*INTERMATHS, VOL. 4, NO. 2 (**2023**)*, **270–276**
https://doi.org/10.22481/intermaths.v4i2.12185
Relato de Experiências

Um problema de matrizes e determinantes modelado pela teoria das transformações lineares

A problem of matrices and determinants modeled by the theory of linear transformations

Wálmisson Régis de Almeida [a], **Frederico Reis Marques de Brito** [b]

[a] Instituto Federal de Minas Gerais, São João Evangelista - MG, Brasil; [b] Universidade do Estado de Minas Gerais, Ibirité - MG, Brasil

* Autor Correspondente: walmisson.almeida@ifmg.edu.br

Resumo: O relato a seguir detalha a abordagem de um problema elementar de Álgebra Linear emergido durante o ensino remoto decorrente da pandemia de Covid-19. Nesse período, os processos avaliativos se tornaram não-presenciais através dos Ambientes Virtuais de Aprendizagem, o que exigiu do professor uma série de ajustes em seus instrumentos para tal finalidade: dentre eles, a necessidade de ter à disposição variações de uma mesma questão a fim de dificultar a troca de respostas entre os discentes. O problema em questão envolve o cálculo do determinante de um produto de duas matrizes não-quadradas de certas ordens analisado sob a ótica da composição de transformações lineares, em contraponto a uma solução elementar, isto é, utilizando-se apenas de conhecimentos básicos de matrizes e sistemas lineares. Essa última demanda a análise de um polinômio de 12 variáveis e 48 monômios de cancelamentos não triviais, enquanto a solução via transformações lineares é muito mais curta e elegante e depende apenas de resultados introdutórios dessa área.

Palavras-chave: Matrizes; Determinantes; Transformações Lineares.

Abstract: The following report details the approach to an elementary Linear Algebra problem that emerged during remote teaching resulting from the Covid-19 pandemic. During this period, the assessment processes became non-presential through Virtual Learning Environments, which required a series of adjustments from the teacher in their instruments for this purpose. Among them, the need to have variations of the same question available to make it difficult for students to exchange answers. The concern in question involves the calculation of the determinant of a product of two non-square matrices of certain orders analyzed from the perspective of the composition of linear transformations, in contrast to an elementary solution, that is, using only basic knowledge of matrices and linear systems. The latter demands the analysis of a polynomial of 12 variables and 48 monomials of non-trivial cancellations, while the solution via linear transformations is much shorter and more elegant and depends entirely on introductory results in this area.

keywords: Matrices; Determinants; Linear Transformations.

Submetido em: 03 de Janeiro de 2023 Aprovado em: 23 de Dezembro de 2023 Publicado em: 30 de Dezembro de 2023
ISSN 2675-8318

1 Introdução

Os primórdios desse relato nos remetem ao período de Ensino Remoto, consequência da pandemia de Covid-19. Nesse momento, a maioria das universidades federais, estaduais e privadas do Brasil passou integralmente a adotar um modelo de ensino baseado em aulas e avaliações a distância, pela impossibilidade do contato em sala de aula devido ao risco de contaminação e agravamento da pandemia no país. Todas as ações conforme orientações do Ministério da Saúde e da Portaria nº 544/2020 do Ministério da Educação, que autorizou no seu artigo 1º, em caráter excepcional "[...] a substituição das disciplinas presenciais, em cursos regularmente autorizados, por atividades letivas que utilizem recursos educacionais digitais, tecnologias de informação e comunicação ou outros meios convencionais [...]" como pode se verificar em Brasil [1].

Para o estabelecimento do Ensino Remoto, as instituições passaram a utilizar Ambientes Virtuais de Aprendizagem - AVAs, como o de código aberto Moodle - Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment, ou seja, Ambiente de Aprendizado Modular Orientado ao Objeto, muito popular nos cursos que utilizam metodologia de ensino a distância de Instituições Federais. Nesses AVAs, os professores estruturavam suas salas de aula, postavam seus links de aulas síncronas e assíncronas, materiais didáticos e pedagógicos de natureza diversa e programavam o sistema avaliativo para seus discentes, um dos grandes gargalos da educação à distância pelas dificuldades de se evitar fraudes no momento das avaliações. Na prática, os docentes que atuaram durante esse período geralmente não tinham convicção de quem exatamente estava realizando as atividades, com a exceção das avaliações realizadas oralmente e com os alunos de câmera aberta, modelo que apresenta grandes dificuldades de execução.

Nesse contexto, uma das hipóteses para tentar minimizar essas fraudes foi o uso da ferramenta "Questionário" presente no AVA Moodle, que permite a uma mesma questão de Matemática assumir parâmetros variáveis. Isso acaba por resultar em várias soluções distintas para uma mesma questão. Como exemplo, um exercício que conste de dois parâmetros variáveis, cada um deles alternando em um conjunto de números naturais contendo 10 elementos, poderia resultar em $10 \cdot 10 = 100$ resultados distintos, suficientes para atender uma turma dessa magnitude. Imagine a quantidade de soluções distintas em contextos com variáveis reais!

Um dos tópicos trabalhados em disciplinas introdutórias de Álgebra Linear dos cursos de graduação é o estudo de matrizes e determinantes. Essa, que sempre foi uma temática do Ensino Médio e trabalhada apenas de forma revisional no Ensino Superior, aparentemente já não é mais tão bem discutida ao nível básico. Isso quando trabalhada, já que o cenário vivenciado nos sugere que realmente esse conteúdo tem sido negligenciado e deixado de lado nas salas de aula durante o Ensino Médio. Inclusive, com a adoção da nova Base Nacional Comum Curricular - BNCC, será provavelmente relegado apenas aos cursos de graduação, já que o documento não explicita tal conteúdo em suas habilidades, mas essa é uma discussão para outro momento.

Um exemplo de problema com vários parâmetros desse conteúdo é o de calcular o determinante de uma matriz $C = A \cdot B$, proveniente do produto de uma matriz $A_{3\times 2}$ por uma matriz $B_{2\times 3}$. Ao se elaborar uma questão dessa forma, toma-se alguns valores constantes nas matrizes e alguns parâmetros variáveis, ou "coringas" como denominado pela plataforma Moodle:

Figura 1 – Inserção e Edição de parâmetros "coringas" na plataforma Moodle.

Fonte: Autores.

A surpresa que originou esse relato surgiu justamente na elaboração desse problema, aparentemente inocente. Ao efetuar os cálculos do produto das matrizes e do determinante desse produto, independente das constantes e dos coringas escolhidos, o resultado era sempre nulo, ou seja, $\det C = 0$ para todos os casos testados. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 1 \\ -7 & 5 & -10 \\ -12 & 10 & -14 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{vmatrix} -7 & 10 & 1 \\ -7 & 5 & -10 \\ -12 & 10 & -14 \end{vmatrix} = 0.$$

Para um Matemático, em geral, não existem coincidências, mas sim conjecturas. O objetivo passou então a ser investigar uma possível argumentação teórica para generalizar e demonstrar tal conjectura.

2 Desvendando o mistério

Uma primeira estratégia de resolução pensada foi o uso da "força bruta", ou seja, abrir a multiplicação das matrizes na forma $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = C_{3\times 3}$, considerando-se as 12 variáveis, e buscar possíveis cancelamentos aditivos e redução da equação a uma expressão relativamente mais simples para a sua análise:

$$A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+bs & aq+bt & ar+bu \\ cp+ds & cq+dt & cr+du \\ ep+fs & eq+ft & er+fu \end{pmatrix} = C_{3\times 3},$$

Utilizando o Teorema de Laplace aplicado à primeira linha, e expandindo os cofatores, tem-se:

$$\det\ C = (ap+bs) \begin{vmatrix} cq+dt & cr+du \\ eq+ft & er+fu \end{vmatrix} - (aq+bt) \begin{vmatrix} cp+ds & cr+du \\ ep+fs & er+fu \end{vmatrix}$$
$$+ (ar+bu) \begin{vmatrix} cp+ds & cq+dt \\ ep+fs & eq+ft \end{vmatrix}.$$

Esse foi o método por nós considerado elementar, não no sentido da facilidade de execução, mas em função de utilizar apenas técnicas básicas de matrizes e sistemas lineares. O que aparentemente se transformaria numa brincadeira divertida de se realizar cancelamentos aditivos se transformou em um polinômio de 12 variáveis com 48 monômios de cancelamento aparentemente não trivial. Nada divertido... Outra hipótese seria trabalhar com propriedades dos determinantes, mas a maioria dos resultados mais fortes desse tema se referem ao estudo de matrizes quadradas, que não enquadram as matrizes A e B. O caminho teoricamente mais factível se mostrou um grande inconveniente.

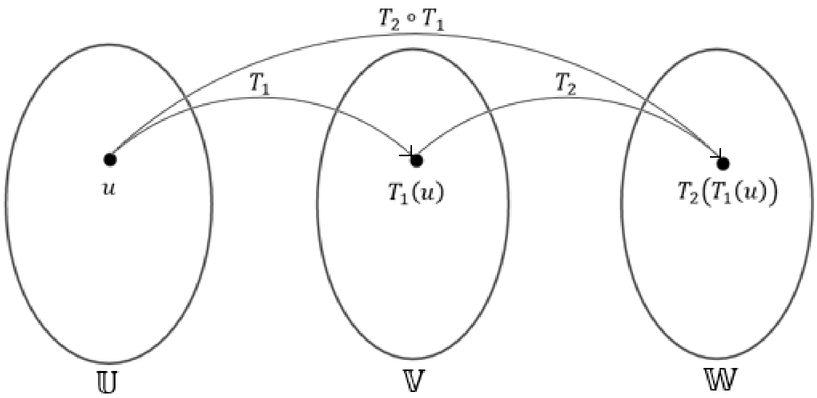
Foi então que surgiu a ideia de se abordar o problema por meio da Álgebra Linear, mais especificamente das transformações lineares. A conexão entre matrizes e transformações lineares é conhecida desde o século XIX em trabalhos de Arthur Cayley publicados em 1857 como afirma Eves [2, p. 552]. Com esse novo enfoque conseguiremos uma explicação mais elegante, sem a necessidade de "algebrismos" e utilizando apenas resultados básicos de Álgebra Linear, acessíveis a qualquer professor ou graduando em Matemática, resultando numa economia notável de tempo e papel!

Formalmente, se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, existe uma única matriz $A_{m\times n}$ tal que $\forall\ v \in \mathbb{V},\ \ T(v) = A \cdot v$, tomando-se v na forma de matriz coluna, com v e $T(v)$ escritos nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ nessa ordem. Reciprocamente, dada uma matriz $A_{m\times n}$ podemos definir a transformação linear T_A: $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ dada por $T_A(v) = A\cdot v$. A correspondência $A \leftrightarrow T_A$ se constitui, em realidade, em um isomorfismo natural entre o espaço das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ e o espaço das matrizes $m \times n$ com entradas reais.

Consideremos as matrizes do nosso problema: $A_{3\times 2}$ e $B_{2\times 3}$. Para trabalhar com matrizes destes "tamanhos", vamos considerar as transformações lineares associadas $T_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $T_A(v) = A \cdot v$ e $T_B(w) = B \cdot w$, conforme descrevemos anteriormente.

Uma operação tratada no estudo das transformações lineares, e que fará parte da argumentação, é a composição de duas transformações. Considere três espaços vetoriais $\mathbb{U}$, $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, com dimensões p, q e r respectivamente, e duas transformações lineares T_1 e T_2 entre esses espaços, T_1: $\mathbb{U} \to \mathbb{V}$ e T_2: $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$. É um resultado bem conhecido que se $(A_1)_{q\times p}$ e $(A_2)_{r\times q}$ são as matrizes dessas transformações, respectivamente, então a composição $T = T_2 \circ T_1$: $\mathbb{U} \to \mathbb{W}$ é uma transformação linear cuja matriz da representação é $(A_2 \cdot A_1)_{r\times p}$, ou seja, é o produto das matrizes de representação de T_2 e T_1, como mostra Santos [3, p. 143].

Figura 2 – Composição de Transformações Lineares.



Fonte: Steinbruch e Winterle [4, p. 193]

Vejamos um exemplo que ilustra essa situação: considere as transformações lineares $T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(u) = (x - 4y + 2z, 2x + y - 3z)$ e $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_2(v) = (x + y,\ 2x - 3y, 2x)$. As matrizes de representação dessas transformações nas bases canônicas são $(A_1)_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ e $(A_2)_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. A composição dessas transformações $T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ terá como matriz de representação o produto das matrizes A_2 e A_1:

$$(A_2 \cdot A_1)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & -11 & 13 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Um cálculo simples e já vemos que o determinante é nulo, evidentemente confirmando nossa hipótese inicial.

É interessante observar que trocando-se a ordem das transformações, o mesmo não ocorre: invertendo-se a ordem da composição das transformações do exemplo anterior a matriz de representação da composição $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seria:

$$(A_2 \cdot A_1)_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 13 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

e nesse caso, o determinante não se anula, evidenciando que o resultado parece depender das dimensões das matrizes na ordem que se apresentam.

Voltando ao problema original, temos uma matriz $B_{2\times 3}$ que define a transformação $T_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Como a dimensão do domínio é maior que a dimensão do contradomínio, a transformação T_B não é injetiva, ou seja, possui núcleo (ou *kernel*) não trivial. Esse é um fato bastante conhecido, mas em virtude da simplicidade da demonstração, vamos apresentá-la. Dada uma base $\{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, por exemplo a base canônica, $\{T_B(v_1)\, ,\ T_B(v_2)\, ,\ T_B(v_3)\}$ é obrigatoriamente um conjunto linearmente dependente, já que temos um conjunto de 3 vetores em um espaço vetorial de dimensão 2. Assim, existem escalares a_1, a_2, a_3 não todos nulos tais que $a_1 T_B(v_1) + a_2 T_B(v_2) + \ a_3 T_B(v_3) = 0$. Pela linearidade de T_B segue que $T_B(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = 0$ e como os escalares a_1, a_2, a_3 são não todos nulos e $\{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, temos que $va_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \neq 0$ e $T_B(v) = 0$. Podemos generalizar, usando o mesmo argumento, e provar que toda transformação linear $T_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ com $p > q$ é não injetiva. Assim, considerando esse fato, podemos concluir que existe $v_0 \in \mathbb{R}^3$ não-nulo tal que $T_B(v_0) = 0$.

Por outro lado, também é conhecido que toda transformação linear deve levar vetor nulo em vetor nulo, afinal se T é uma transformação linear então $T(0) = \ T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0$. Assim, $T(v_0) = T_A(T_B(v_0)) = T_A(0) = 0$ e, portanto, T também é não injetiva. Como a matriz de representação de T nas bases canônicas é dada por $M = A \cdot B$, segue-se que M é uma matriz singular (não-invertível). Não menos conhecida é a equivalência entre uma matriz ser singular (não invertível) e ter determinante nulo como mostram Anton e Rorres [5, p. 87]. Segue, portanto, que $\det\ M\ = \det(A \cdot B) = 0$ e isso põe fim ao "mistério"!

3 Conclusão – O caso geral

Para encerrar nossa jornada neste tema, nosso espírito matemático nos exige generalizar o problema. Dadas as matrizes $A_{p\times q}$ e $B_{q\times p}$, se $p > q$ então a matriz quadrada $(A \cdot B)_{p\times p}$ é singular. A argumentação é a mesma que utilizamos no caso particular: a transformação linear associada a B é $T_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, e como $p > q$, obrigatoriamente o núcleo de T_B é não-trivial e, portanto, o núcleo de $T = T_A \circ T_B\ :\ \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ também o será. Consequentemente, T é não invertível e sua matriz de representação $(A \cdot B)$ é singular, ou, de forma equivalente, $\det(A \cdot B) = 0$.

Interessante verificar por meio deste relato como a amplitude de conhecimentos e o uso das ferramentas corretas podem alterar significativamente a abordagem de um mesmo problema matemático. Nesse caso particular, o uso das transformações lineares tornou uma abordagem tediosa pelo excesso de "algebrismos" em uma demonstração elegante e generalista. Esse evento ilustra a importância do ensino responsável deste conteúdo ao nível de graduação, e se constitui em uma divertida proposta de desafio para sala de aula.

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e interpretação dos dados; na redação e revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Fontes de financiamento

Não há.

Orcid

Wálmisson Régis de Almeida https://orcid.org/0000-0001-8605-5405
Frederico Reis Marques de Brito https://orcid.org//0000-0001-9859-6540

Referências

1. Brasil. Ministério da Educação. Portaria nº 544, de 16 de junho de 2020. Dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais, enquanto durar a situação de pandemia do novo coronavírus - Covid-19. Disponível em: https://www.in.gov.br/en/web/dou/-/portaria-n-544-de-16-de-junho-de-2020-261924872. Acesso em: 21 jul. 2022.
2. H. Eves. *Introdução à História da Matemática*. 3ª ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2002.
3. R. J. Santos. *Álgebra Linear e Aplicações*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2006.
4. A. Steinbruch, P. Winterle. *Álgebra Linear*. 2 ed. São Paulo: Pearson. Makron Books, 1987.
5. H. Anton, C. Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.