

Completando um álbum de figurinhas: uma análise matemática

Completing a sticker album: a math analysis

Juliano Bitencourt Padilha ^{a,*}, Lisandra Kittel Ries ^a, Rafael Henrique Eckstein ^b, Ricardo Luiz Alves ^a

^aInstituto Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brasil; ^bUniversidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis-SC, Brasil

* Correspondence: juliano.padilha@ifsc.edu.br

Resumo: Este artigo apresenta uma análise matemática referente ao objetivo de completar um álbum de figurinhas. Os resultados apresentados consideram um álbum comercialmente vendido no Brasil no ano de 2018 e buscam elucidar o quão difícil é completar tal álbum. Tais resultados foram obtidos por meio de simulação computacional, de modo que um programa em linguagem Matlab foi desenvolvido para essa tarefa. O fluxograma desse programa é apresentado ao longo do artigo. Ainda, a validade do programa é corroborada pela comparação entre um resultado por meio dele obtido com o resultado obtido por outros autores.

Palavras-chave: Matemática; Álbum; Figurinhas.

Abstract: This paper presents a math analysis regarding the objective of completing a sticker album. The presented results consider an album commercially sold in Brazil in the year 2018 and seek to elucidate how difficult it is to complete it. The results were obtained through computer simulation, so a program in Matlab language was developed for this task. The flowchart of this program is presented in the paper. The validity of the program is corroborated by the comparison between a results obtained through it with the result obtained by other authors.

Keywords: Math; Album; Stickers.

Classification MSC: 62E99; 62P99

1 Introdução

Colecionar figurinhas e completar um álbum pode trazer grande satisfação aos amantes desse *hobby*. Por outro lado, completar um álbum pode ser extremamente custoso em termos financeiros [1] e, por esse motivo, é normal colecionadores trocarem entre si figurinhas, facilitando a caminhada até o objetivo final.

No Brasil, de 4 em 4 anos, desde a década de 70, é sucesso a comercialização de álbuns com temática voltada à Copa do Mundo de Futebol. No ano de 2018, o álbum mais famoso em território nacional apresentava 682 figurinhas, sendo as mesmas vendidas em envelopes com 5 figurinhas cada [2]. Uma vez que os envelopes são velados, não cabe ao colecionador escolher quais figurinhas comprar, o que faz com que os envelopes tragam figurinhas repetidas, ou seja, que o colecionador já possui. E o que fazer com as

figurinhas repetidas? A opção inteligente, e adotada pelos colecionadores, é a troca de figurinhas entre os mesmos.

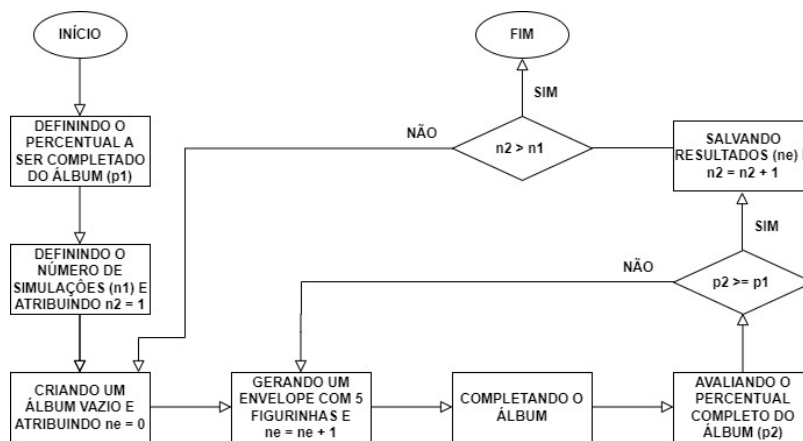
Sabendo que o mercado de trocas existe e assumindo alguns cenários, este artigo busca elucidar quantos envelopes em média um colecionador precisa adquirir para completar o álbum acima citado. A ferramenta utilizada para a obtenção dos resultados apresentados corresponde a um programa desenvolvido em linguagem Matlab. A validade do programa é corroborada pela comparação entre um resultado por meio dele obtido com o resultado obtido por outros autores [3].

2 Metodologia

Para realizar as análises, simulações computacionais foram efetuadas a partir de um programa desenvolvido em linguagem Matlab. O fluxograma desse programa é apresentado na Figura 1. Ainda, as simulações consideram cenários na qual o colecionador completou 50% ou mais do álbum exclusivamente a partir da compra de pacotes (sem utilizar o mecanismo de trocas de figurinhas durante o evento). Para cada cenário, a simulação foi realizada 10000 vezes.

Basicamente o programa desenvolvido gera envelopes contendo 5 figurinhas aleatórias, escolhidas dentre as 682 possíveis, e vai completando o álbum até atingir o percentual estipulado. Cabe destacar que a linguagem Matlab apresenta funções nativas para o uso da aleatoriedade [4].

Figura. 1. Fluxograma do programa desenvolvido



3 Resultados Obtidos

Em um primeiro momento, assumiu-se que o grau de raridade de cada figurinha é o mesmo, ou seja, da ordem de 1:682.

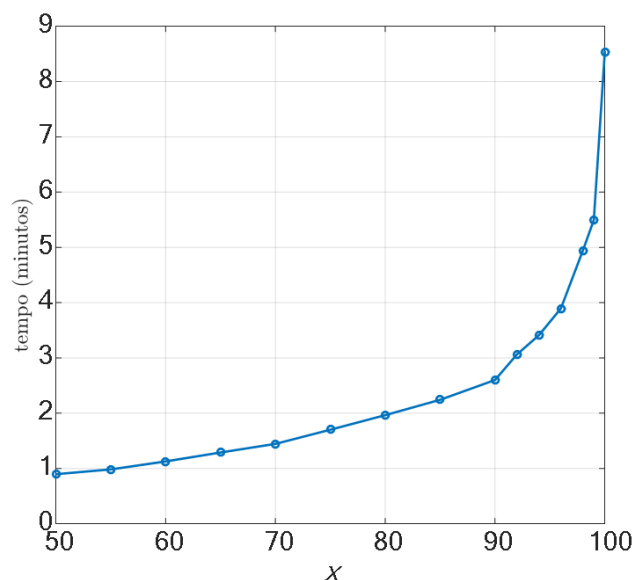
A Tabela 1 ilustra os resultados obtidos para cada situação. Na tabela, temos que x corresponde ao valor % do álbum completado exclusivamente pela compra de envelopes e \bar{y} corresponde ao total médio de envelopes necessários (com o respectivo desvio padrão (std) entre parênteses ao lado [5], [6]).

Tabela 1. Caracterização dos artigos seleccionados para abordagem da categoria 1

x	\bar{y} (std)
50	94,87 (2,88)
55	109,58 (3,45)
60	125,61 (4,01)
65	143,86 (4,76)
70	164,78 (5,50)
75	189,61 (6,66)
80	219,88 (8,10)
85	259,09 (10,23)
90	314,01 (13,64)
92	345,50 (15,60)
94	385,56 (18,70)
96	438,40 (23,71)
98	535,86 (35,61)
99	636,11 (51,80)
100	969,06 (176,70)

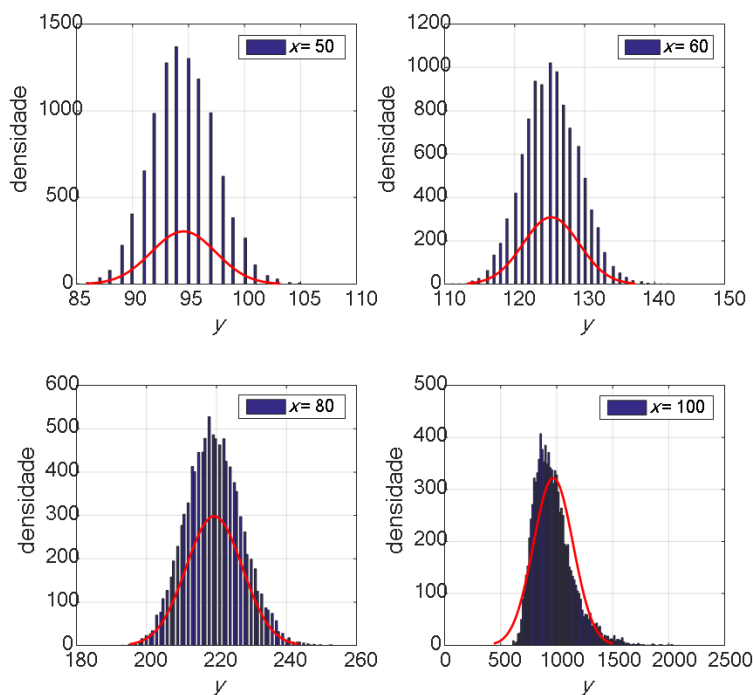
O esforço computacional em termos de tempo de execução do programa para a obtenção dos resultados presentes na Tabela 1 é ilustrado na Figura 2. Pela figura, observa-se um crescimento acentuado do tempo para valores de x acima de 90. O *hardware* utilizado constitui-se de um Core i7-6700QH com 2,60 GHz e 16,0 GB de memória RAM.

Figura 2. Esforço computacional em termos de tempo de execução do programa



A Figura 3 apresenta o resultado obtido para a distribuição de para as situações em que $x = [50, 60, 80, 100]$.

Figura 3. Distribuição de y obtida



Visando a corroborar com a validação do programa desenvolvido, as probabilidades para $x = [100]$ foram divididas para intervalos correspondentes ao número de envelopes necessários. Dessa forma, é possível comparar os resultados obtidos com os presentes na referência [3], onde outros autores também abordam o álbum aqui analisado para a situação descrita. Pela Tabela 2, é possível observar a concordância entre os resultados (a pequena diferença entre os mesmos é esperada, uma vez que o sorteio das figurinhas que compõem cada envelope envolve aleatoriedade).

Tabela 2. Percentual de colecionadores que completaram o álbum em relação ao número de envelopes comprados sem trocas de figurinhas repetidas: resultados apresentados na referência [3] e obtidos pelo programa desenvolvido

Resultado	quantidade de envelopes (intervalo)					
	[137,700]	[701,1100]	[1101,1200]	[1201,1600]	[1601,2000]	[2000,...]
Referência [3]	1,7995	79,4158	9,2990	8,9653	0,4934	0,0270
Programa	1,8130	79,4560	9,2670	8,9560	0,4860	0,0220

A Figura 4 apresenta o gráfico de \bar{y} em função de \bar{y} . Nessa figura, observa-se que a variação de \bar{y} é mais significativa para valores de x entre 90 e 100. A partir desse resultado, assumimos o comportamento da curva a partir de duas abordagens:

$$\bar{y} = c_1x + c_2 + c_3 \cdot e^{c_4 \cdot x^{c_5}} \quad (1)$$

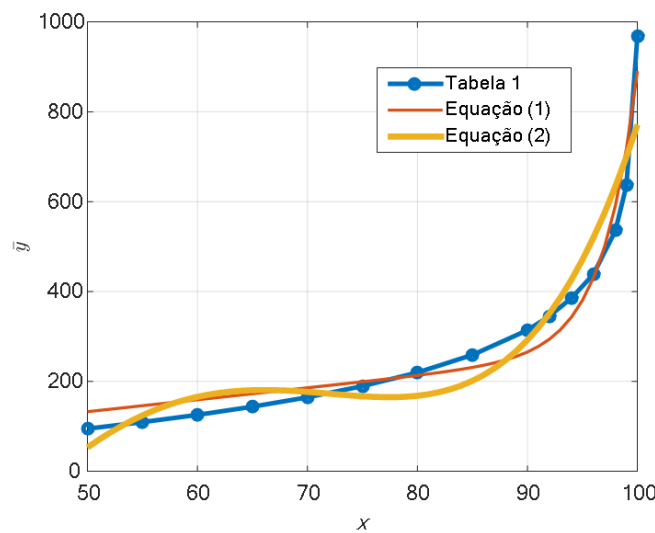
$$\bar{y} = c_1x^4 + c_2x^3 + c_3x^2 + c_4x + c_5. \quad (2)$$

Onde c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 foram parâmetros otimizados a partir da minimização do erro quadrático, obtendo-se o resultados presentes na Tabela 3.

Tabela 3. Parâmetros otimizados para as equações (1) e (2)

Equação	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	$\sum \text{erro}^2$
(1)	2,6555	$3,9246 \cdot 10^{-9}$	$3,1095 \cdot 10^{-10}$	0,1613	1,1223	$2,8898 \cdot 10^4$
(2)	$2,9215 \cdot 10^{-4}$	$6,2263 \cdot 10^{-2}$	4,3590	-97,6494	-4,9061	$7,3200 \cdot 10^4$

Figura. 4. \bar{y} em função de x



É interessante notar que o valor de c_2 obtido para a Equação (1) é desprezível, de modo que a presença ou não dessa constante na equação não interfere no resultado de \bar{y} . Assim, poderíamos reduzir para 4 o número de parâmetros a serem determinados.

Com relação à Equação (2), aproximação polinomial, o somatório dos erros quadráticos ficou superior ao obtido com (1). Também observa-se que com os parâmetros obtidos para (2), a referida equação apresenta derivada negativa para o intervalo de $x = [50, 100]$, o que não ocorre com (1).

Para uma segunda análise, considerou-se a existência de figurinhas mais raras de serem encontradas nos envelopes. Analisou-se 4 casos distintos, conforme expressos na Tabela 4. Na tabela, os graus de raridade são individuais de cada figurinha.

Tabela 4. Casos analisados considerando a presença de figurinhas mais raras

Casos	Figurinhas mais raras		Demais figurinhas	
	quantidade	grau de raridade	quantidade	grau de raridade
1	50	1:3410	632	1:641,40476
2	100	1:3410	582	1:599,58308
3	150	1:3410	532	1:556,47853
4	200	1:3410	482	1:512,03115

A Tabela 5 ilustra os resultados obtidos para os 4 casos descritos na Tabela 4. Já as Figuras 5, 6, 7 e 8 apresentam graficamente os resultados para a distribuição de y para as situações em que $x = [50, 60, 80, 100]$.

Tabela 5. Resultados obtido para os 4 casos apresentados na Tabela 3

x	caso 1	caso 2	caso 3	caso 4
	\bar{y} (std)			
50	96,88 (3,08)	99,49 (3,34)	102,71 (3,59)	106,95 (3,96)
55	112,44 (3,68)	116,03 (3,97)	120,68 (4,30)	126,89 (4,90)
60	129,46 (4,31)	134,47 (4,71)	141,01 (5,25)	150,19 (6,06)
65	149,25 (5,13)	156,22 (5,79)	165,57 (6,56)	178,92 (7,71)
70	172,22 (6,07)	182,35 (6,97)	196,02 (8,32)	216,25 (10,25)
75	200,36 (7,51)	214,82 (8,68)	236,05 (10,92)	268,65 (14,43)
80	235,74 (9,37)	258,13 (11,47)	292,33 (15,27)	348,03 (22,25)
85	283,81 (12,35)	321,79 (16,45)	385,17 (24,71)	487,44 (38,84)
90	358,76 (18,22)	436,04 (29,62)	570,58 (49,45)	736,44 (64,69)
92	406,06 (23,04)	521,78 (42,86)	706,01 (66,87)	888,60 (76,95)
94	476,14 (32,31)	663,18 (67,43)	899,98 (89,20)	1091,39 (94,03)
96	593,27 (54,31)	895,03 (103,21)	1159,54 (116,45)	1356,69 (118,13)
98	930,11 (138,55)	1369,90 (170,51)	1647,03 (176,89)	1842,72 (178,41)
99	1398,45 (244,04)	1864,41 (257,50)	2141,71 (259,06)	2339,57 (262,87)
100	3054,32 (866,78)	3534,84 (858,01)	3820,60 (877,22)	3997,23 (862,28)

Pela Tabela 5, observa-se que a presença de figurinhas raras implica no aumento do \bar{y} , um resultado intuitivamente esperado, mas demonstrado aqui em termos nominais.

Figura. 5. Distribuição de y obtida para o caso 1

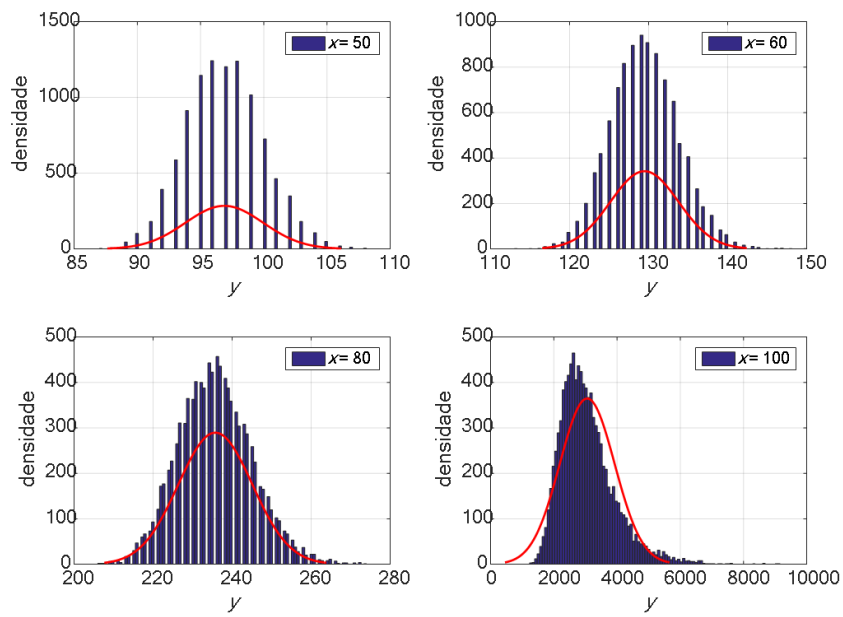


Figura. 6. Distribuição de y obtida para o caso 2

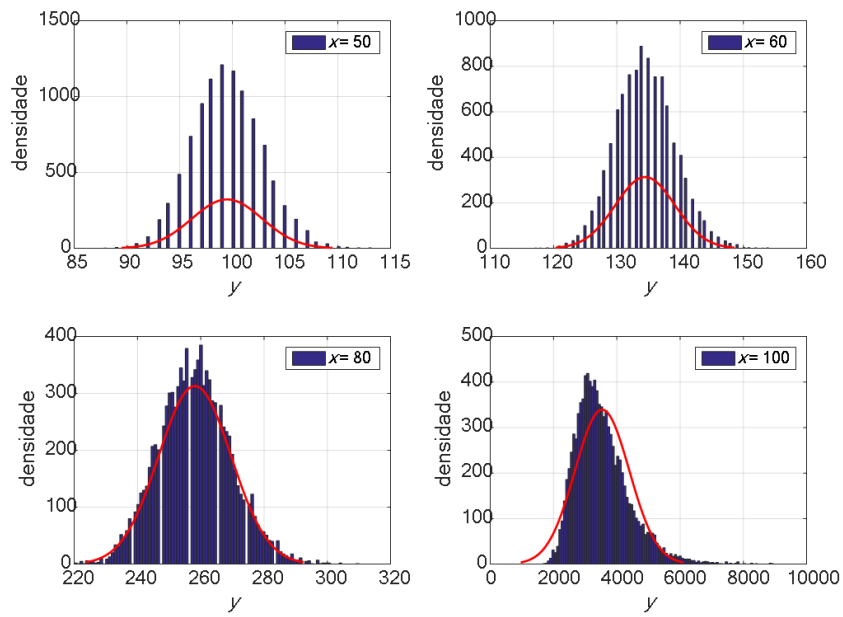


Figura. 7. Distribuição de y obtida para o caso 3

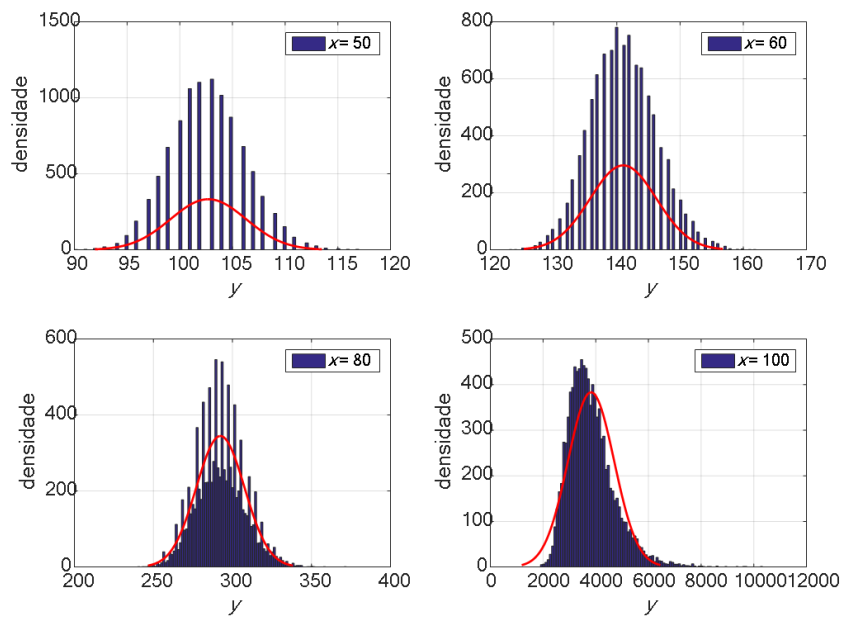
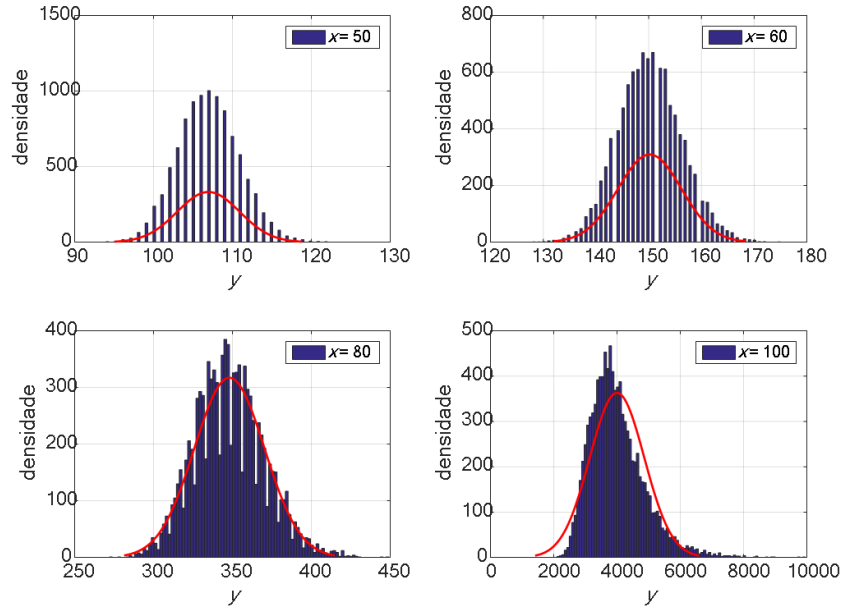


Figura. 8. Distribuição de y obtida para o caso 4

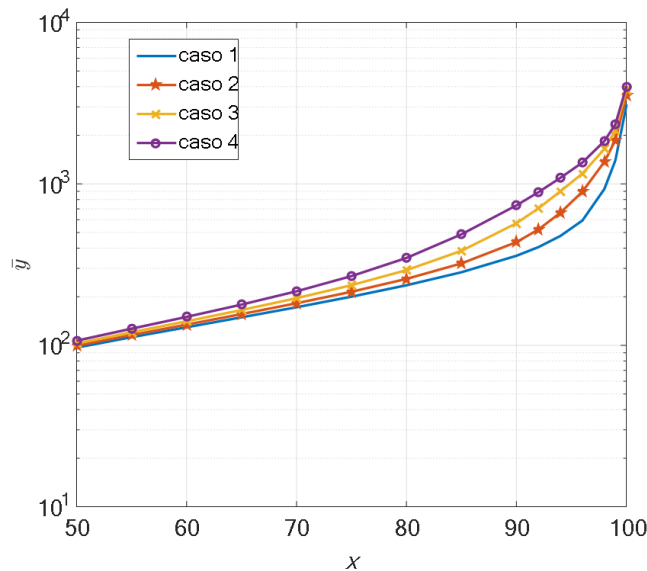


Pelas Figuras 5, 6, 7 e 8, assim como pela Tabela 5, observa-se o aumento da dificuldade em completar o álbum com a presença das figurinhas repetidas. Ainda, é interessante perceber visualmente pelas figuras que uma aderência dos resultados com uma distribuição normal para $x = [50, 60, 80]$, o que não ocorre para $x = \dots [100]$, onde as distribuições obtidas apresentam maior concentração no lado esquerdo

da normal.

A Figura 9 apresenta o gráfico de \bar{y} em função de x para os 4 casos. Observa-se que a raridade das figurinhas tem maior impacto sobre \bar{y} à medida que x aumenta (para valores de x até 90, esse impacto é menos pronunciado).

Figura. 9. \bar{y} em função de x para os 4 casos analisados



4 Conclusão

Neste trabalho, uma análise matemática referente ao objetivo de completar um álbum de figurinhas foi apresentada. Todos os resultados foram obtidos por meio de simulação computacional com um programa desenvolvido em linguagem Matlab. A validação desse programa foi corroborada com a obtenção de resultados em concordância com os expostos em [3].

Nas primeiras análises, considerou-se que a probabilidade de aparição de cada figurinha nos envelopes é a mesma. Observou-se que à medida que o valor de x aumenta, \bar{y} aumenta exponencialmente, comportamento esse modelado a partir da Equação (1).

Uma vez que o fabricante do álbum pode impor certa raridade a algumas figurinhas, resultados com essa abordagem foram também apresentados. Esses últimos, quando comparados aos primeiros, demonstram que a dificuldade de completar o álbum aumenta consideravelmente na presença de figurinhas mais raras. Uma conclusão lógica e intuitiva, mas ilustrada quantitativamente para os casos analisados.

Por fim, o estudo aqui apresentado se limita a um estudo de caso. Um estudo mais genérico e avançado poderia propor uma equação para que considere a quantidade total de figurinhas do álbum e a quantidade de figurinhas em cada envelope.

ORCID.

Juliano Bitencourt Padilha  <https://orcid.org/0000-0003-2219-6836>

Lisandra Kittel Ries  <https://orcid.org/0000-0003-3708-9582>

Rafael Henrique Eckstein  <https://orcid.org/0000-0002-2006-8411>

Ricardo Luiz Alves  <https://orcid.org/0000-0003-4225-727X>

Referências

1. G. Sarmiento, "Preços de figurinhas e de álbum da Copa do Mundo 2018 sobem acima da inflação". G1, 14 mar. 2018. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/noticia/precos-de-figurinhas-e-de-album-da-copa-do-mundo-2018-sobem-acima-da-inflacao.ghtml>.
2. "Álbum Copa do Mundo 2018 Panini: tudo o que você precisa saber". GOAL, 09 maio 2018. Disponível em: <https://www.goal.com/br/not%C3%ADcias/album-copa-do-mundo-2018-panini-quando-sera-lancado-qual-o/4rz7g25ussuh1wl5bkfatgo4x>.
3. L. B. Morgado e L. S. Borges, "Álbuns de figurinhas: uma abordagem via Cadeias de Markov", REMAT: Revista Eletrônica da Matemática, Bento Gonçalves, RS, v. 5, n. 1, p. 101–113, 2019. DOI: 10.35819/remat2019v5i1id3126. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article>.
4. S. J. Chapman, Programação em Matlab para Engenheiros, Tradução da 5ª edição norte-americana. Tradução: Noveritis do Brasil. Revisão técnica: Flávio Soares Corrêa da Silva. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2016.
5. J. L. Devore, Probabilidade e estatística: para engenharia e ciências, Tradução de Joaquim Pinheiro Nunes da Silva e MGS Language Services. São Paulo: Cengage Learning, 2006.
6. F. J. Gravetter e L. B. Wallnau, Essentials of Statistics for the Behavioral Sciences, 4th edition. Wadsworth (Thomson Learning), 2001.