

Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos

Minimization of the sum of squares of distances to vertices in convex polygons

João Paulo Martins dos Santos ^{a,*}, Marcus Vinicius de Araújo Lima ^a, Alessandro Firmiano de Jesus ^a, Juan López Linares ^b

^aAcademia da Força Aérea, Pirassununga, SP, Brasil; ^bFaculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, Univ. São Paulo, Pirassununga, Brasil

* Correspondence: jp2@alumni.usp.br

Resumo: A minimização da soma dos quadrados das distâncias entre um ponto P e os vértices de um polígono convexo, ponderadas por constantes não negativas é discutida neste artigo. Inicialmente, o processo de minimização é aplicado a triângulos não degenerados e, em seguida, um conjunto discreto de pontos. Em ambos os casos, os resultados analíticos, utilizando Cálculo Diferencial, são apresentados em detalhe em conjunto com representações gráficas das respectivas soluções por meio do *software* GeoGebra. Estas, por sua vez, utilizam recursos de cores dinâmicas e possibilitam visualizar e explorar os resultados geométricos e ilustrar os pontos de mínimo.

Palavras-chave: Centro de massa; Centróide; Baricentro; Funções de duas variáveis.

Abstract: The minimization of the sum of squares of the distances between a point P and the vertices of a convex polygon, weighted by non-negative constants is discussed in this article. Initially, the minimization process is applied to non-degenerated triangles, and then a discrete set of points as vertices of a convex polygon is analyzed. In both cases, the analytical results, using Differential Calculus, are presented in detail together with graphical representations of the respective solutions by means of the *software* GeoGebra. These, in turn, use dynamic color features and make it possible to visualize and explore geometric results and illustrate the minimum points.

Keywords: Center of mass; Centroid; Barycenter; Two-variable functions.

Classification MSC: 00A69; 00A79

1 Introdução

O baricentro de um triângulo tem a propriedade, entre outras, de ser o ponto interior ao triângulo cujas somas dos quadrados das distâncias aos vértices é mínima [1], [2]. Considerando que massas iguais são colocadas em cada vértice, o baricentro e o centro de massa de um triângulo coincidem. Em uma situação mais geral, é possível considerar massas pontuais distintas em cada vértice do triângulo e, neste caso, o problema de minimização das somas dos quadrados das distâncias aos vértices, ponderadas pelas massas pontuais, determina o centro de massa do triângulo [3, p. 72]. É necessário ressaltar que o centro de massa é uma média ponderada linear das posições, importante

no estudo de translações de corpos rígidos, o qual coincide com o baricentro quando todas as massas são iguais. Por sua vez, a média ponderada quadrática das posições conduz ao conceito de momento de inércia, importante no estudo de rotações de corpos rígidos. No presente trabalho são discutidos esses mesmos problemas de minimização de somas dos quadrados das distâncias aos vértices ponderadas por constantes não negativas em polígonos convexos, estendendo parcialmente os resultados apresentados em [2]. Um elemento de complexidade é adicionado aos problemas por meio da restrição das variáveis aos lados das figuras geométricas. As soluções analíticas dos problemas de minimização são apresentadas com base nas técnicas de Cálculo Diferencial e as ilustrações gráficas, envolvendo geometria e cores dinâmicas, seguem os delineamentos mostrados em [2], [4] por meio do software de Ensino GeoGebra. A discussão é apresentada em ordem crescente de complexidade de modo a induzir o leitor à construção do resultado mais geral. A discussão é apresentada em ordem crescente de complexidade de modo a induzir o leitor à construção do resultado mais geral.

O artigo é iniciado com uma introdução e uma discussão relacionada ao centro de massa. Em seguida, o centro de massa de um triângulo ΔABC com pelo menos uma massa não nula nos vértices é tratado do ponto de vista das funções de duas variáveis x e y , $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Baseado neste caso, o problema restrito exige que os pontos (x, y) pertençam aos lados do triângulo. A seguir são apresentados e resolvidos o problema de minimização com um número de lados n e o respectivo problema restrito. Por fim, a conclusão e referências utilizadas como base para o desenvolvimento do artigo.

2 Discussão sobre Centro de Massa

Segundo [5], ao investigar o conceito de centro de massa relacionado à triângulos, é importante distinguir entre os diferentes elementos presentes: o triângulo, modelado por um arame fino homogêneo, a região triangular, modelada por uma lâmina delgada homogênea, e o conjunto de três pontos não colineares afetados por massas pontuais dispostas nos vértices. Neste artigo, o último ponto de vista é considerado e estendido para polígonos convexos, ou seja, um polígono convexo com massas pontuais dispostas nos respectivos vértices.

No contexto da geometria plana, o baricentro coincide com o centro de massa quando massas idênticas estão localizadas nos vértices de um triângulo ΔABC . Ocupa lugar de destaque entre os pontos notáveis de um triângulo e é um tema recorrente na diversidade de assuntos explorados em problemas de Olimpíadas de Matemática. Ver, por exemplo, [6] e referências. Alguns resultados associados podem ser encontrados em [7] e referências.

Um caso interessante e importante, que estende a Fórmula de Leibniz [3, p. 53], [8] para o do centro de massa de um conjunto de massas pontuais é enunciado a seguir: Seja G o centro de massa de um conjunto de massas pontuais m_i em pontos $A_i, i = 1, \dots, n$ e X um ponto arbitrário. Então,

$$\sum_{i=1}^n m_i |XA_i|^2 = \sum_{i=1}^n m_i |GA_i|^2 + (m_1 + \dots + m_n) |XG|^2,$$

em que $d(X, A) = |XA|$ denota a distância euclidiana do ponto X ao ponto A , \vec{XA} denota o vetor com origem X e extremidade A . Uma demonstração deste resultado

utilizando álgebra vetorial será apresentada a seguir considerando que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar entre dois vetores. Assim,

$$\begin{aligned} m_1|XA_1|^2 + \dots + m_n|XA_n|^2 &= m_1\langle XA_1, XA_1 \rangle + \dots + m_n\langle XA_n, XA_n \rangle = \\ &= m_1\langle XG + GA_1, XG + GA_1 \rangle + \dots + m_n\langle XG + GA_n, XG + GA_n \rangle = \\ &= m_1|XG|^2 + 2m_1\langle XG, GA_1 \rangle + m_1|GA_1|^2 + \dots + m_n|XG|^2 + 2m_n\langle XG, GA_n \rangle + m_n|GA_n|^2 \\ &= m_1|GA_1|^2 + \dots + m_n|GA_n|^2 + (m_1 + \dots + m_n)|XG|^2 + 2\langle XG, \underbrace{(m_1GA_1 + \dots + m_nGA_n)}_{=0} \rangle \\ &= m_1|GA_1|^2 + \dots + m_n|GA_n|^2 + (m_1 + \dots + m_n)|XG|^2. \end{aligned}$$

Da igualdade acima, segue que o ponto X que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos pontos A_1, \dots, A_n , ponderadas por constantes positivas m_1, \dots, m_n , é o centro de massa $G = \frac{m_1A_1 + \dots + m_nA_n}{m_1 + \dots + m_n}$. A igualdade $m_1GA_1 + \dots + m_nGA_n = 0$ (vetor nulo) pode ser obtida vetorialmente: sendo O a origem do sistema de coordenadas, o ponto G é a extremidade do vetor $OG = \frac{m_1OA_1 + \dots + m_nOA_n}{m_1 + \dots + m_n}$. Assim,

$$\begin{aligned} m_1GA_1 + \dots + m_nGA_n &= m_1(GO + OA_1) + \dots + m_n(GO + OA_n) \\ &= (m_1 + \dots + m_n)GO + m_1OA_1 + \dots + m_nOA_n \\ &= (m_1 + \dots + m_n)GO + (m_1 + \dots + m_n)OG \\ &= 0. \end{aligned}$$

No caso em que as massas são iguais, $m_1 = \dots = m_n = 1$, a Fórmula de Leibniz fica:

$$\sum_{i=1}^n |XA_i|^2 = \sum_{i=1}^n |GA_i|^2 + n|XG|^2.$$

Carneiro e Girão (2005), [9], analisam o centro de massa para explorar propriedades de alguns centros de triângulos: o baricentro, o incentro e o ponto de Nagel. De acordo com [6], a vantagem do método é permitir mostrar, de forma simples, a colinearidade do ponto de Nagel, o baricentro e o incentro, além de introduzir implicitamente o conceito de coordenadas baricêntricas. Uma referência adicional sobre o estudo do centro de massa envolvendo uma análise mais geral envolvendo integrais pode ser encontrada em [10].

Uma outra abordagem é a exploração do ponto de vista de funções de duas variáveis, nas quais o baricentro é o ponto de minimização da soma dos quadrados das distâncias aos vértices de um triângulo ΔABC com massas $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ (Alguns detalhes adicionais podem ser encontrados em [1]). Neste sentido, a função de duas variáveis $f_C : R^2 \rightarrow R$ é definida com base no conceito de distâncias ao quadrado aos vértices do triângulo e a aplicação das técnicas de Cálculo Diferencial conduzem ao baricentro. Em [2], associado ao problema do baricentro está o problema restrito que consiste na determinação do mínimo da função f_C com variáveis x e y restritas aos lados do triângulo. As respectivas soluções analíticas são ilustradas por meio da visualização das superfícies quadráticas com o GeoGebra e a introdução de um esquema de cores dinâmicas [4].

As seções apresentam os resultados relacionados à minimização da soma dos quadrados das distâncias aos vértices, ponderadas por constantes não negativas, por meio da utilização de funções de duas variáveis. Os resultados são apresentados em ordem crescente de complexidade. Primeiramente, os triângulos com massas pontuais nos vértices são considerados e, em seguida, o problema de minimização é restrito aos segmentos do triângulo. Por fim, o caso de um polígono convexo com massas pontuais nos vértices e o respectivo problema restrito são considerados. Todos os casos são ilustrados por meio do *software* GeoGebra com disponibilização das construções interativas.

3 Centro de Massa em Triângulos via Funções de duas Variáveis

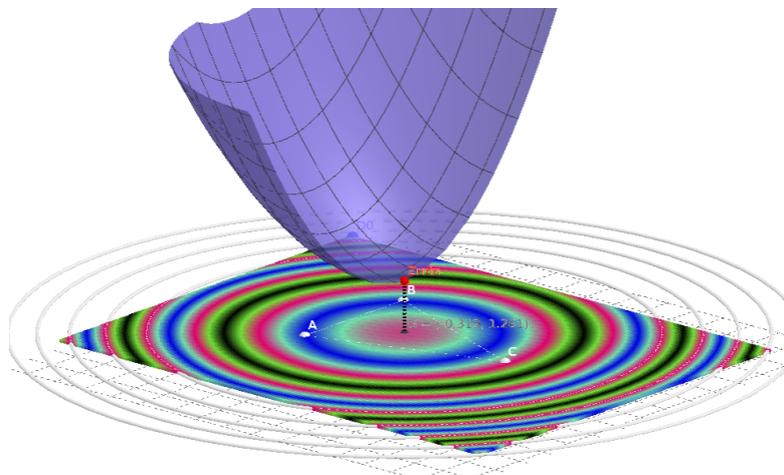
Considere um triângulo ΔABC qualquer, sejam $A_1(x_a, y_a)$, $A_2(x_b, y_b)$ e $A_3(x_c, y_c)$ as respectivas coordenadas dos vértices e m_1, m_2, m_3 constantes não negativas em que, pelos menos uma é não nula. Determine o ponto $P(x, y)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias do ponto P aos respectivos vértices, ponderadas por m_i , $d = d(x, y) = m_1 \cdot PA^2 + m_2 \cdot PB^2 + m_3 \cdot PC^2$, seja mínima. Ver [3, p. 72, 81] para mais detalhes.

A função $f_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que representa a soma dos quadrados das distâncias aos vértices ponderadas por constantes não negativas, em termos das coordenadas cartesianas de um ponto $P(x, y)$:

$$f_C(x, y) = \sum_{i=1}^3 m_i \cdot ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \quad (1)$$

A Figura 1 ilustra a função de duas variáveis da Eq. (1) no caso especial em que $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Conforme apontado em [2], o mapa de cores possui um aspecto similar às curvas de nível, porém são influenciados pelo processo de conversão de valores numéricos do esquema RGB disponível no GeoGebra. A observação da superfície, a observação dos círculos concêntricos do mapa de cores e das curvas de nível indica que um valor mínimo é atingido.

Figura 1. Superfície $z_C(x, y)$ que fornece a soma dos quadrados das distâncias aos vértices ponderadas por constantes não negativas de um triângulo ΔABC no caso especial em que $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Figura de cores dinâmicas no plano XY e curvas de nível.



Fonte: [2]

A solução pode ser obtida diretamente por meio da técnica padrão de Cálculo Diferencial. O ponto G_m fornece o mínimo de f_C é tal que $\nabla f_C(x, y) = (0, 0)$ e $\det(H) > 0$ em que H é a matriz Hessiana avaliada em G_m . Calculando, temos:

$$\frac{\partial G_m}{\partial x} = 2 \cdot m_1 \cdot (x - x_a) + 2 \cdot m_2 \cdot (x - x_b) + 2 \cdot m_3 \cdot (x - x_c) = 0,$$

$$\frac{\partial G_m}{\partial y} = 2 \cdot m_1 \cdot (y - y_a) + 2 \cdot m_2 \cdot (y - y_b) + 2 \cdot m_3 \cdot (y - y_c) = 0,$$

$$H = \det \begin{bmatrix} 2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3 & 0 \\ 0 & 2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3 \end{bmatrix},$$

que fornecem:

$$G_m = \left(\frac{m_1 \cdot x_a + m_2 \cdot x_b + m_3 \cdot x_c}{m_1 + m_2 + m_3}, \frac{m_1 \cdot y_a + m_2 \cdot y_b + m_3 \cdot y_c}{m_1 + m_2 + m_3} \right)$$

e

$$H = (2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3)^2 > 0.$$

As Figuras 3-a,b, c, d mostram o esquema de cores dinâmicas $(R, G, B) = (\alpha, \alpha/2, 2\alpha)$, [2], em que α é a soma dos quadrados das distâncias aos vértices ponderadas pelas constantes m_1, m_2, m_3 para um mesmo triângulo ΔABC . Neste caso, as cores dinâmicas indicam a similaridade com as curvas de nível e adicionam um recurso visual interessante para explorar a questão, mas é importante ressaltar que tais esquemas não representam, de fato, as curvas de nível devido à conversão do esquema de cores RGB (Ver [2] ou [4] e referências para mais detalhes).

A análise da equação mostra que um valor nulo para m_1, m_2 ou m_3 ocasiona que o ponto de mínimo sobre o segmento de reta dos outros dois vértices. Por exemplo, seja $m_1 = 0$, então:

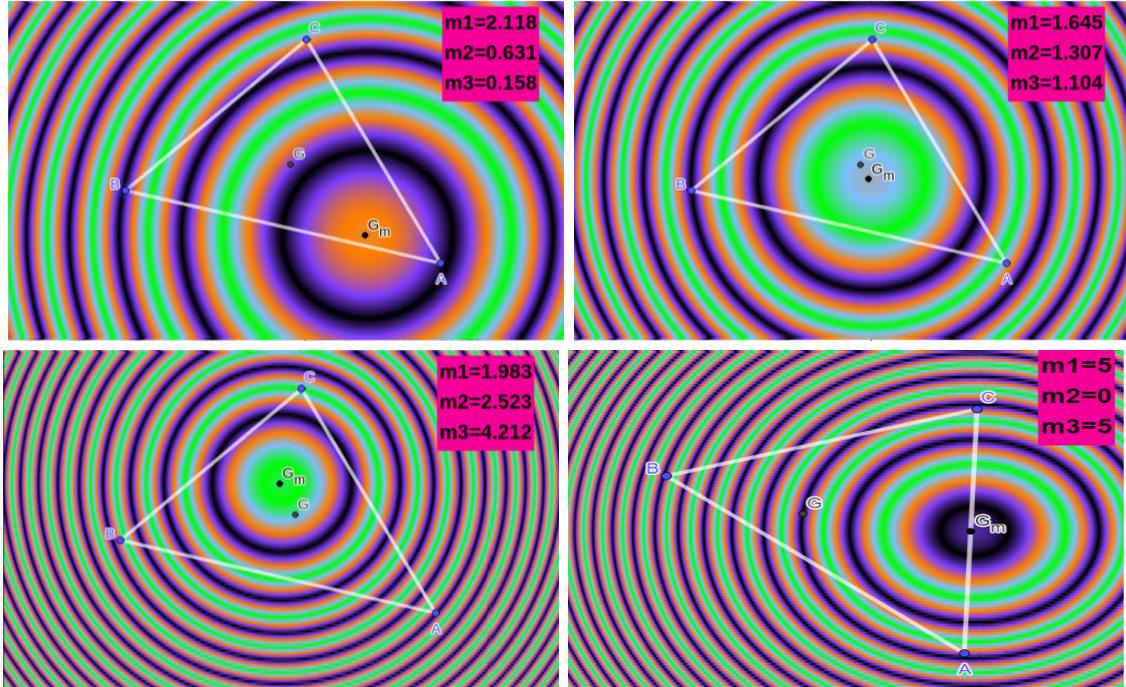
$$G_m = G = \left(\frac{(m_2 \cdot x_b + m_3 \cdot x_c)}{(m_2 + m_3)}, \frac{(m_2 \cdot y_b + m_3 \cdot y_c)}{(m_2 + m_3)} \right).$$

No caso em que dois valores são nulos, o ponto de mínimo coincide com o vértice associado ao valor não nulo. Ao considerar, três massas pontuais iguais, ou seja, $m_1 = m_2 = m_3$, a solução do problema 01 é o baricentro.

Essas observações determinam a região ocupada pelo ponto G_m : o conjunto dos pontos G_m é limitado pelos lados do triângulo ΔABC . De fato, tal resultado pode ser justificado matematicamente ao considerar uma interpretação física de que m'_i s são massas pontuais dispostas nos vértices do triângulo para, em seguida, calcular o centro de massa. Considere, sem perda de generalidade, que os vértices A e B com pesos m_1 e m_2 , então o centro de massa é dado por:

$$G_{ab} = \left(\frac{m_1 \cdot x_a + m_2 \cdot x_b}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 \cdot y_a + m_2 \cdot y_b}{m_1 + m_2} \right)$$

Figura 2. Variações das posições do ponto G_m para modificações de m_1, m_2 e m_3 com esquema de cores dinâmicas para representar a soma dos quadrados das distâncias ponderadas pelas constantes m_i^2 s. Disponível .



Este centro de massa é idêntico ao centro de massa de um segmento. Ver, por exemplo, [5] e ilustração na Figura 3.

Agora, como G_{ab} está no segmento AB e a figura é convexa, então o centro de massa de G_{ab} e C é dado por:

$$G_{gc} = \left(\frac{(m_1 + m_2) \cdot x(G_{ab}) + m_3 \cdot x_c}{m_1 + m_2 + m_3}, \frac{(m_1 + m_2) \cdot y(G_{ab}) + m_3 \cdot y_c}{m_1 + m_2 + m_3} \right) = G_m.$$

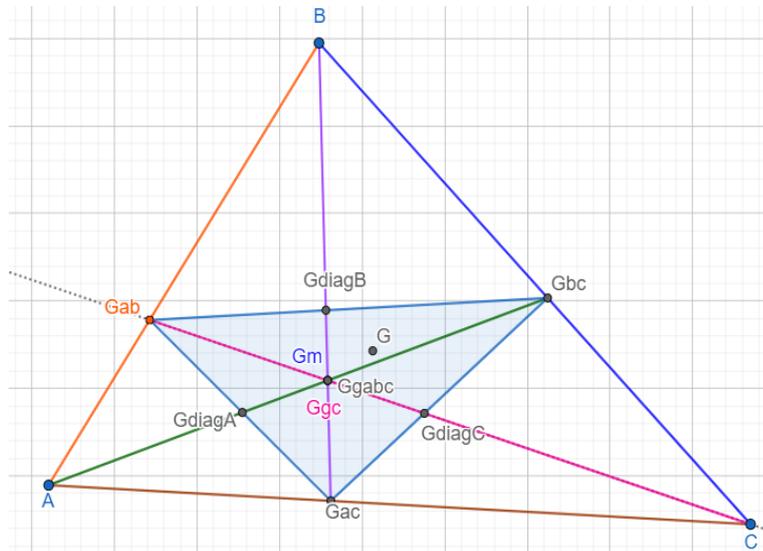
Portanto, o centro de massa, calculado dois a dois de forma sucessiva, resulta no centro de massa do triângulo ΔABC . A Figura 3 ilustra e está disponível em . Esta também ilustra os demais centros de massas dos lados AC e BC , denominados G_{ac} e G_{bc} , respectivamente.

Outro elemento interessante é o cálculo do centro de massa do triângulo $\Delta G_{ab}G_{bc}G_{ac}$:

$$G_{gabc_x} = \frac{m_{ab} \cdot x(G_{ab}) + m_{bc} \cdot x(G_{bc}) + m_{ac} \cdot x(G_{ac})}{m_{ab} + m_{bc} + m_{ac}} = \frac{m_1 \cdot x_a + m_2 \cdot x_b + m_3 \cdot x_c}{m_a + m_b + m_c}$$

$$G_{gabc_y} = \frac{m_{ab} \cdot y(G_{ab}) + m_{bc} \cdot y(G_{bc}) + m_{ac} \cdot y(G_{ac})}{m_{ab} + m_{bc} + m_{ac}} = \frac{m_1 \cdot y_a + m_2 \cdot y_b + m_3 \cdot y_c}{m_a + m_b + m_c}$$

Figura 3. Representação do centro de massa de um triângulo ΔABC com massas m_1, m_2 e m_3 e cálculos sucessivos. Disponível .



Fonte: Os autores.

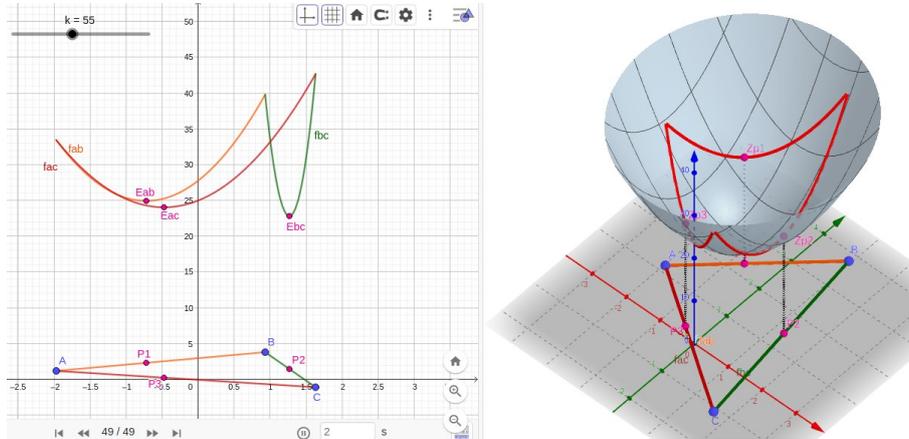
Portanto, o centro de massa do triângulo $\Delta G_{ab}G_{bc}G_{ac}$ é o centro de massa do triângulo ΔABC . No caso especial $m_1 = m_2 = m_3$, o baricentro é obtido e o triângulo $\Delta G_{ab}G_{bc}G_{ac}$, cujos vértices estão nos pontos médios do triângulo ΔABC , é denominado triângulo medial.

A próxima subseção apresenta uma modificação do problema anterior, pela imposição de restrições ao domínio de f_C . Neste caso, a solução é restrita aos valores definidos sobre os lados do triângulo.

A Restrição da função aos lados do triângulo *Considere um triângulo ΔABC qualquer, sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ as respectivas coordenadas dos vértices e m_1, m_2, m_3 constantes não negativas em que, pelos menos uma é não nula. Determine o ponto $P(x, y)$ sobre os lados do triângulo ABC tal que a soma dos quadrados das distâncias do ponto P aos respectivos vértices ponderadas por m_i , $d = d(x, y) = m_1 \cdot PA^2 + m_2 \cdot PB^2 + m_3 \cdot PC^2$, seja mínima.*

A Figura 4 ilustra o problema com restrição aos lados do triângulo ΔABC no plano XY , a função f_C com $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ e respectivas interseções dos planos perpendiculares ao plano XY e que passam pelos segmentos AB , AC e BC . Este resultado é aquele apresentado em [2] com as considerações idênticas para a representação à esquerda. Em palavras, as curvas à esquerda são redefinições da função f_C restritas aos lados com propósito de visualização no plano do triângulo. Devem, porém, ser interpretadas no sentido da superfície 3D, ou seja, o plano XY contém o triângulo, enquanto o eixo Z contém os valores da função.

Figura 4. Ilustração da restrição da superfície f_C aos lados do triângulo visualizada por meio de uma função de uma variável com pontos de mínimo obtidos diretamente com o GeoGebra com $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Função no espaço 3D e respectivas curvas reais. Disponível .



Fonte: [2].

A argumentação é aquela apresentada em [2]. Como a função f_C deve ser restrita aos lados do triângulo, então suponha, sem perda de generalidade, que x pertence ao segmento AB , com $x(A) < x(B)$, e seja $L_{AB}(x) = a_{ab}x + b_{ab}$ a restrição da reta passando por A e B . Caso a hipótese não seja satisfeita, então alterações convenientes devem ser realizadas.

A restrição de f_C ao lado AB pode ser visualizada pela interseção da superfície f_C com o plano passando pelos pontos A, B e $z = (x(A), y(A), f_C(x(A), y(A)))$ e pode ser obtida pela expressão Eq. (2) dada a seguir :

$$\begin{cases} f_C(x, y) = \sum_{i=1}^3 m_i \cdot ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \\ L_{AB}(x) = a_{ab} \cdot x + b_{ab}, \quad x(A) \leq x < x(B) \end{cases} \quad (2)$$

Analogamente, para os outros lados obtém-se as expressões Eq. (3) e Eq. (4):

$$\begin{cases} f_C(x, y) = \sum_{i=1}^3 m_i \cdot ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \\ L_{AC}(x) = a_{ac} \cdot x + b_{ac}, \quad x(A) \leq x < x(C) \end{cases} \quad (3)$$

e

$$\begin{cases} f_C(x, y) = \sum_{i=1}^3 m_i \cdot ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \\ L_{BC}(x) = a_{bc} \cdot x + b_{bc}, \quad x(B) < x \leq x(C) \end{cases} \quad (4)$$

As expressões anteriores podem ser colocadas em uma única expressão g_C como segue:

$$g_C = \begin{cases} f_C(x, L_{AB}(x)), & x(A) \leq x < x(B) \\ f_C(x, L_{BC}(x)), & x(B) \leq x < x(C) \\ f_C(x, L_{AC}(x)), & x(A) < x \leq x(C) \end{cases}$$

Substituindo L_{AB} , L_{AC} e L_{BC} em f_C mostrados nas expressões Eq. (2), Eq. (3) e Eq. (4), obtemos as expressões Eq. (5), Eq. (6) e Eq. (7):

$$f_C(x, L_{AB}(x)) = \sum_{i=1}^3 m_i \cdot \left((x - x_i)^2 + (a_{ab}x + b_{ab} - y_i)^2 \right) \quad (5)$$

$$f_C(x, L_{BC}(x)) = \sum_{i=1}^3 m_i \cdot \left((x - x_i)^2 + (a_{bc}x + b_{bc} - y_i)^2 \right) \quad (6)$$

$$f_C(x, L_{AC}(x)) = \sum_{i=1}^3 m_i \cdot \left((x - x_i)^2 + (a_{ac}x + b_{ac} - y_i)^2 \right). \quad (7)$$

Estas são expressões quadráticas e podem ser colocadas em forma explícita. Por exemplo, Eq. (5) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} f(x, L_{AB}(x)) &= \sum_{i=1}^3 m_i \cdot \left((x - x_i)^2 + (a_{ab}x + b_{ab} - y_i)^2 \right) \\ &= a_{AB} \cdot x^2 + b_{AB} \cdot x + c_{AB} \end{aligned} \quad (8)$$

em que a_{AB} , b_{AB} , c_{AB} são os coeficientes da expressão quadrática com valores x restritos ao segmento AB e dados por:

- i.) $a_{AB} = m_1 + m_2 + m_3 + (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_{ab}^2$;
- ii.) $b_{AB} = -2(m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3) + 2(m_1 \cdot a_{ab} \cdot (b_{ab} - y_1) + m_2 \cdot a_{ab} \cdot (b_{ab} - y_2) + m_3 \cdot a_{ab} \cdot (b_{ab} - y_3))$;
- iii.) $c_{AB} = m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + m_3 \cdot x_3^2 + m_1 \cdot (b_{ab} - y_1)^2 + m_2 \cdot (b_{ab} - y_2)^2 + m_3 \cdot (b_{ab} - y_3)^2$.

Expressões análogas à Eq. (8) podem ser obtidas para os segmentos BC e AC . De forma geral, as abscissas do vértice do segmento parabólico, quando existe, são dadas pela expressão Eq. (9):

$$x_{v_j} = - \frac{\sum_{i=1}^3 (-m_i \cdot x_i + m_i \cdot a_j \cdot (b_j - y_i))}{\sum_{i=1}^n m_i + \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot a_j^2}, \quad j = ab, ac, bc. \quad (9)$$

Note que, no caso em que $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, as expressões Eq. (9) são reduzidas às expressões obtidas em [2], Eq. (10), Eq. (11) e Eq. (12), para o problema das distâncias ao quadrado com restrições ao lado do triângulo:

$$x_{v_{ab}} = - \frac{(-2(x_1 + x_2 + x_3) + 2a_{ab}(3b_{ab} - (y_1 + y_2 + y_3)))}{2(3 + 3a_{ab}^2)}. \quad (10)$$

e

$$x_{v_{bc}} = - \frac{(-2(x_1 + x_2 + x_3) + 2a_{bc}(3b_{bc} + (y_1 + y_2 + y_3)))}{2(3 + 3a_{bc}^2)} \quad (11)$$

e

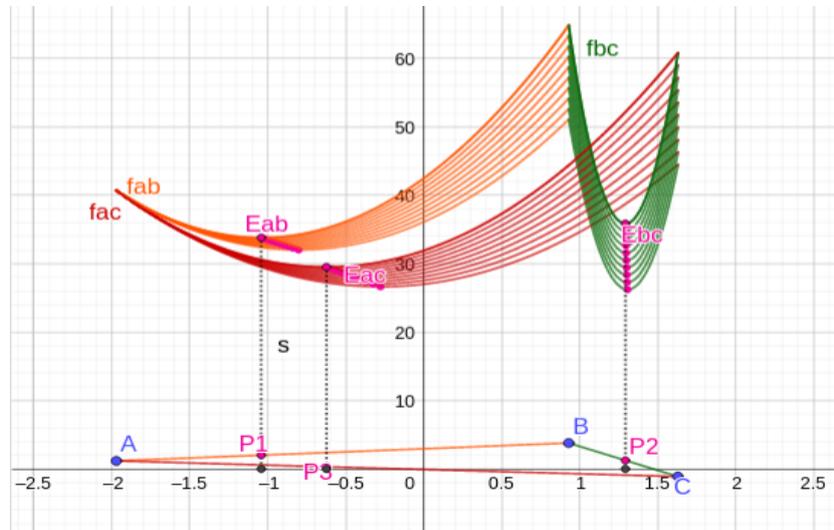
$$x_{vac} = -\frac{(-2(x_1 + x_2 + x_3) + 2a_{ac}(3b_{ac} + (y_1 + y_2 + y_3)))}{2(3 + 3a_{ac}^2)}. \quad (12)$$

As Figuras 5 e 6 mostram os segmentos parabólicos e os mínimos para variações dos parâmetros m_1 e m_2 , respectivamente. Nestes casos, todas as configurações possíveis dos parâmetros produzem pontos de mínimo pertencentes aos segmentos do triângulo ΔABC . Assim, sejam $P1(x_{vab}, L_{AB}(x_{vab}))$, $P2(x_{vbc}, L_{BC}(x_{vbc}))$ e $P3(x_{vac}, L_{AC}(x_{vac}))$ os pontos de mínimo em cada restrição. Os valores extremos em cada um dos segmentos são calculados por: $E_{ab} = f_C(P1)$, $E_{bc} = f_C(P2)$ e $E_{ac} = f_C(P3)$. Como consequência, o valor mínimo Z_{min} , para cada combinação dos parâmetros m_1, m_2, m_3 , é aquele obtido por:

$$Z_{min} = \min (\{E_{ab}, E_{bc}, E_{ac}\}).$$

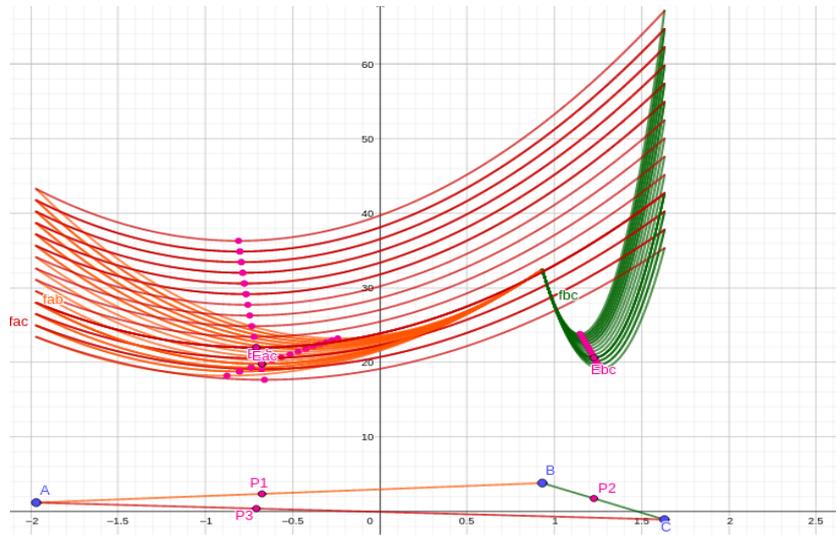
A análise das Figuras 5 e 6, com link interativo disponível , reiteram a dependência da função f_C dos parâmetros m_1, m_2 e m_3 . No primeiro caso, $0,7 \leq m_1 \leq 2,0$; $m_2 = 0,7$; $m_3 = 0,7$, enquanto que no segundo caso $m_1 = 1$; $0,7 \leq m_2 \leq 2,0$ e $m_3 = 0,7$. A Figura 5, ilustra o comportamento qualitativo das curvas no espaço do triângulo ΔABC , o qual possui a curva quadrática fornecida pela expressão Eq. (8).

Figura 5. Restrições da função f_C aos vértices de um triângulo ΔABC com variações dos parâmetros $0,7 \leq m_1 \leq 2,0$; $m_2 = 0,7$; $m_3 = 0,7$. Link interativo disponível .



Fonte: Os autores.

Figura 6. Restrições da função f_C aos vértices de um triângulo ΔABC com variações dos parâmetros $m_1 = 1; 0,7 \leq m_2 \leq 2,0; ; m_3 = 0,7$. Link interativo disponível 



Fonte: Os autores.

É possível notar a dependência dos pontos extremos em relação aos parâmetros m_1 , m_2 e m_3 . Os valores das abscissas dos vértices e respectivos valores da função f_C são apresentados e todos os pontos de mínimo ocorrem no intervalo.

O caso em que a função restrita ao lado não possui o vértice no segmento, o mínimo de f_C pode não ser atingido naquele segmento [2]. Uma manipulação do triângulo no *App* mostra que um dos pontos de mínimo pode não estar em algum dos segmentos. Nesse caso, o mínimo deve ser atingido nos demais segmentos.

4 Centro de Massa em Polígono Convexo via Funções de duas Variáveis

Considere uma polígono convexo definido pelos pontos $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, \dots , $A_n(x_n, y_n)$ e sejam m_1, m_2, \dots, m_n , $m_i > 0$ para algum i . Determine o ponto $P(x, y)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias, ponderadas por m_i , aos vértices da poligonal seja mínima.

A expressão da função $f_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que fornece a soma das distâncias ao quadrado, em termos das coordenadas cartesianas de um ponto $P(x, y)$, e ponderadas pelas constantes $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, é:

$$f_C(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \quad (13)$$

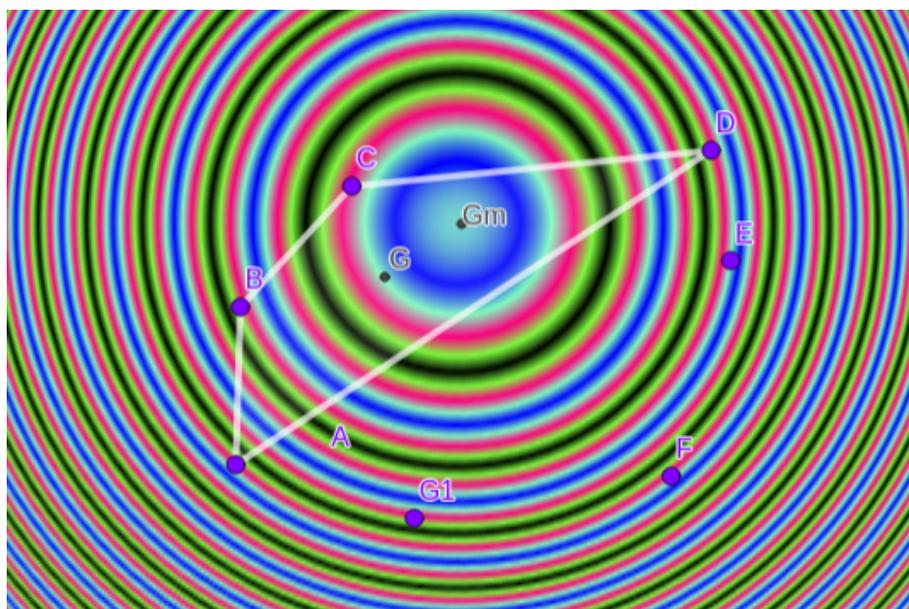
A superfície gerada por Eq. (13) é qualitativamente similar àquela da Figura 4, porém influenciada pelos valores m_i 's e pela quantidade de vértices na poligonal. As Figuras 7 e 8 ilustram dois casos especiais com link interativo disponível . Neste caso, $3 \leq k \leq 7$ é o número de lados do polígono convexo, as massas, escolhidas de forma arbitrária, são $m_i = i$, $i = 1, \dots, k$.

O App  é interativo e pode ser utilizado para obter polígonos com número de lados que variam entre 3 e 7. A somatória das distâncias ao quadrado ponderadas pelas constantes $m_i, i = 1, \dots, 7$ são calculadas por meio das funções Soma, Sequência, Distância e Elemento, disponíveis no GeoGebra.

O ponto de mínimo de Eq. (13) pode ser obtido diretamente por meio de Cálculo Diferencial, ou seja, $\nabla f_C(x, y) = (0, 0)$ e $\det(H) > 0$ em que H é a matriz Hessiana, ou seja, seguindo cálculos idênticos aos executados no caso de um triângulo.

$$\partial G_{mx} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot m_i \cdot (x - x_i) = 0 \quad \partial G_{my} = \sum_{i=1}^n 2m_i \cdot (y - y_i) = 0$$

Figura 7. Cores dinâmicas para a soma dos quadrados das distâncias dos vértices de um quadrilátero a um ponto qualquer $P(x, y)$, ponderadas por constantes m_1, m_2, m_3 e m_4 . Figura de cores dinâmicas no plano XY . Link interativo .



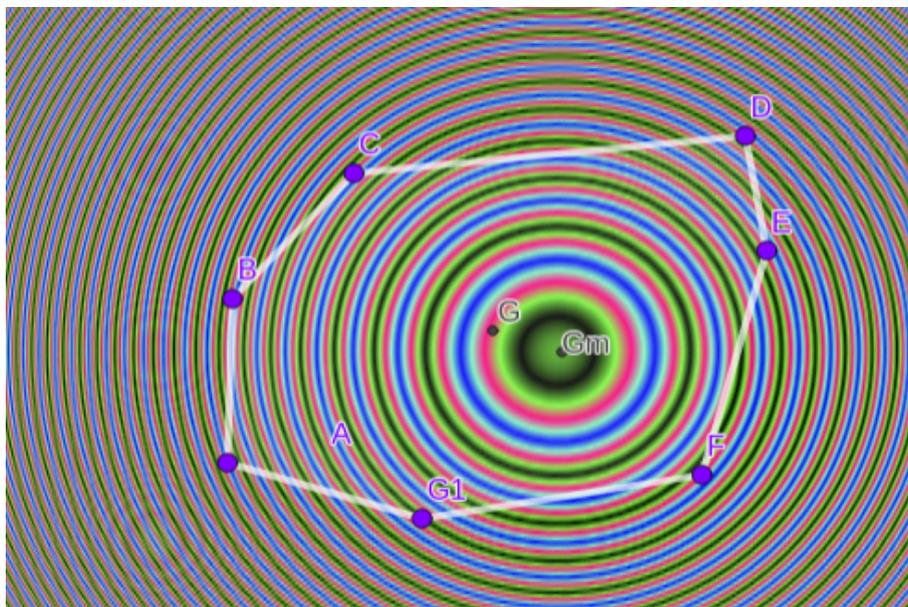
Fonte: Os autores.

$$H = \det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 2 \cdot m_i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n 2 \cdot m_i \end{bmatrix}$$

que fornecem:

$$G_m = \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) \quad H = \left(\sum_{i=1}^n 2 \cdot m_i \right)^2 > 0 \quad (14)$$

Figura 8. Cores dinâmicas para a soma dos quadrados das distâncias dos vértices de um quadrilátero a um ponto qualquer $P(x, y)$, ponderadas por constantes $m_i = i$. Figura de cores dinâmicas no plano XY .
 Link interativo .



Fonte: Os autores.

A exigência de que o conjunto de pontos forme um polígono convexo pode ser descartada, pois é necessário apenas o conjunto de pontos. No caso de polígono convexo, associa-se uma figura geométrica, mas os cálculos seriam idênticos ao caso de um conjunto discreto de pontos, cujo interesse é obter a soma dos quadrados das distâncias ponderadas por constantes não negativas. Analogamente ao caso do triângulo, o ponto de mínimo pertence ao interior do polígono, pois a aplicação recursiva do cálculo do centro de massa para triângulos resulta no centro de massa do polígono convexo.

Outro ponto interessante é observar que a função f_C é uma somatória de contribuições que podem ser particionadas de formas distintas. Considere que $A_j, j = 1, 2, \dots, k$ seja um conjunto qualquer de pontos do polígono convexo e $A_j, j = k + 1, (k + 2), \dots, n$ o respectivo complementar. Dessa forma, cada um dos conjuntos possui centro de massa dado pela aplicação de Eq. (14) aos conjuntos. Os resultados são as expressões:

$$G_{m1} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{k_j} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{k_j} m_i}, \frac{\sum_{i=1}^{k_j} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{k_j} m_i} \right); G_{m2} = \left(\frac{\sum_{i=(k+1)_j}^{n_j} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=(k+1)_j}^{n_j} m_i}, \frac{\sum_{i=1}^{k_j} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=(k+1)_j}^{n_j} m_i} \right)$$

Agora, o centro de massa entre G_{m1} e G_{m2} é dado por:

$$G_{12x} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k_{jk}} m_i \right) \cdot x(G_{m1}) + \left(\sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{jn}} m_i \right) \cdot x(G_{m2})}{\sum_{i=1}^{k_{jk}} m_i + \sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{jn}} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = G_{mx}.$$

Analogamente para a coordenada y do centro de massa:

$$G_{12y} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k_{jk}} m_i \right) \cdot y(G_{m1}) + \left(\sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{jn}} m_i \right) \cdot y(G_{m2})}{\sum_{i=1}^{k_{jk}} m_i + \sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{jn}} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = G_{my}.$$

Portanto, o processo de partição arbitrária do conjunto de pontos gera o mesmo centro de massa. Este resultado é idêntico aquele apresentado por [9], porém com contexto da função de duas variáveis. De forma geral, a partição pode ser aplicada utilizando qualquer combinação de vértices e massas associadas. Em particular, o sistema pode ser decomposto por meio de aplicações sucessivas dos resultados associados à Figura 3. De forma análoga, o centro de massa pode ser calculado para triângulos quaisquer ou combinações de segmentos, triângulos e polígonos.

A Restrição da função aos lados de um Polígono Convexo *Considere um polígono convexo definida pelos pontos $A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x_n, y_n)$ e sejam $m_1, m_2, \dots, m_n, m_i > 0$ para algum i . Suponha que $X(x, y)$ sejam restritos aos lados do polígono convexo e determine o ponto $P(x_0, y_0)$ tal que:*

$$f_C(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right)$$

seja mínima.

Como a função f_C deve ser restrita aos lados do polígono convexo, suponha, sem perda de generalidade, que $A_1(x_1, y_1)$ é tal que $x_1 \leq x_i, i = 2, 3, \dots, n$ e que exista k tal que $A_k(x_k, y_k)$ é tal que $x_k \geq x_i, i \neq k$. Assim, x pertence a um dos segmentos $[A_i A_{i+1}], i = 1, \dots, k$ ou $(A_i A_{i+1}], i = k + 1, \dots, n$. Estas condições são adotadas para generalizar o caso $n = 3$.

Analogamente ao caso $n = 3$, ilustrado na Figura 4, a restrição de f_C ao lado $A_i A_{i+1}$ pode ser visualizada pela interseção da superfície f_C com o plano passando pelos pontos A_i, A_{i+1} e $z = (x(A_i), y(A_i), f_C(x(A_i), y(A_i)))$. Matematicamente, a restrição de f_C a um segmento pode ser escrito como segue:

$$\begin{cases} f_C(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right) \\ L_j(x) = a_j x + b_j, \quad x \in I_j \end{cases}$$

em que $I_j = [x_j, x_{j+1}), i = 1, 2, \dots, k$ e $I_j = (x_{j+1}, x_n]$.

Logo, a função a ser minimizada pode ser escrita como função de uma única variável x :

$$g_C = \begin{cases} f_C(x, L_1(x)), & x \in I_1 = [x_1, x_2) \\ f_C(x, L_2(x)), & x \in I_2 = [x_2, x_3) \\ \vdots \\ f_C(x, L_k(x)), & x \in I_k = [x_{k-1}, x_k) \\ f_C(x, L_{k+1}(x)), & x \in I_{k+1} = (x_k, x_{k+1}] \\ \vdots \\ f_C(x, L_n(x)), & x \in I_n = (x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (15)$$

Uma análise das expressões Eq. (15) indica que, no plano XY , as coordenadas dos pontos são relacionadas por meio das expressões $(x, y) = (x, L_j(x))$ [2]. Logo, a variável y da função f_C pode ser substituída pelas expressões $L_j, j = 1, \dots, n$, a qual resulta em Eq. (16):

$$f_C(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot ((x - x_i)^2 + (a_j x + b_j - y_i)^2), x \in I_j. \quad (16)$$

A expansão dos termos binomiais e agrupamento das potências de x , retornam a expressão Eq. (17), restrita ao segmento I_j :

$$f(x, L_j(x)) = A_j \cdot x^2 + B_j \cdot x + C_j \quad (17)$$

em que $A_j = \sum_{i=1}^n m_i + \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \cdot a_j^2$, $B_j = \sum_{i=1}^n (-2m_i \cdot x_i + 2 \cdot m_i \cdot a_j \cdot (b_j - y_i))$ e $C_j = \sum_{i=1}^n (m_i \cdot x_i^2 + m_i(b_j - y_i)^2)$. Logo, a abscissa do vértice é dada por ⁱ:

$$x_{v_j} = -\frac{\sum_{i=1}^n (-2m_i \cdot x_i + 2 \cdot m_i \cdot a_j \cdot (b_j - y_i))}{2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n m_i + \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \cdot a_j^2\right)}. \quad (18)$$

Generalizando as ideias apresentadas em [2], é necessário notar que as expressões Eq. (18), $j = 1, 2, \dots, n$, assumem, implicitamente, que cada uma das abscissas dos vértices pertence a uma aresta do polígono. Neste caso, sejam $P_j(x_{v_j}, L_{AB}(x_{v_j}))$ as quantidades mínimas em cada restrição, então valores extremos são calculados por $E_j = f_C(P_j)$. Como consequência, o valor mínimo Z_{min} é aquele obtido por:

$$Z_{min} = \min(\{E_j, j = 1, 2, \dots, n\}). \quad (19)$$

Note que no caso em que $n = 3, m_1 = m_2 = m_3 = 1$, as expressões Eq. (10), Eq. (11) e Eq. (12) são obtidas. Também são obtidas as expressões Eq. (9) apresentadas para o caso $n = 3$ e $m'_i s > 0$.

ⁱ A abscissa do vértice de uma função quadrática da forma $p(x) = ax^2 + bx + c$ é dada por $x_v = -b/2a$.

5 Conclusões

A minimização da soma dos quadrados das distâncias aos vértices ponderadas por contantes não negativas foi explorada por meio do emprego do Cálculo Diferencial. Dois tipos de problemas foram analisados: um problema de minimização global e um problema de minimização com restrição. O problema global resulta no centro de massa de um conjunto de massas pontuais distribuídas sobre os vértices de um polígono convexo. No caso de um triângulo ΔABC , o baricentro coincide com o centro de massa quando as massas são iguais. A convexidade do polígono é necessária apenas para a definição do problema restrito, mas não é uma condição impositiva para o cálculo do centro de massa. Associado aos problemas de minimização estão os problemas em que o a minimização deve ser restrita à regiões específicas, ou seja, às arestas do polígono. Neste caso, a relação funcional entre as variáveis x e y permitiu a dedução de uma expressão quadrática envolvendo apenas uma variável, a qual possibilitou a obtenção da abscissa do vértice por meio da conhecida fórmula do vértice de parábola.

ORCID

João Paulo Martins dos Santos  <https://orcid.org/0000-0002-0957-7119>

Marcus Vinícius de Araújo Lima  <https://orcid.org/0000-0002-9173-7328>

Alessandro Firmiano de Jesus  <https://orcid.org/0000-0002-7073-2261>

Juan López Linares  <https://orcid.org/0000-0002-8059-0631>

Referências

1. Palacios-Vélez, Ó.L., Pedraza-Oropeza, F.J.A., Escobar-Villagran, B. S., *An algebraic approach to finding the Fermat–Torricelli point*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v. 46, n. 8, p.1252-1259, 2015. DOI:10.1080/0020739X.2015.1036947.
2. Dos Santos, J. P. M., Firmiano, A., López Linares, J., O. Ramalho, M. P. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra. *Intermaths*, 3(1), 70-87, 2022. DOI: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>
3. Andreescu, T., Mushkarov, O., Stoyanov, L., *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhauser, 2006.
4. Losada, R., El color dinâmico de GeoGebra, *La Gaceta de la RSME*, v. 17, n. 3, p. 525-547, 2014.
5. Alves, S., O centro de massa de um triângulo. *Revista do Professor de Matemática-RPM*, v.71. Disponível em <https://rpm.org.br/cdrpm/71/9.html>. Acesso em agos. 2022.
6. López Linares, J., Santos, J.P.M., Firmiano, A., Baricentro ou centroide: cinco problemas resolvidos das listas da Olimpíada Internacional de Matemática, *Revista de Matemática -RMAT*, v.2 pp:47-69, 2021.
7. Weisstein, E.W., Triangle Centroid. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/TriangleCentroid.html>. Acesso em agos. 2022.
8. López Linares, J. Construções passo a passo de Geometria Olímpica, Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vsfydv2v#material/qvyhjwtr>. Acessado em 08 agos. 2022.
9. Carneiro, E. Girão, F., Centro de Massa e Aplicações à Geometria, *Revista EUREKA!*, n. 21, pp:39-34, 2005. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka21.pdf>. Acesso em agos. 2005.

10. Awrejcewicz, J. (2012). Geometry of Masses. In: Classical Mechanics. Advances in Mechanics and Mathematics, vol 28. Springer, New York, NY. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3791-8_3