DOI: 10.22481/intermaths.v3i1.10504
Licença Creative Commons
Article | Artigo

INTERMATHS
ISSN 2675-8318
Vol. 3, N. 1, Jan - Jun 2022, pp. 107 – 124

Sobre o operador de fecho, um conceito que permeia muitos e distintos tópicos matemáticos

Hércules de Araújo Feitosa

Departamento de Matemática - Unesp/Bauru, SP, Brasil

hercules.feitosa@unesp.br

Ana Claudia Golzio

Faculdade de Filosofia e Ciências - Unesp/Marília, SP, Brasil

anaclaudiagolzio@yahoo.com.br

Marcelo Reicher Soares

Departamento de Matemática - Unesp/Bauru, SP, Brasil

Reicher.soares@unesp.br

On the closure operator, a concept that permeates many and different mathematical topics

Abstract

We present the closure operators and detach several distinct topics of mathematics in which we can observe the action of these closure operators. So, we can see these operators as a trans-topic concept. Considering that these mathematics theories can be applied to so many fields, then we enhance the closure operators as a transdisciplinary notion.

Keywords: Closure operators; Bases; Generators, Deductions.

Resumo

Apresentamos o conceito de operador de fecho e destacamos vários tópicos distintos da Matemática em que podemos encontrar tais operadores de fecho. Assim, podemos ver que esses se portam como um conceito que perpassa muitos tópicos matemáticos. Considerando que estes elementos de teoria matemática são aplicados a muitos campos, reconhecemos os operadores de fecho como noção trans temático na Matemática.

Palavras-chave: Operadores de Fecho, Bases, Geradores, Deduções.

MSC (2020): 03-01.

Submetido em: 11 de janeiro de 2022 – **Aceito em**: 16 de abril de 2022

1 INTRODUÇÃO

Nós iniciamos com a apresentação da definição do operador de consequência de Tarski [1] ou operador de fecho, que foi planejado para caracterizar, através de uma função, os aspectos essenciais de um sistema dedutivo.

Axiomas de fecho foram formalizados pela primeira vez, em 1921, pelo matemático polonês Kazimierz Kuratowski, em sua tese de doutorado que abordava, entre outros tópicos, uma construção axiomática da topologia por meio dos axiomas de fecho - sua tese foi republicada de forma ligeiramente modificada em 1922 [2]. Porém, é importante mencionar que a origem da ideia de operador de fecho remonta ao século 19, nos trabalhos de E. Schröder, R. Dedekind e G. Cantor [3], e o trabalho pioneiro sobre operadores de fecho "Introduction to a form of general analysis", de Eliakim Hastings Moore [4] também merece destaque.

Por volta de 1930, Alfred Tarski [1] introduziu este conceito para destacar as noções essenciais de alguma dedução, sem precisar, de início, de uma linguagem lógica como usual. A ideia de operador de fecho foi posteriormente estudada por matemáticos como António Monteiro [5] e os trabalhos de Brown e Suszko [6] e de Bloom e Brown [7] destacam a aplicação dos operadores de fecho na lógica.

Tanto Kuratowski quanto Tarski pertenciam à famosa Escola de Matemática de Leópolis /Lviv-Varsóvia (Lwów/Lviv-Warsaw school), uma escola polonesa de pensamento matemático fundada por Kazimierz Twardowski em 1895 em Lwów (Lviv, na Ucrânia).

Seguindo motivação de Hoppmann [8] que observou a presença dos operadores de fecho em alguns tópicos matemáticos, destacamos a sua presença em muitos e distintos outros tópicos. Daremos algumas definições e caracterizações breves destes tópicos matemáticos e vamos enfatizar como eles apresentam os operadores de fecho, que não são todos idênticos.

Atendemos, assim, uma consideração de aspecto interdisciplinar dos nossos trabalhos, aqui mais especificamente inter-tópicos. Mas, considerando que estes temas matemáticos são aplicados em inúmeras áreas, então temos um conceito bastante interdisciplinar.

Por se tratar de tópicos comuns a temas distintos, então podemos destacar algumas propriedades que devem ser partilhadas por todos estes tópicos, o que configura um aspecto de Fundamentos da Matemática e de divulgação científica.

Temos como meta a prova de resultados de uma área com a motivação de resultados conhecidos em outra. Se algo novo surgir isto poderia ser muito agradável, mas se conseguirmos provas mais breves ou evidentes, entendemos que também se trata de uma melhoria relevante.

2 O OPERADOR DE CONSEQUÊNCIA DE TARSKI

Iniciamos com a definição do operador de Tarski [1], também conhecido como operador de fecho.

Dado um conjunto S, sejam $\mathcal{P}(S)$ é o conjunto das partes de S (todos os subconjuntos de S) e $A, B \subseteq S$. Um *operador de consequência* sobre S é uma função $\mathrm{C} : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ tal que:

(C_1) $A \subseteq \mathrm{C}(A)$;

(C_2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{C}(A) \subseteq \mathrm{C}(B)$;

(C_3) $\mathrm{C}(\mathrm{C}(A)) \subseteq \mathrm{C}(A)$.

O operador C formaliza a noção das consequências do conjunto ao qual ele se aplica. Então, cada conjunto está incluso nas consequências deste conjunto. Se um conjunto está incluso num segundo, então as consequências do primeiro estão inclusas nas consequências do segundo. Esta propriedade é conhecida como monotonicidade ou crescimento. Assim, a monotonicidade está presente sempre que há um acúmulo crescente de consequências. E as consequências das consequências estão já no conjunto das consequências. Depois de obtidas as consequências de um conjunto, a partir de um operador, esta operação estará fechada e não será possível obter novas consequências a partir deste conjunto com o mesmo operador. Daí, o nome de *operador de fecho*.

De acordo com (C_1) e (C_3), vale a igualdade $\mathrm{C}(\mathrm{C}(A)) = \mathrm{C}(A)$, para todo $A \subseteq S$.

Embora a definição de Tarski tenha como motivação a noção de consequência lógica, na sua generalidade, ela tem dois exemplos simples e surpreendentes. A função identidade $i : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ tal que se $A \subseteq S$, então $i(A) = A$, de qualquer conjunto, que conduz cada elemento nele mesmo, é exemplo de operador de fecho. A função que leva cada $A \subseteq S$ no conjunto S também é exemplo de operador de fecho.

O operador de consequência C sobre S é *finitário* se, para todo $A \subseteq S$:

$$(C_4) \qquad \mathrm{C}(A) = \cup\{\mathrm{C}(A_f) : A_f \text{ é um subconjunto finito de } A\}.$$

Esta é uma propriedade usual das lógicas. Se há uma dedução, então ela decorre de um subconjunto finito de dados. Uma dedução é, em geral, um procedimento finito.

Um *sistema dedutivo* ou *espaço de Tarski* é um par (S, C), em que S é um conjunto e C é um operador de consequência sobre S.

Se C é um operador de consequência sobre S, então o subconjunto A é *fechado* em (S, C) quando $C(A) = A$, e A é *aberto* quando o seu complemento relativo a S, denotado por A^C, é fechado em (S, C).

Podemos analisar este mesmo conceito com um olhar motivado pela topologia [10] e [11].

Um *espaço de fecho* ou *espaço quase topológico* é um par (S, Λ) em que S é um conjunto, $\Lambda \subseteq \mathcal{P}(S)$ e:

(i) $S \in \Lambda$;

(ii) dada uma coleção de índices I, se, para $i \in I, A_i \in \Lambda$, então $\cap_{i\in I} A_i \in \Lambda$. No conjunto Λ estão os fechados do espaço de fecho (S, Λ).

A condição (i) diz que S é um fechado de (S, Λ) e a condição (ii) que uma interseção qualquer de fechados é um fechado de (S, Λ). Como I é uma coleção qualquer, ela pode ter infinitos índices. Então esta segunda condição diz que mesmo uma interseção de infinitos fechados é ainda um fechado.

Um conjunto $B \in \mathcal{P}(S)$ é um *aberto* quando o seu complementar relativo a S, denotado por B^C, é um fechado de (S, Λ), isto é, $B^C \in \Lambda$.

Assim, podemos mostrar que se (S, Λ) é espaço de fecho, então:

(i) o conjunto vazio, Ø, é aberto no espaço (S, Λ);

(ii) toda união de abertos é um aberto de (S, Λ).

Se (S, Λ) é um espaço de fecho, então o *fecho* de A, denotado por $\bar{A}$, é o conjunto:

$$\bar{A} = \cap\{X \subseteq S : X \in \Lambda \ e \ A \subseteq X\};$$

e o *interior* de A, denotado por $\mathring{A}$, é o conjunto:

$$\mathring{A} = \cup\{X \subseteq S : X^C \in \Lambda \ e \ X \subseteq A\};$$

Assim, o fecho de A é o menor fechado que contém A e o interior de A é o maior aberto contido em A. Naturalmente, $\bar{A}$ é fechado, $\mathring{A}$ é aberto e $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$.

Poderíamos também definir espaço quase topológico (não tão natural para espaço de fecho) a partir dos abertos, como é usual se fazer no contexto dos espaços topológicos [12] e [13].

Se (S, Λ) é um espaço de fecho e definirmos uma operação $^- : \mathcal{P}(S) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$, tal que para todo $A \in \mathcal{P}(S)$ fica associado um único conjunto $\bar{A} \in \mathcal{P}(S)$, teremos o que é chamada de uma operação de fecho sobre (S, Λ); e seguirá que o par $(S, ^-)$ é um espaço de Tarski.

Por outro lado, se (S, C) é um espaço de Tarski, sobre o qual tomamos o conjunto de todos os seus fechados por Λ, então (S, Λ) é um espaço de fecho.

Logo, sistema dedutivo, espaço de Tarski, espaço de fecho e espaço quase-topológico são conceitos equivalentes e inter-definíveis.

Um espaço de fecho (S, Λ) é *vácuo* se $\mathrm{C}(\emptyset) = \emptyset$.

Veremos, a seguir, que os espaços topológicos são exemplos de espaços quase topológicos em que o conjunto $\emptyset$ é fechado e, portanto, são espaços de fecho vácuos. Por outro lado, os sistemas dedutivos ou sistemas lógicos são, em geral, não vácuos, pois devem conter teoremas e então $\mathrm{C}(\emptyset) \neq \emptyset$.

3 ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

Apresentamos agora a definição de espaço topológico e veremos que o fecho topológico é mais restritivo que o fecho dedutivo [3], [13], [14].

Um *espaço topológico* é um par (E, Ω), em que E é um conjunto não vazio e Ω é uma coleção de subconjuntos de E que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\emptyset \in \Omega$ e $E \in \Omega$;

(ii) se $A_1, \cdots, A_n \in \Omega$ $(n \geq 1)$, então $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \Omega$;

(iii) se $B \subseteq \Omega$, então $\cup B \in \Omega$.

O conjunto Ω é denominado de *topologia* e cada elemento de Ω é um *aberto* do espaço topológico (E, Ω).

Um conjunto $A \subseteq E$ é *fechado* se o seu complementar A^C é aberto. O *interior* de um conjunto $A \subseteq E$ é o maior conjunto aberto de (E, Ω) que está contido em A; e o *fecho* (topológico) de A é o menor fechado que contém A.

Os espaços topológicos constituem ambiente matemático em que são estudadas, com grande generalidade, as funções contínuas. Sendo assim, os espaços topológicos estão presentes nos muitos tópicos que tratam da continuidade e vizinhança em Matemática pura e aplicada e, assim, os operadores aí estão.

Como mencionado na Introdução, Kuratowski introduziu uma classe de operadores de fecho para caracterizar a noção de topologia. Assim, como é bastante usual na literatura sobre os espaços topológicos, também podemos definir estes espaços através dos operadores de fecho de Kuratowski.

Um *espaço de Kuratowski* é um par (E, k), em que E é um conjunto qualquer e k é uma função $k : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, denominada *operador de fecho*, tal que para cada $A, B \subseteq E$ valem:

(k_1) $A \subseteq k(A)$;

(k_2) $k(k(A)) \subseteq k(A)$;

(k_3) $k(A) \subseteq k(A \cup B)$;

(k_4) $k(A \cup B) \subseteq k(A) \cup k(B)$;

(k_5) $k(\emptyset) \subseteq \emptyset$.

Podemos observar que as condições (k_1), (k_2) e (k_3) são respectivamente as condições (C_1), (C_3) e (C_2) da definição de operador de consequência.

Como é bastante conhecido no estudo da topologia, as definições de espaço de Kuratowski e espaço topológico são equivalentes. Uma justificativa disto podemos ver, por exemplo, em Pollard e Martin [10].

Segue que, todo espaço topológico é um espaço de fecho, mas com algumas particularidades a mais. As condições (k_3) e (k_4) determinam que num espaço topológico $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$ e (k_1) e (k_5) que $k(\emptyset) =\emptyset$, que não valem, em geral, para sistemas dedutivos. Note que em geral as lógicas tem teoremas, logo $k(\emptyset) =\emptyset$ não deveria valer em geral. Por outro lado, $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$ não faz sentido para um operador de consequência de Tarski, pois estaria indicando que as premissas não interagem numa derivação lógica.

Tarski conhecia muito bem estes resultados e possivelmente os teve como motivação para sua definição de operador de consequência.

4 SISTEMAS FORMAIS E AXIOMÁTICOS

Os sistemas formais podem ser pensados como o ambiente ideal para falarmos de consequências, as quais podem ser sintáticas ou semânticas [15] e [16].

O primeiro item a compor um sistema formal S contemporâneo é sua linguagem. Ela fica determinada ao se explicitar o seu conjunto de símbolos, algumas vezes chamado de alfabeto, o qual denotamos aqui por A.

O conjunto das expressões bem formadas de A é gerado a partir do alfabeto considerando, segundo regras gramaticais precisas, todas as sequências finitas de símbolos de A ou justaposições finitas de símbolos de A.

Dentre estas expressões bem formadas, destacamos o conjunto das fórmulas, o qual denotamos por F e cujos elementos denotaremos por letras gregas minúsculas como: φ, ψ, σ.

Outro item que ocorre nos sistemas formais axiomáticos é um conjunto de axiomas ou postulados, o qual denotamos por P. O conjunto dos axiomas é subconjunto do conjunto das fórmulas.

Existem sistemas formais que não são axiomáticos e, então, não serão destacados nesta apresentação.

O último componente de um sistema formal é o conjunto R das regras de dedução. Não há sistema formal sem regras. São estas regras que possibilitam a dedução ou demonstração no sistema formal.

Num sistema axiomático, chamamos de *teorema* cada fórmula φ que:

(i) é um dos axiomas de S; ou

(ii) é conclusão de uma regra de dedução de R em que as hipóteses são teoremas de S.

Assim, um sistema formal S pode ser caracterizado como uma quádrupla S=(A, F, P, R), em que:

(i) A é um conjunto, frequentemente enumerável, de símbolos, o alfabeto de S. Uma sequência finita de símbolos de A é uma expressão de S;

(ii) F é um conjunto de expressões bem formadas de S;

(iii) P é um subconjunto de F, o conjunto dos axiomas ou postulados de S;

(iv) R é um conjunto finito de regras entre fórmulas, as regras de dedução, tais que se $r(\varphi_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi) \in R$, então a fórmula ψ, conclusão da regra, é deduzida pela regra r de $\varphi_i,\ 1 \leq i \leq n$.

Num sistema formal ou sistema axiomático, os conceitos de dedução e demonstração são muito precisos e inequívocos. Eles caracterizam precisamente o que chamamos de *consequência sintática* ou *consequência dedutiva*.

Uma *demonstração* em S é uma sequência $\varphi_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ de fórmulas tais que, para cada i, $1 \leq i \leq n,\ \varphi_1$ é um axioma ou φ_1 é deduzida de fórmulas precedentes por alguma regra de R. Um *teorema* de S é como chamamos a última fórmula φ_n de uma demonstração. A fórmula φ_n é o teorema e o procedimento é uma demonstração de φ_n em S.

O conceito de dedução é uma leve ampliação do conceito de demonstração, de modo que toda demonstração é um caso de dedução.

Uma fórmula ψ é *deduzida* ou *derivada* em S de um conjunto Γ de fórmulas, o que é denotado por $\Gamma \vdash \psi$, se existe uma sequência $\varphi_1, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ de fórmulas de maneira que para cada $1 \leq i \leq n,\ \varphi_i$ é um axioma, ou $\varphi_i \in \Gamma$, ou φ_i é deduzido de fórmulas que ocorrem anteriormente na sequência, e φ_n é ψ. Esta sequência é uma dedução de ψ a partir de Γ. Os membros de Γ são as premissas ou hipóteses e ψ é a conclusão da dedução.

Uma fórmula ψ deduzida do conjunto vazio, isto é, Ø $\vdash \psi$, é um teorema de S e é usualmente denotado apenas por $\vdash \psi$.

Podemos apresentar uma caracterização matemática do conceito de consequência descrito acima utilizando a definição de relação de consequência.

Assim é que, se E um conjunto não vazio. Para $A \cup B \cup \{x, y\} \subseteq E$, a relação $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ é uma relação de consequência sobre E se forem válidas as condições:

(R_1) $\{x\} \vdash x$;

(R_2) $A \vdash x \Rightarrow A \cup B \vdash x$;

(R_3) $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \vdash y$.

Denotamos o sistema dedutivo dado pelo conjunto E e a relação de consequência $\vdash$ sobre E por $(E, \vdash)$.

Temos, então, que é possível construir um operador de consequência a partir do sistema dedutivo dado pelo conjunto E. Para isso, basta considerar que se $(E, \vdash)$ representa uma relação de consequência sobre E, então definimos $\mathrm{C}(A) = \{x : A \vdash x\}$, então C é um operador de Tarski sobre E.

É interessante também observarmos que a recíproca também é verdadeira, isto é, se (E, C) é um espaço de Tarski, então a relação induzida por $A \vdash x \Leftrightarrow x \in \mathrm{C}(A)$ determina uma relação de consequência E.

Mais uma vez observamos os operadores de fecho nas muitas teorias axiomáticas ou em sistemas formais, que permeiam o fazer matemático.

5 ESPAÇOS VETORIAIS

Nesta seção tratamos de subespaços vetoriais gerados por conjuntos de vetores. Consideramos conhecidos os conceitos básicos de álgebra linear, que fazem parte da formação de alunos de todos os cursos da área de exatas e, assim, nossos possíveis leitores [17] e [25].

Seja $\mathbf{V} = (V, +, \cdot, \hat{o}, 1)$ um espaço vetorial sobre um corpo K, dado um subconjunto arbitrário $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subseteq V$, então uma *combinação linear* dos elementos de S, ou abreviadamente uma combinação linear de S, é um vetor v obtido fazendo $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$, com $a_i \in K$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Notemos que, na medida que os elementos $a_i \in K$ variam, muda-se o vetor v.

O conjunto de todas as combinações lineares de S, que denotamos por $[S]$, isto é, o conjunto $[S] = \{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n : a_i \in K\}$ é um subespaço vetorial de **V**.

O subespaço $[S]$ acima é denominado *subespaço gerado* por S.

Em geral, tomamos o conjunto S como finito, mas o conjunto de todas as combinações lineares (finitas), mesmo de um conjunto infinito, é também é um subespaço de $\mathbf{V}$.

No caso em que $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, é usual também denotarmos o gerado por $[S] = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$ e temos um subespaço finitamente gerado.

Os usuais espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ são finitamente gerados. Para $\mathbb{R}^3$ um conjunto simples de geradores é a base canônica $e_1 = (1, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ sendo que o vetor nulo é $\hat{o} = (0, 0, 0)$.

Seja $\mathbf{V} = (V, +, \cdot, \hat{o}, 1)$ um espaço vetorial sobre um corpo K podemos pensar na operação:

$$[\ \ ] : \mathcal{P}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V),$$

que associa a cada subconjunto $X \subseteq V$, o subespaço vetorial gerado por X. Assim é que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{P}(V)$, são válidas:

(SG_1) $X \subseteq [X]$. Que é uma consequência imediata da definição;

(SG_2) Se $Y \subseteq Z$, então $[Y] \subseteq [Z]$. Uma vez que toda combinação linear de Y é também combinação linear de Z;

(SG_3) $[X] = [[X]]$;

(SG_4) $[Y \cup Z] = [Y] + [Z]$.

Estes resultados estão em quase todos textos de álgebra linear.

A partir deles, como uma inter-relação com a álgebra dos operadores de consequência, estipulamos uma álgebra dos subespaços de um espaço vetorial **V** qualquer.

As condições (SG_1), (SG_2) e (SG_3) mostram que a operação $[\ \ ]$, de gerar um subespaço de **V** a partir de $S \subseteq V$, é um operador de Tarski.

Portanto, valem para este operador todas as propriedades dos operadores de Tarski.

Dessa forma, para todos $X, Y, Z \in \mathcal{P}(V)$, temos que:

(i) $[\emptyset] = \{\hat{o}\} \subseteq [X] \subseteq V$. O espaço de Tarski é não vácuo e não topológico;

(ii) cada subespaço de **V** é um fechado segundo $[\ \ ]$;

(iii) $[Y \cup Z] = [[Y] \cup [Z]]$;

(iv) em geral: $[Y \cup Z] \neq [Y] \cup [Z]$;

(v) $[Y \cap Z] = [Y] \cap [Z]$;

(vi) uma interseção qualquer de subespaços de **V** é um subespaço de **V**.

6 ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

Vamos apresentar uma definição geral de álgebra, geralmente utilizada no contexto da álgebra universal [17] e [18].

Uma *operação* n-ária sobre um conjunto não vazio A é uma função $c^A : A^n \longrightarrow A$, com $n > 0$, em que n é a *aridade* da operação.

A partir daí, definimos uma *álgebra* **A** como um par $(A, \sigma^{\mathbf{A}})$, em que A é um conjunto não vazio, chamado de universo ou suporte de **A**, e $\sigma^{\mathbf{A}}$ é uma função que atribui, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada símbolo de função c da linguagem, uma operação n-ária em A.

Uma álgebra pode ter muitas operações contempladas em $\sigma^{\mathbf{A}}$. Por exemplo na estrutura algébrica dos naturais $(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \exp)$ temos as operações de adição $(+)$, de multiplicação $(\cdot)$ e exponenciação $(\exp)$.

Algumas vezes podemos nos referir a uma álgebra $\mathbf{A} = (A, \sigma^{\mathbf{A}})$ apenas por meio de seu suporte A. Em outros contextos, o conjunto A com essa estrutura pode ser chamado de *estrutura algébrica*, sendo o termo álgebra reservado para estruturas algébricas específicas.

Se $\mathbf{A} = (A, \sigma^{\mathbf{A}})$ é uma álgebra, então um subuniverso de **A** é um subconjunto não vazio B de A que é fechado sobre as operações de **A**, isto é, sempre que $b_1, b_2, \cdots, b_n \in B$, e $c^{\mathbf{A}}$ é uma operação de **A**, então $c^{\mathbf{A}}(b_1, b_2, \cdots, b_n) \in B$.

Por exemplo, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ e as operações de adição e multiplicação de $\mathbb{N}$ são fechadas para as operações de adição e multiplicação de $\mathbb{Z}$.

Se $\mathbf{A} = (A, \sigma^{\mathbf{A}})$ e $\mathbf{B} = (B, \sigma^{\mathbf{B}})$ são duas álgebras definidas sobre uma mesma linguagem e $B \subseteq A$ é um subuniverso de **A**, então dizemos que **B** é *subálgebra* de **A** e denotamos isso por $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$.

O subuniverso de uma álgebra $\mathbf{A} = (A, \sigma^{\mathbf{A}})$ *gerado* por $X \subseteq A$ é denotado por $\mathrm{Sg}(X)$ e definido por:

$$\mathrm{Sg}(X) = \cap\{B : B \text{ é subuniverso de } \mathbf{A} \text{ e } X \subseteq B\}.$$

Notemos que todo subconjunto X de uma álgebra gera uma subálgebra, que é a menor subálgebra que contém o conjunto X, uma vez que A é um subuniverso de **A** e contém X. Segue que o conjunto $\{B : B$ é subuniverso de **A** e $X \subseteq B\}$ é não vazio, pois o próprio A pertence a esse conjunto e, portanto, $\mathrm{Sg}(X)$ está bem definido.

Dizemos que uma álgebra $\mathbf{A} = (A, \sigma^{\mathbf{A}})$ é *gerada* por $X \subseteq A$ se $\mathrm{Sg}(X) = A$.

Os operadores de fecho desempenham um papel importante na álgebra universal e, nesse contexto, eles são tradicionalmente chamados de *fechamento algébrico*. O operador de fecho de uma álgebra é uma função que associa a cada subconjunto da álgebra a subálgebra gerada por ela. Assim temos o seguinte resultado.

Teorema 6.1. *Seja $\mathbf{A} = (A, \sigma^{\mathbf{A}})$ uma álgebra, então Sg é um operador de fecho sobre* ***A****.*

A demonstração desse Teorema pode ser encontrada em Burris e Sankappana ([18], 1981, p. 33).

Da mesma forma, temos em estruturas algébricas específicas, como é o caso dos grupos, por exemplo, que o operador de fecho é a função que associa a cada subconjunto de um dado grupo o subgrupo gerado pelo mesmo.

Não precisamos tratar de cada estrutura algébrica em particular, mas este resultado se aplica a todas elas. Além disso, uma interseção qualquer de estruturas algébricas (fechos) é ainda uma estrutura algébrica (fecho).

7 FUNÇÕES RECURSIVAS

Apresentamos as funções recursivas, funções associadas a algoritmos, e veremos que para sua definição precisamos da noção de fechamento.

As definições e considerações seguintes são baseadas em Mendelson [16], Santiago, Bedregal e Aciòly [9] e Dias e Weber [19].

Inicialmente, apresentamos as funções recursivas iniciais, que são básicas para a definição da classe das funções recursivas. As funções recursivas são usadas para problemas de indecidibilidade como em [20].

Todas as funções recursivas têm como domínio e contradomínio o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ ou o produto cartesiano deste, isto é, são funções $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}^k$.

Sejam $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ números naturais quaisquer, isto é, $x, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$. As funções recursivas iniciais, ou básicas, são:

(i) Função nula: $N(x) = 0$;

(ii) Função sucessor $S(x) = x + 1$;

(iii) Funções de projeção $P_i^n(x_1, \cdots, x_n) = x_i$, com $1 \leq i \leq n$.

Estas funções são evidentemente simples de serem calculadas. A seguir, definimos três operações (regras) que serão usadas para a obtenção de novas funções recursivas. Iniciamos com a operação de composição.

Se g é uma função recursiva, de aridade m, e $h_1, \cdots, h_m$ são funções recursivas, todas de aridade n, então fé a função obtida por composição a partir das funções a partir das funções g e $h_1, \cdots, h_m$ quando:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g(h_1(x_1, \cdots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Certamente a função f é de aridade n. No caso em que temos apenas a função h_1, então temos o caso usual de composição encontrado já no ensino médio $f = goh_1$.

Agora a segunda operação, a operação de recursão.

Se g é uma função recursiva de aridade n e h é uma função recursiva de aridade $n+2$, então a função recursiva f de aridade $n+1$ é obtida por recursão a partir das funções g e h quando:

$$f(x_1,\cdots,x_n,0)=g(x_1,\cdots,x_n).$$
$$f(x_1,\cdots,x_n,y+1)=h(x_1,\cdots,x_n,y,f(x_1,\cdots,x_n,y)).$$

Com a operação de recursão podemos mostrar que muitas operações nossas conhecidas são recursivas. Por exemplo, a adição de $\mathbb{N}$:

$$+(m,0)=m+0=m$$
$$+(m,n+1)=m+(n+1)=(m+n)+1=S(+(m,n)).$$

A terceira operação para obtenção de funções recursivas é o operador de busca do menor valor. Basicamente, ele busca nos números naturais, a partir do zero, pelo primeiro número que possui uma determinada propriedade. No caso afirmativo, ele retorna tal número como saída, e no caso negativo a busca passa para o sucessor do número testado.

Chamamos esta regra de operador de *minimalização* ou *μ-operador*.

Notação 7.1. *Se g é uma função recursiva de aridade $n+1$, então o menor y para o qual:*

$$g(x_1,\cdots,x_n,y)=0 \text{ é indicado por } \mu_y(g(x_1,\cdots,x_n,y)=0).$$

Em geral, para qualquer predicado ou relação $\varphi(x_1,\cdots,x_n,y)$, denotamos por $\mu_y\,\varphi(x_1,\cdots,x_n,y)$ ao menor y para o qual a relação $\varphi(x_1,\cdots,x_n,y)$ é válida.

A função recursiva f de aridade n é obtida pelo μ-operador a partir da função recursiva g se:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\mu_y(g(x_1,\cdots,x_n,y)=0).$$

Em alguns momentos, também pode ser útil o uso do operador de *minimalização limitada*. Ao invés de buscarmos y no conjunto todo $\mathbb{N}$, estipulamos um subconjunto específico e com um limitante superior.

Notação 7.2. *Se g é uma função de aridade $n+1$, então o menor y, tal que $0\leq y<z$ e $g(x,\cdots,y)=0$, é denotado por $\mu_{y<z}(g(x,\cdots,y)=0)$.*

A função recursiva f de aridade n é obtida pelo μ-operador limitado a partir da função recursiva g se:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \mu_{y<z}(g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0).$$

Neste caso, temos um teto de busca dado pelo natural z.

Assim, como a definição anterior, isso é válido para qualquer predicado recursivo.

Podemos definir o conceito de funções recursivas a partir da definição de funções regulares.

Nos textos matemáticos usuais, uma função é uma relação definida para todos elementos do conjunto domínio, de modo que a cada argumento do domínio esteja associado a um único elemento do contradomínio. No contexto das funções recursivas, são consideradas também as funções parciais, que não estão definidas para todos os elementos de um dado domínio; e as funções usuais são chamadas de funções totais.

Uma função $g(x_1, \cdots, x_n, y)$, com $n \geq 1$, é *regular* se g é uma função total, isto é, ela é definida para todos $x_1, \cdots, x_n, y \in \mathbb{N}$, e é tal que para todos $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{N}$, existe $y \in \mathbb{N}$ de modo que $g(x_1, \cdots, x_n, y) = 0$.

A partir das funções iniciais e das regras ou operadores apresentados, conseguimos finalmente apresentar uma definição para as funções recursivas.

A classe das *funções recursivas* é a menor classe de funções $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}^k$ que contém as funções iniciais e é fechada para as operações de composição, recursão e a aplicação do μ-operador a funções regulares.

Podemos definir também a classe das funções recursivas parciais.

A classe das *funções recursivas parciais* é a menor classe de funções $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{N}^k$ que contém as funções iniciais e é fechada para as operações de composição, recursão e a aplicação irrestrita do μ-operador.

A partir das funções recursivas, podemos mostrar que cada função constante, bem como as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, módulo e muitas outras funções aritméticas usuais são funções recursivas.

Um *predicado é recursivo* se sua função característica é recursiva.

A partir disso, podemos verificar as relações $x = y, x < y, x > y, x \geq y, x \leq y$ e $x \neq y$ são recursivas, assim como as proposições $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$ e $\neg\varphi$ quando φ e ψ são predicados recursivos.

Esta noção de fechamento da definição contempla a noção do fecho de Tarski do seguinte modo: Seja F um conjunto qualquer de funções recursivas que contenha a função identidade (que é um caso de projeção) e R um subconjunto das regras geradoras de funções recursivas, que contenha a regra de composição. Como as regras é que geram outras funções, como num sistema formal, R não pode ser vazio. R precisa conter, pelo menos, a composição, pois a outras regras são dadas a partir da composição.

Denotemos por $[\mathsf{F}|R]$ o conjunto de funções recursivas gerado por F e R.

Se G é um conjunto de funções recursivas, então $G \subseteq [G|R]$, pois cada função de G coincide com a composição dela e a função identidade. Se $G \subseteq F$, então $[G|R] \subseteq [\mathsf{F}|R]$ e, certamente, $[[\mathsf{F}|R]]$.

Além disto, se $S \subseteq R$, então $[G|S] \subseteq [G|R]$ também, que é o caso das funções recursivas e recursivas parciais.

Em 1936, Alonzo Church [21] apresentou num artigo o que chamamos de a "Tese de Church".

A Tese de Church diz que toda função algorítmica é μ-recursiva, e em sua versão mais ampla, que toda função parcial algorítmica é parcial μ-recursiva.

A recíproca parece ser bem aceita. Se uma função é μ-recursiva, deve seguir a definição acima de função μ-recursiva e, assim, respeita um algoritmo dado para a sua definição. A Tese de Church afirma a recíproca deste resultado.

Em se tratando de uma tese, não temos uma demonstração. Contudo, existe na literatura uma vasta discussão sobre ela, como por exemplo, em Carnielli e Epstein [22], que tem um bom desenvolvimento teórico sobre Computabilidade em geral e, em particular, sobre a Tese de Church.

Mais uma vez, para um tópico essencial para a Computabilidade e estudo da complexidade de algoritmos, observamos a ação dos fechos na Matemática.

8 SISTEMAS DE PEANO

Em 1888, Dedekind [23] propôs uma coleção de axiomas para os números naturais e Peano, em 1889, também publicou um trabalho em que os números naturais são apresentados em uma versão axiomática. O trabalho mostra como as propriedades dos números naturais podem ser desenvolvidas a partir de um pequeno número de axiomas. Assim este sistema de axiomas é conhecido como "Axiomas de Dedekind-Peano" ([23] e [24]).

Seja s uma função e A é um subconjunto do domínio de s. O conjunto A é *fechado* segundo s (ou para s) quando: $x \in A \Rightarrow s(x) \in A$.

Assim, se A é fechado para s, temos que $s(A) \subseteq A$.

Um *sistema de Peano* é uma terna (N, s, c) em que N é um conjunto, s é uma função $s : N \longrightarrow N$ e c é um elemento de N, tal que:

(i) c não pertence à imagem de s (isto é, $c \notin Im(s)$);

(ii) s é injetiva;

(iii) qualquer subconjunto A de N que contém c e é fechado para a função s coincide com o conjunto N.

A condição (iii) é conhecida como "postulado da indução de Peano".

A função s e o elemento c determinam uma sequência única: $c, s(c), s(s(c)), s(s(s(c)))$, $\ldots$.

O postulado da indução permite a substituição do "e assim por diante", dado pelos três pontos "$\cdots$", por uma condição precisa da teoria dos conjuntos, a qual estabelece que nenhum subconjunto próprio de N que contenha c é fechado segundo s.

Seja σ a operação de sucessor para $\mathbb{N}$, isto é:

$$\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\sigma(n) = n + 1$$

Proposição 8.1. *A terna ($\mathbb{N}$, σ, 0) é um sistema de Peano*

Um conjunto A é *indutivo* quando $0 \in A$ e é fechado para a operação sucessor, isto é, se $a \in A$, então $a + 1 \in A$.

Teorema 8.2. *O conjunto $\mathbb{N}$ é indutivo e é um subconjunto de todos os outros conjuntos indutivos.*

Decorre da caracterização de $\mathbb{N}$, via os axiomas de Peano, o *princípio da indução* para o conjunto $\mathbb{N}$, que afirma: "todo subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$ coincide com $\mathbb{N}$". Isto significa que, se $B \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $0 \in B$ e para todo $a \in B$, tem-se que $a + 1 \in B$, então $B = \mathbb{N}$.

De fato, seja B um subconjunto indutivo de $\mathbb{N}$. Assim, temos $B \subseteq \mathbb{N}$ e, de acordo com o Teorema acima, $\mathbb{N} \subseteq B$. Portanto, $B = \mathbb{N}$.

Logo, para qualquer conjunto A de números naturais, o conjunto $\mathbb{N}$ pode ser definido ou caracterizado como o menor conjunto indutivo que contém A. Vamos denotar este conjunto por $\langle A \rangle$, que é o fecho de A, e daquele tipo que para $A \subseteq \mathbb{N}$, sempre faz $\langle A \rangle = \mathbb{N}$.

Segue que, para $A = \{0\}$ temos $\langle A \rangle = \langle \{0\} \rangle = \mathbb{N}$, ou seja, o menor con-junto indutivo que contém o natural zero é o próprio $\mathbb{N}$.

Mais um tópico relevante da Matemática em que o uso do completamento se faz presente. Por termos uma abordagem axiomática todos os resultados do sistema decorrem dos axiomas, o que nos conduz à ideia de um sistema de fecho. Mas também numa caracterização do conjunto infinito dos naturais temos a ação de um fecho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma característica de todos os sistemas apresentados aqui é que se S é um desses sistemas e $A \subseteq S$, então o fecho de A, $\mathrm{C}(A)$, é a interseção de todos os fechados que contêm A. Esse é um resultado bastante geral, ligado ao conceito de operador de consequência de Tarski, que está presente nos espaços topológicos, nos sistemas axiomáticos, nos espaços vetoriais, nas estruturas algébricas, nas funções recursivas e também nos sistemas de Peano.

Temos como um desafio encontrar outros tópicos matemáticos em que comparece esta noção de operador de fecho.

Esta presença constante da noção de fecho na Matemática enaltece a própria concepção do conceito, que busca por formalizar o aspecto dedutivo da Matemática. Mas ele também destaca os processos gerativos, muito frequentes na Matemática, dados pelas bases, geradores, fechamento, construções recursivas e indutivas, que realçam o fazer passo a passo, do básico para o mais elaborado, com vistas em processos algorítmicos.

Algo que ainda gostaríamos de enfrentar é um tratamento de caráter universal dos tópicos de bases, geradores e fechos na Matemática, para além dos elementos desenvolvidos em álgebra universal.

Um outro aspecto que devemos enfatizar diz respeito à propriedade da monotonicidade. Como foi colocado, temos que o operador de consequência de Tarski satisfaz a propriedade (C_2), isto é, $A \subseteq B \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$. Essa propriedade também é conhecida como monotonicidade e ela indica que o operador de consequência é uma função crescente. Isso significa que nos sistemas de fecho que possuem essa propriedade, uma vez que um elemento seja obtido ou um resultado seja alcançado a partir de certa configuração, sua presença não precisa ser examinada novamente à luz de novas situações.

Em sistemas não-monotônicos, bastante utilizados na Computação, quando eliminamos um dado do sistema, podemos precisar rever todos os resultados obtidos no sistema cuja obtenção dependa do dado eliminado, para se garantir que continuam válidos mesmo sem aquele. Assim a eliminação de um único dado do sistema pode ser bastante custoso pois, rever as justificativas de cada membro que permanece, pode exigir mais tempo e espaço de armazenamento do processo. Gostaríamos de tratar também dos operadores de fecho, neste viés de visão geral, com restrições sobre a monotonicidade, isto é, de operadores de fecho não monotônicos.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi apoiado pela Fundação de Amparo à pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP [números do processo: 2019/08442-9].

REFERÊNCIAS

[1] A. Tarski, *Logic, semantics, metamathematics* 2nd. ed., J. Corcoran (Ed.). Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983.

[2] K. Kuratowski, "Sur l'opération A de l'analysis situs", *Fundamenta Mathematicae*, v. 3, n.1, pp. 182–199, 1922.

[3] C. E. Aull e R. Lowen, Eds., *Handbook of the history of general topology*, 1, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0468-7

[4] E. H. Moore *Introduction to a form of general analysis*. New Haven Mathematical Colloquium, Yale University Press, pp. 1–150, 1910.

[5] A. Monteiro, "Caractérisation de l'opération de fermeture par un seul axiome", *Portugaliae mathematica*, v. 4, n. 4, pp. 158–160, 1945.

[6] D. J. Brown and E. Suszko, Abstract logics. *Dissertationes Mathematicae*, v. 102, p. 7–42, 1973.

[7] S. L. Bloom and D.J. Brown, Classical abstract logics, *Dissertationes Mathematicae*, v. 102, p. 43–51, 1973.

[8] A. G. Hoppmann, *Fecho e imersão*. Rio Claro: Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, 1973. (Tese de Doutoramento em Matemática).

[9] Santiago, R. H. N, B. R. C. Bedregal and B. M. Acióly, Interval Representa-tions, em "Seleta do XXVI CNMAC" (E.X.L. de Andrade et al., eds.), *TEMA – Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 5, n. 2, pp. 317– 326, SBMAC, 2004.

[10] S. Pollard and N. M. Martin, *Closure spaces and logic*. Norwell: Kluwer, 1996.

[11] R. Wójcicki, *Theory of logical calculi: basic theory of consequence operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988. (Synthese Library, v. 199).

[12] H. A. Feitosa, M. C. Nascimento and M. R. Soares, Models for the logic of Tarski consequence operator. *In*: Cezar A. Mortari (Org.). *Tópicos de lógicas não clássicas*. Florianópolis: NEL/UFSC, v. 1, pp. 125–137, 2014.

[13] H. A. Feitosa, M. C. Nascimento and L. H. C. Silvestrini, "Confrontando propriedades lógicas em um contexto de lógica universal". *Cognitio: revista de filosofia*, v. 15, n. 2, pp. 1–16, 2014.

[14] E. L. Lima, *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. (Textos Universitários)

[15] J. L. Bell, *A course in mathematical logic*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1977.

[16] E. Mendelson, *Introduction to mathematical logic* 3. ed. Monterey, CA: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1987.

[17] H. A. Feitosa, M. C. Nascimento, *Estruturas Algébricas*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2013.

[18] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*. New York, NY: Springer, 1981.

[19] M. F. Dias and L. Weber, *Teoria da recursão*. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

[20] A. Church, "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory", *American Journal of Mathematics*, v. 58, pp. 345–363, 1936.

[21] A. Church, "A note on the Entscheidungsproblem," *The journal of symbolic logic*, v. 1. pp. 40–41, 1936.

[22] W. A. Carnielli and R. L. Epstein, *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2006.

[23] R. Dedekind, The nature and meaning of numbers (1888). In *Essays on the Theory of Numbers*. English translation of "Was sind und was sollen die Zahlen?", Vieweg, 1888.

[24] G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Bocca, Torino, 1889.

[25] E. L. Lima, *Álgebra linear*, 7a. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. (Coleção matemática universitária).

BREVE BIOGRAFIA

Hércules de Araújo Feitosa https://orcid.org/0000-0003-0023-4192

Formado em Matemática pela Fundação Educacional de Bauru (1984), mestre em Fundamentos da Matemática pela Universidade Estadual Paulista - UNESP - IGCE (1992) e doutor em Lógica e Filosofia da Ciência pela Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP - IFCH (1998). Desde 1988, trabalha na UNESP, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, Campus de Bauru. Atualmente é Professor Doutor credenciado no Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UNESP - FFC - Marília. Possui experiência acadêmica no ensino de Lógica e Fundamentos da Matemática e suas investigações científicas são direcionadas para lógica, traduções entre lógicas, modelos algébricos, quantificadores e lógicas não clássicas.

Ana Claudia Golzio https://orcid.org/0000-0003-3185-7552

Doutora em Filosofia pelo Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Universidade Estadual de Campinas (CLE/Unicamp, Campinas) em 2017 e em 2018 foi pesquisadora de pós-doutorado no CLE/Unicamp, com apoio financeiro do CNPq. Atualmente é pesquisadora de pós-doutorado no Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Estadual Paulista (UNESP, Marília), com apoio financeiro da FAPESP. Ela participa do projeto “Entendendo a opinião e a dinâmica da linguagem usando dados massivos”, que também conta com apoio financeiro da FAPESP e seu atual interesse de pesquisa é sobre tópicos de lógica fuzzy, inteligência artificial, mineração de dados, informações, complexidade e Big Data. Atualmente, é editora assistente da revista internacional “South American Journal of Logic”. Ela tem artigos e capítulos de livros publicados nas áreas de lógica, matemática, álgebra, computação e filosofia da ciência.

Marcelo Reicher Soares https://orcid.org/0000-0002-1996-5350

Pós-Doutorado no Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência CLE-UNICAMP (2015), é Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo - USP (2000), Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo - USP (1989) e possui Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade São Francisco (1983). Atualmente é Professor Assistente Doutor II na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP e atua como professor e orientador no Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional PROFMAT. Tem experiência, em ensino e pesquisa, na área de Análise Matemática, com ênfase em Funções Generalizadas de Colombeau. Atualmente trabalha em Fundamentos e Lógica Matemática com ênfase em Análise Non-Standard e Lógica algébrica. Participa dos Grupos de Pesquisa, certificados pelo CNPQ, ”Sistemas Adaptativos, Lógica e Computação Inteligente”e ”Lógica e Epistemologia”.