Dessa forma, saber manipular esses operadores é fundamental para todos que estudam ou trabalham com ciências exatas. Assim, acreditamos que esse desenvolvimento irá guiar, de forma clara e sucinta, a elaboração das equações sempre que as simetrias esférica ou cilíndrica forem requisitadas. Além disso, esse trabalho pode ser utilizado como material complementar nas disciplinas de Cálculo Vetorial, onde a notação indicial de Einstein nem sempre é apresentada, apesar de ser uma ferramenta muito útil tanto na representação quanto na demonstração de diversas equações.

Referências

- [1] D. J. Griffiths, “Introduction to Quantum Mechanics”, Prentise Hall, New Jersey, 1995, 3^a ed.
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Dui and F. Laloe, “Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications”, Wiley-VCH, 2019 2^a ed.
- [3] J.J. Sakurai, “Modern Quantum Mechanics: Revised Edition”, Addison-Wesley, Los Angeles, 1994.
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, “Gravitation”, W. H. Freedman and Company, San Francisco, 1973.
- [5] L. Ryder, “Introduction to General Relativity”, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [6] Moysés Nussenzveig, “Curso de Física Básica 1 - Mecânica”, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 2013, 5^a ed.
- [7] H. Goldstein, C. Poole e J. Safko, “Classical Mechanics”, Pearson Education Limited, New York, 2014.
- [8] Moysés Nussenzveig, “Curso de Física Básica 2 - Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor”, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 2013, 5^a ed.
- [9] S. R. A. Salinas, “Introdução à Física Estatística”, EDUSP, São Paulo, 2005.

-
- [10] D. J. Griffiths, “Introduction to Eletrodynamics”, Prentise Hall, New Jersy, 1999, 3^a ed.
- [11] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics”’, John Wiley & Sons, Inc., Berkeley, 1999, 3^a ed.
- [12] R. A. Medrano-Balboa, “Campos vetoriais, Espaços lineares e tensores na física”, Transtec Editorial Ltda, São José dos Campos, 1994, 1^a ed.
- [13] G. Arfken e H. Weber, “Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física”, Elsevier Editora Ltda, Rio de Janeiro, 2007, 6^a ed.
- [14] E. Butkov, “Mathematical Physics”, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1973, 1^a ed.
- [15] O. Freire Jr., O. Pessoa Jr. e J. L. Bromberg, “Teoria Quântica: estudos históricos e implicações culturais”, Editora EDUEPB, São Paulo, 2011.
- [16] Cássio C. Laranjeiras, Jojomar L. da Silva and J. R. N. Chiappin, The heuristics of representation in science: the mechanisms and mathematical principles in physics of Descartes and Fermat, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 39 (2017) e4602.
- [17] A. Melchiors e M. Soares, “História do cálculo diferencial e integral”, UNIASSELVI, Indaial/SC, 2013.
- [18] E. Lages Lima, “Análise no espaço R^n ”, IMPA, Rio de Janeiro, 2004, 1^a ed.