DOI: 10.22481/intermaths.v2i2.10099

Editorial
INTERMATHS
ISSN 2675-8318
Vol. 2, N. 2, Jul - Dez 2021, p. 14 – 22

Um convite ao estudo da Teoria das Categorias

Hugo Luiz Mariano
Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
hugomar@ime.usp.br

Juan Ferrer Meleiro
Departamento de Matemática
Universidade de São Paulo
leiro@ime.usp.br

Pode-se dizer que a Teoria das Categorias é a *sociologia das entidades matemáticas*: um objeto de estudo da Matemática é melhor compreendido através de seus relacionamentos com outros objetos de mesma espécie (i.e., na mesma *categoria*) e/ou de espécies correlacionadas (através de *funtores*).

Foi da Topologia que surgiram os movimentos que levaram à Teoria das Categorias. Dizemos "Topologia", e não "Topologia Algébrica" porque foi exatamente a passagem (da antiga Topologia *Combinatorial*) dos invariantes numéricos de espaços a invariantes topológicos que está no cerne da questão. O fato é que um morfismo entre dois espaços não oferece relação alguma entre os seus números de Betti, mas *sim* entre seus grupos de homologia (que tem os números de Betti como parâmetros). O fato das classes de homologia formarem grupos já era reconhecido desde muito cedo, mas não sua importância. Isso veio quando surgiu interesse no estudo de *mapas* entre esses espaços; e aí começou a ser possível o reconhecimento da estrutura funtorial dos invariantes homológicos.

Foram Eilenberg e Mac Lane que, em 1945, publicaram o trabalho seminal em que os conceitos fundamentais da Teoria das Categorias se condensaram numa única coisa (Eilenberg e MacLane 1945). O artigo continha nada mais além da introdução dessa nova linguagem. De fato, os autores acreditavam (visionariamente) que esse formalismo poderia ser útil em muitas outras áreas da Matemática, mas definitivamente não antecipavam o tamanho a que chegaria essa teoria.

Na verdade, pouco daquilo poderia receber o nome de "teoria"; não passava de uma linguagem. E isso é uma distinção essencial: teorias são sobre objetos de interesse, mas naquele momento as categorias, funtores e transformações naturais não eram nada mais que um vocabulário – nem mesmo podemos dizer que eram ferramentas, porque seu único propósito era explicitar certas similaridades estruturais entre certos conceitos matemáticos.

A pesquisa matemática poderia ser dividida, se nos aventurarmos em simplificações excessivas, entre *resolução de problemas* e *construção de teorias*. O solucionador de problemas é aquele matemático que ataca de frente as perguntas abertas do seu tempo; usa as ferramentas que tem disponíveis da melhor maneira possível, com o objetivo singular de responder uma pergunta. O construtor de teorias, por outro lado, é o matemático que não se conforma com conceitos mal analisados, e busca incessantemente esclarecer e simplificar; seu objetivo é criar os melhores conceitos possíveis, organizados da melhor maneira possível.

É claro que a divisão não é estrita, nem bem os termos "solucionador de problemas" e "construtor de teorias" se referem a pessoas específicas, mas sim a arquétipos. E, por mais que desejemos defender um tipo de matemática ou outro, o fato é que nenhum pode existir sem o outro. O que move um construtor de teorias são os conceitos e ferramentas criados improvisadamente pelo solucionador de problemas, e este certamente não consegue ir muito longe sem aplicar as ferramentas que vem da análise e síntese do outro.

A Teoria das Categorias não foge a essa regra. Foi no meio da tensão entre resolução de problemas e construção de teorias que surgiram os esboços do que viria a se tornar essa área. Grothendieck usou uma metáfora, já bem conhecida, do "mar ascendente", que elucida como a construção de teorias pode, de fato, resolver problemas.

É aquele sentimento de euforia, que qualquer pessoa fascinada por ciência conhece, em que um monte de coisas que antes pareciam desconexas agora são parte de um todo; que a estrutura ampla do conhecimento fica clara, e o mapa-mundi se revela. É nessa mudança de gestalt que as soluções dos problemas se tornam óbvias, e avançamos.

Mas diferentemente da Teoria de Conjuntos – e aí está o cerne da inovação –, que é identificada como uma teoria que pode ser uma base para fundar a Matemática do século XX (slogan: "tudo é conjunto"), e que é uma teoria de objetos – os conjuntos –, a teoria de categorias é uma teoria com enfase nas conexões entre objetos, e não nos objetos em si. Isto se aplica à própria teoria e se revela em conceitos como: unicidades a menos de isomorfismos; ênfase nos funtores e não nas categorias, a importância de transformações naturais nos principais conceitos da teoria. Como dizem

Paiva e Silva (2021),

> [. . .] the use of categories really allows us to connect extremely different areas of Mathematics, using simple methods.

De fato, há uma frase icônica na Teoria das Categorias que resume com clareza a espinha dorsal da teoria.

> Categorias foram definidas para definir funtores, que por sua vez foram definidos para definir transformações naturais, que foram definidas, afinal, para provar teoremas que não podiam ser provados antes.
>
> (*Categories were defined in order to define functors, which in turn were defined in order to define natural transformations, which were defined finally in order to prove theorems that could not be proved before.*)

Esses são os objetos nos quais se fundamental essa visão estrutural da Matemática: categorias, funtores e transformações naturais. As categorias são ferramentas estruturantes; são o resultado de se considerar estruturas matemáticas e morfismos entre estas em sua totalidade, como a totalidade dos conjuntos e das funções (a categoria $\mathcal{S}et$), a totalidade dos grupos e de seus homomorfismos (a categoria $\mathcal{G}r$), a totalidade dos espaços topológicos e das funções contínuas (a categoria $\mathcal{T}op$), etc. Assim, as categorias consistem de uma coleção de **objetos** entre os quais existe uma coleção de **flechas** ou morfismos que saem de um objeto e chegam em outro; além disso a cada par de flechas cuja origem de uma coincide com o término da outra podem ser compostas determinando uma flecha e esta lei de composição parcial é associativa e admite identidades. Assim a Teoria das Categorias é uma teoria das conexões e da estrutura. Portanto, tendo definido categorias, se as consideramos em sua totalidade, chegamos a um novo conceito: funtores. São os morfismos entre categorias – então as categorias como um todo formam uma nova categoria[1]! O próximo passo é claro: considerando todos os funtores entres duas categorias, quais as conexões entre eles? São, como pode já ter ficado claro, as transformações naturais. Esse processo pode continuar o quanto for necessário, mas acontece que no cotidiano costuma-se parar por aqui.

1. Há considerações de tamanho das coleções envolvidas, mas isso é um detalhe para outro momento...

Essa é a espinha dorsal, mas o real poder das categorias está nas construções universais que podem ser feitas sobre essa infraestrutura.

Para que o leitor tenha uma ideia mais precisa do que é a considerada a "parte básica" da Teoria das Categorias, algo que se firmou como um padrão estabelecido a partir do emblemático livro **CWM** (MacLane 1971) listamos seus os conceitos fundamentais, a saber: categorias; funtores (covariantes e contravariantes); transformações naturais; limites e colimites; tipos especiais de objetos (iniciais e terminais, geradores e cogeradores, injetivos e projetivos); tipos especiais de morfismos ou flechas (isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos); categorias de funtores e o Lema de Yoneda; equivalência e dualidade de categorias; adjunção e seus correlatos; teoremas de funtor adjunto.

Um exemplo do poder expressivo da linguagem categorial pode ser ilustrado a partir do conceito de grupo fundamental de um espaço. Imagine um espaço topológico qualquer, e nele escolhemos um ponto. Daquele ponto, existem inúmeros caminhos que podem ser seguidos pelo espaço e que por fim acabam voltando ao mesmo ponto. Podemos, ainda por cima, juntar caminhos: fazer um caminho, depois o outro. E, se considerarmos caminhos muito parecidos como basicamente iguais, isso dá uma estrutura algébrica aos caminhos, onde antes existia apenas estrutura geométrica/topológica. O interessante é o seguinte: caminhos que dão voltas ao redor de "buracos" no espaço são diferentes daqueles que não dão. Então, por exemplo, numa bola todos os caminhos são basicamente o mesmo (porque podemos deformá-los aos poucos, de forma contínua, até chegarmos a qualquer outro), mas numa rosquinha (um toroide), os caminhos que dão volta por dentro do buraco são essencialmente diferentes dos que dão volta ao redor dele. E agora sabemos contar buracos de qualquer espaço, por mais complexo que seja.

Mas como isso tem a ver com a teoria das categorias? A operação que associa a um espaço seu grupo fundamental é um funtor da categoria dos espaços topológicos e funções contínuas na categoria dos grupos e seus homomorfismos, $\pi_1 : \mathrm{Top} \to \mathrm{Gr}$. Isso significa que as flechas entre espaços dão origem a flechas entre essas estruturas algébricas, e tudo funciona muito bem (i.e., esta associação preserva composição e identidades). É essa relação funtorial que fornece um método algébrico para distinguir espaços topológicos: por exemplo a esfera e o toro tridimensionais não são espaços homeomorfos, pois seus grupos fundamentais podem ser calculados (com facilidade) e podemos averiguar que estes não são isomorfos.

* * *

> [...] the role of Category Theory was much more in the clarification of concepts than in the solution of problems in the early years – and this never really changed.

O papel da teoria das categorias como linguagem nunca realmente deixou de existir. Muitos dos que se consideram *categoristas*, na verdade não fazem pesquisa na teoria das categorias, mas sim usam o vocabulário e organização mental da teoria para orientar suas perguntas. Ao enquadrar o domínio de discurso em termos de objetos, morfismos, funtores, limites, *etc*, os caminhos se revelam naturalmente: Grothendieck, por exemplo, pôde descrever produtos de esquemas pois se afastou de noções conjunto-teóricas de "conjunto munido de estrutura" e se perguntou qual objeto seria um produto no sentido categorial. Em geral, investigar os limites e colimites de uma recém-definida categoria pode levar a entendimentos mais profundos daqueles objetos.

Mas, para além dessas suas aplicações originais como língua organizadora de várias áreas na intersecção da Geometria e Álgebra, a Teoria das Categorias (TC) vem encontrando várias aplicações nas mais diversas áreas, tanto dentro quanto fora da Matemática. Um movimento marcante nessa direção é a escola de pesquisadores da Applied Category Theory (ACT). Uma boa referência é o livro *Seven Sketches in Compositionality* em que é possível encontrar aplicações de conceitos categoriais em:

- Teoria das Bases de Dados
- Engenharia; design de sistemas
- Análise e processamento de sinais
- Design de circuitos
- Modelagem de comportamento e recursos de sistemas

Estes são temas que orbitam a Ciência da Computação. Mas isso não é necessário: a Física Teórica é uma área fértil para aplicação da TC, exemplificado pelo paper já icônico "Physics, Topology, Logic and Computation" (Baez e Stay 2011), ou mais recentes como *Compositional Thermostatics*

(Baez, Lynch e Moeller 2021). John Baez, inclusive, é um dos grandes proponentes da ACT, e outros pesquisadores associados organizam anualmente o congresso de Applied Category Theory, junto da escola de verão ACT Adjoint School.

Muitos desses temas são áreas de pesquisa ativa, e alguns desses matemáticos se agregam em espaços online para discutir seus pensamentos mais especulativos. Alguns desses lugares notórios são

- O n-Categorical Café, blog bastante ativo em que pessoas como Baez, Leinster, Riehl, Schulman *et al*, divulgam pensamentos ainda em formação.
(https://golem.ph.utexas.edu/category/)
- O n-Lab, organizado por Urs Schreiber, uma enciclopédia matemática, física, computacional-teórica e filosófica (talvez entre outros) focada em expressar conceitos já conhecidos na linguagem das n-categorias, uma expressiva extensão da Teoria das Categorias clássica. O site é famoso por ser quase incompreensível para os "não-iniciados", mas também pode servir de referência rápida aos que estão interessados em entender mais da teoria moderna.
(https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage)
- O Topos Institute, que tem fortes intensões de aplicar os desenvolvimentos mais atuais da TC em problemas do mundo, e que tem uma série de seminários com conteúdos de ponta.
(https://topos.institute/)

Todos esses ambientes são construções coletivas. Existem também outras mídias construídas assim. Notoriamente, tangencialmente envolvido mas pesadamente influenciado pela Teoria das Categorias é o livro *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, escrito por um coletivo de autores e inteiramente formalizado em assistentes de prova.

* * *

Há décadas, instrumentos da Teoria das Categorias têm sido utilizados por diversos grupos de pesquisadores brasileiros que atuam em diversas áreas: Teoria de Representações de Álgebras, Teoria dos Feixes e Lógica

Categorial, Computação teórica e Teoria da Prova, Geometria Diferencial, Física Teórica, entre outras.

Além da existência destes vários grupos de pesquisa informais que trabalham com instrumentos da TC, o crescente interesse da comunidade científica brasileira na área de Teoria das Categorias pode ser aferido pela existência de grupos de pesquisa formalmente constituídos no Diretório de Grupos de Pesquisa no Brasil (DGP) do CNPq: localizamos pelo menos três destes grupos, onde TC ocorre ou como tema principal[2] ou como algum dos temas de pesquisa do grupo[3].

Um outro indicador da generalização do interesse da comunidade acadêmica brasileira na área de Teoria das Categorias pode ser evidenciado pela existência de livros especializados redigidos em língua portuguesa:

- Paulo Blauth Menezes e Edward Hermann Haeusler (2001). *Teoria das Categorias para Ciência da Computação*. Editora Sagra Luzzatto
- Maico Felipe Silva Ribeiro (2021). *Teoria das Categorias para Matemáticos. uma breve introdução*. SBM

Este volume crescente de pesquisadores e pós-graduandos interessados na área e em suas aplicações possibilitou uma bem sucedida realização do 1º Encontro Brasileiro em Teoria das Categorias, 25 a 29 de janeiro de 2021 [4]. Mostra-se fundamental para a solidificação da área de TC no Brasil, tanto a realização de eventos regulares no país como o estabelecimento de conexões regulares com grupos de pesquisa bem estabelecidos no exterior.

Outro aspecto relevante que vem na direção de inserir internacionalmente a comunidade acadêmica brasileira na pesquisa em Teoria das Categorias e suas aplicações é sobre uma nova geração de estudantes "brasileiros exportados", sobretudo de 2010 em diante, e formados em centros tradicionais de pesquisa em TC na Europa, particularmente no Reino Unido e em Portugal.

* * *

2. Teoria das Categorias e Aplicações [1]
3. São os grupos
   - TecMF - Logical Reasoning [2]
   - Grupo de Pesquisa em Lógica, Conjuntos e Topologia [3]

Esperamos ter inspirado o leitor a conhecer mais sobre os encantos da Teoria das Categorias e convidamo-os a entrar em contato com pós-graduandos e pesquisadores brasileiros que trabalham, seja no Brasil ou no exterior, com esta riquíssima área da Matemática.

Links

[1]: Teoria das Categorias e Aplicações
https://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/6658141875102666

[2]: TecMF - Logical Reasoning
https://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/2984457223471556

[3]: Grupo de Pesquisa em Lógica, Conjuntos e Topologia
https://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/1335698953572967

[4]: 1º Encontro Brasileiro em Teoria das Categorias, 25 a 29 de janeiro de 2021
https://encontrocategorico.mat.br/

Referências

Baez, John C., Owen Lynch e Joe Moeller (2021). *Compositional Thermostatics*. arXiv: 2111.10315 [math-ph].

Baez, John C. e Mike Stay (2011). "Physics, Topology, Logic and Computation. A Rosetta Stone". Em: *New Structures for Physics*. Ed. por Bob Coecke. Vol. 813. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, pp. 95–174. DOI: 10.1007/978-3-642-12821-9_2. arXiv: 0903.0340 [quant-ph].

Eilenberg, Samuel e Saunders MacLane (set. de 1945). "General Theory of Natural Equivalences". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 58.2, pp. 231–294. ISSN: 00029947. DOI: 10.2307/1990284. URL: http://www.jstor.org/stable/1990284.

Fong, Brendan e David I. Spivak (2019). *Seven Sketches in Compositionality. An invitation to Applied Category Theory*. Cambridge University Press. arXiv: 1803.05316 [math.CT].

MacLane, Saunders (1971). *Categories for the working mathematician*. Vol. 5. Graduate texts in mathematics. Berlin: Springer, 262 pages. ISBN: 038790 0365. URL: https://bib-pubdb1.desy.de/record/384997.

Menezes, Paulo Blauth e Edward Hermann Haeusler (2001). *Teoria das Categorias para Ciência da Computação*. Editora Sagra Luzzatto.

Paiva, Valeria de e Samuel G. da Silva (2021). *Kolgomorov-Veloso Problems and Dialectica Categories*. arXiv: 2107.07854 [math.LO].

Ribeiro, Maico Felipe Silva (2021). *Teoria das Categorias para Matemáticos. uma breve introdução*. SBM.

Univalent Foundations Program, The (s.d.). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study. URL: https://homotopytypetheory.org/book.

|Aceito: 19 de dezembro de 2021| |Publicado: 28 de dezembro de 2021|

Breve Biografia

Hugo Luiz Mariano https://orcid.org/0000-0002-9745-2411

Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Atualmente é professor associado 2 do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP, no qual desde abril de 2018, é coordenador do Programa de Pós-graduação em Matemática do IME-USP. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em teoria das categorias, lógica matemática e teoria algébrica de formas quadráticas, atuando principalmente nos seguintes temas: teoria dos grupos especiais, aspectos topológicos e categoriais da teoria dos modelos, aplicações de lógica categorial, esboços e categorias acessíveis, categorias de lógicas.

Juan Ferrer Meleiro

Doutorando em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP (IME-USP). Sua área de especialização é a Lógica Categorial e temas vizinhos.

https://doi.org/10.22481/intermaths.v2i2.10099