*INTERMATHS, VOL. 4, NO. 2 (**2023**)*, **135–150** Artigos Gerais
https://doi.org/10.22481/intermaths.v4i2.12956

A Progressão Geométrica presente nos Fractais: Uma proposta de ensino por meio da Modelagem Matemática

The geometric progression present in fractals: a teaching proposal through mathematical modeling

Aila Coelho Matos Pereira [a], **Daniela Santa Inês Cunha** [a], **Dirceu de Freitas Piedade Melo** [a]

[a] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia - Campus Salvador - BA, Brasil

* Autor Correspondente: 2017129001@ifba.edu.br

Resumo: Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta para o ensino de progressões geométricas usando os fractais presentes na natureza. A ideia surgiu a partir de experiências vivenciadas durante o período de regência em atividades de estágio, através de oficinas para turmas do ensino médio integrado do Instituto Federal da Bahia - Campus Salvador. Pesquisas apontam dificuldades dos estudantes do ensino médio na generalização dos padrões a partir da observação e reforçam que o docente deve pensar em alternativas para reverter isso em sala de aula. O uso das árvores fractais podem constituir uma excelente motivação para trabalhar o reconhecimento de padrões geométricos estimulando e utilizando meios lúdicos e criativos em sala de aula. Pensando nisso, foi elaborada uma proposta de ensino das progressões geométricas por meio de uma modelagem que parte da observação de fractais presentes na natureza. A proposta segue etapas de modelagem matemática sucessivas de interação, matematização e modelo matemático, estabelecidas por Biembengut [1]. A partir da proposta criada conclui-se que além de potencializar o ensino de progressões geométricas trazendo uma outra problemática voltada à realidade, os fractais dão um significado ao ensino de progressões geométricas.

Palavras-chave: Progressão Geométrica; Fractais; Modelagem Matemática; Ensino Médio.

Abstract: This work aims to present a proposal for teaching source code progressions using fractals present in nature. The idea arose from experiences during the period of regency in internship activities, through workshops for integrated high school classes at the Federal Institute of Bahia - Campus Salvador. Research points to the difficulties of high school students in generalizing patterns based on observation and reinforces that teachers should think of alternatives to revert this in the classroom. The use of fractals in the classroom leads the student to arouse curiosity, develop creativity and increase playfulness. With that in mind, a teaching proposal for the interpretation of progressions was developed through modeling that starts from the observation of fractals present in nature. The proposal follows the successive mathematical modeling steps of interaction, mathematization and mathematical model, protected by Biembengut [1]. From the proposal created, it is concluded that in addition to enhancing the teaching of grain progressions, bringing another problematic thought to reality, fractals give meaning to the teaching of grain progressions.

keywords: Geometric Progressions; Fractals; Mathematical Modeling.

Introdução

Um dos estudos realizados pelo grupo de pesquisa em educação algébrica da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - GPEA, apontou dificuldades dos estudantes do Ensino Médio na generalização dos padrões a partir da observação. O problema apresentado em descrever as relações funcionais utilizando a linguagem algébrica parece ser somente o início do bloqueio, além disso os estudantes sentem falta de significado para as expressões, equações e símbolos algébricos.

Por trás dessa "falta de significado" existe lacuna de compreensão conceitual de toda a estrutura matemática envolvida nesse processo, além de outras variáveis que fazem parte da proficiência matemática. Bernardino, Garcia e Rezende [2] afirmam que o pensamento teórico e a compreensão do significado do simbolismo algébrico devem ter um olhar mais atento pelo docente, por se tratar da origem da dificuldade dos estudantes. Os autores ressaltam que reconhecer as manifestações do pensamento e da linguagem algébrica é um elemento relevante a ser considerado pelos professores na organização do ensino de álgebra.

Panossian [3] afirma que o ensino algébrico deve recorrer a uma linguagem que reflita o pensamento e dê significado ao problema, através dos seguintes passos: definir, estruturar e propor uma situação para um grupo de estudantes no processo de generalização, abstração e formação de conceitos. A autora compreende a necessidade do conhecimento algébrico, e dos símbolos que expressam conceitos e significados dos problemas para os estudantes, por isso a importância do processo de ensino de álgebra e da reflexão e investigação constantes dos professores que se preocupem em compreender como os estudantes pensam e recorrem a linguagem algébrica numa realidade objetiva.

Segundo Vale e Pimentel [4], a observação e generalização de padrões, utilizando recursos simbólicos, oportunizam o desenvolvimento do pensamento algébrico e geométrico, sendo uma ferramenta poderosa para a atividade matemática. Os autores mostram que o estudante, ao experimentar o processo de apropriação visual de estruturas caracterizadas pela regularidade, seguido da sua representação numérica, pode experimentar, através da observação da sequência encontrada, a descoberta do seu termo geral. Nesse contexto, o reconhecimento de padrões da geometria fractal encontrada na botânica pode fornecer um material muito rico para trabalhar o pensamento algébrico e geométrico em estruturas que apresentam progressões geométricas, tanto pelo desafio dessa interdisciplinaridade, como pela bela motivação visual de suas estruturas.

Barbosa [5] declara que o estudo dos fractais em sala de aula desperta o interesse, a curiosidade e a criatividade dos estudantes devido ao seu visual caótico e chamativo. Estas características dos fractais podem auxiliar no ensino de padrões, analisando os mesmos nas progressões geométricas, além do que, a abordagem dos fractais no ensino da geometria é proposta tendo presente a insuficiência da geometria euclidiana

Submetido em: 03 de Julho de 2023 Aprovado em: 01 de Novembro de 2023 Publicado em: 30 de Dezembro de 2023
ISSN 2675-8318

na contemplação das diferentes formas que encontramos na natureza e sua crescente aplicabilidade nas mais diferentes áreas. Grande parte dos elementos naturais não pode ser representada por figuras costumeiramente estudadas como retângulos, quadrados entre outros [5].

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [6] destacam que a matemática deve ser vista pelo estudante como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento de seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, estética e de sua imaginação e com isso compreender cada vez mais o mundo que o cerca. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reafirma essa visão quando enfatiza que a matemática não se trata apenas de ensinar fórmulas, mas fazer com que o estudante entenda o que está por detrás dos cálculos [7].

É necessário que os professores promovam uma visão da matemática como uma ciência em evolução, não algo pronto e definitivo, levando o aluno a construir e se apropriar do conhecimento que servirá para transformar sua realidade, sendo assim a BNCC afirma em sua quinta competência que deve existir uma matemática mais investigativa em sala de aula, fazendo uso de novas estratégias e recursos para introduzir conceitos e propriedades [7].

Esta proposta surgiu em uma das atividades de regência do Programa Residência Pedagógica*, salientando que uma das autoras deste trabalho foi a regente responsável por elaborar e ministrar oficinas para os estudantes do ensino médio. Em uma dessas oficinas o conteúdo abordado foi progressões geométricas, surgindo assim esta proposta com o intuito de contribuir para o ensino de progressões geométricas em sala de aula. A partir dessa experiência aprimoramos o trabalho e apresentamos neste artigo.

As discussões promovidas e as lacunas evidenciadas deram origem ao objetivo deste relato que é apresentar uma proposta de ensino de progressões geométricas utilizando os fractais presentes na natureza, tendo a modelagem matemática como metodologia de ensino.

1 Fractais e a Progressão Geométrica

O termo fractal é um neologismo introduzido por Benoit Mandelbrot inspirado na palavra latina *fractus*, cujo verbo frangere significa quebrar, criar fragmentos irregulares, fragmentar [8]. Se observarmos a natureza que nos cerca, encontraremos formas que não podem ser descritas através das figuras geométricas que aprendemos na escola. "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, cascas de árvores não são suaves e nem o raio se propaga em linha reta”. Nessa frase escrita no prefácio de seu livro *The fractal geometry of Nature*, Mandelbrot evidencia que as formas da natureza e as formas da geometria comum não são diferentes apenas em grau, mas são diferentes também em espécie [8]. Diante disso, a geometria fractal surge como

*Programa de Residência Pedagógica é um programa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior - CAPES que tem por finalidade fomentar projetos institucionais de residência pedagógica implementados por Instituições de Ensino Superior, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação inicial de professores da educação básica nos cursos de licenciatura.

uma nova forma de descrever e reconstruir formas não contempladas pela geometria euclidiana, como aquelas encontradas na natureza.

Um fractal pode ser entendido como um ente que possui invariância de escala e complexidade infinita. A invariância de escala se evidencia no fractal quando vemos que a sua forma se preserva, mesmo quando observado em escalas diferentes. A complexidade infinita está relacionada com a recursividade usada em seu processo construtivo, isto é, consiste na aplicação da mesma regra, que é repetida em todas as etapas da construção do objeto. Isso faz com que cada parte do fractal seja a réplica do todo [9].

Alguns pesquisadores têm se dedicado a utilizar propriedades fractais no estudo da botânica. Em seu trabalho *Algorithm Beauty of Plants* [10], Lindenmayer propõe um sistema recursivo, inspirado na complexidade infinita dos fractais para criar árvores e plantas artificialmente. Na Figura 1 podemos ver formas muito belas como resultado da criação de plantas a partir da aplicação de padrões relativamente simples.

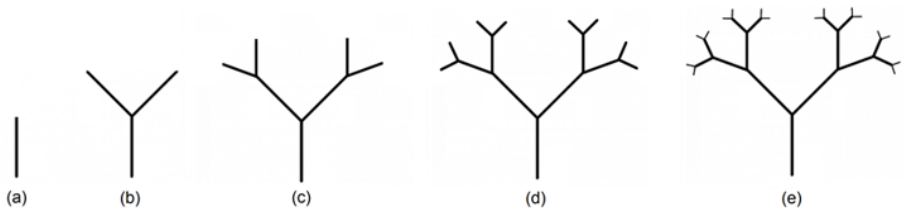
Figura 1. Campo de flores fractais construído a partir do Sistema Lindenmayer.

Fonte: [10, p. 01].

As árvores fractais podem constituir uma excelente motivação para trabalhar o reconhecimento de padrões geométricos, a utilização do pensamento algébrico na representação simbólica desses padrões, e a generalização do processo recursivo através da construção da sua lei de formação.

Na Figura 2 temos a representação de várias etapas da construção de uma árvore fractal: O iniciador (a), o gerador ($1^{\underline{a}}$ iteração) (b), a segunda, a terceira e a quarta iterações (c, d, e). Para efetuar a construção dessa árvore, parte-se do iniciador, aplicando-se a seguinte regra: na extremidade do iniciador são colocados dois galhos com uma abertura angular α resultando o galho gerador (b). A partir daí cada um dos galhos será um novo iniciador. Cada um dos galhos de (b) irá formar mais dois galhos de mesmo ângulo α, totalizando os quatro novos galhos observados em (c). Repetindo o mesmo padrão nos novos galhos gerados pode-se observar a construção que resulta da terceira e quarta iterações.

Figura 2. Etapas da construção recursiva de uma árvore fractal.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A partir desse exemplo podemos perceber o quão interessante pode ser a caminhada na descoberta de padrões, e na sua compreensão algébrica. Ao descobrir o padrão recursivo na construção dos novos galhos, pode-se estimular o aluno, utilizando meios lúdicos e criativos, a realizar a representação da sequência numérica obtida a cada iteração, e descobrir a sua lei de formação, por meio da representação algébrica. Esse crescimento progressivo dos galhos, denominado progressão geométrica (PG), é definido como uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante "q" chamada razão da PG. A Equação (1) mostra a lei do termo geral de uma P.G. de n termos, onde o 1º termo é a_1.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{1}$$

No exemplo apresentado na Figura 2 essa sequência é $2, 4, 8, 16, \cdots$, ou seja, uma progressão geométrica de $q = 2$, com $a_1 = 2$ e o termo geral: $a_n = 2 \cdot 2^{(n-1)}$.

Esse elo entre o ensino de PG e os fractais é possível, como apresentaremos, utilizando a Modelagem Matemática, sendo esta considerada uma metodologia de ensino por meio da qual o estudante pode ser mais independente quanto à produção do próprio conhecimento, possibilitando que o mesmo desenvolva, ao longo do processo, mais autonomia. Além da modelagem ser uma metodologia capaz de auxiliar o estudante no processo de busca pelo conhecimento matemático, ela também possibilita o desenvolvimento da criatividade e do desenvolvimento do pensamento crítico. Ainda, a Modelagem Matemática é uma "estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais" [11].

2 Progressão Geométrica e Modelagem Matemática

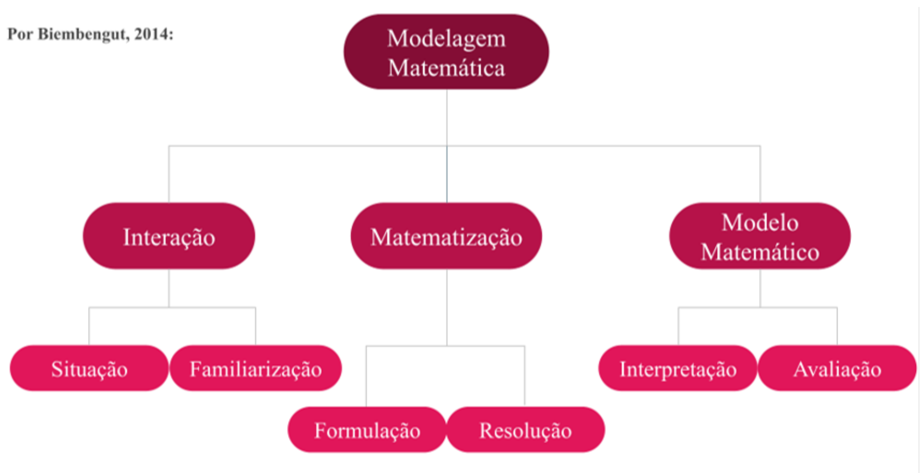
A modelagem matemática pode ser entendida com a transformação de situações do nosso cotidiano em linguagem matemática. Ela está presente desde os tempos mais primitivos. Isto é, a modelagem é tão antiga quanto a matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos [1].

De acordo com Biembengut [1] a modelagem matemática requer além do conhecimento matemático, uma dose significativa, por parte do modelador de intuição e criatividade para interpretar contextos e saber discernir o conteúdo matemático que melhor se adapta a determinada situação, além de senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

Os problemas do cotidiano e a matemática são conjuntos que aparentemente não têm um denominador comum, a modelagem surge como a intersecção entre esses dois conjuntos. Essa interação que permite representar uma situação "real" com um determinado conteúdo matemático, envolve uma série de procedimentos. Esses processos podem ser agrupados em três etapas: a interação, a matematização e o modelo matemático, como podemos observar na figura 3 [1].

Seguindo o esquema da imagem abaixo a primeira etapa conhecida como interação consiste em, após estabelecido o objeto de estudo é realizada uma pesquisa (por meio de revistas, artigos científicos) ou *in loco* (por meio de experiências de campos, dados experimentais) fazendo assim um reconhecimento da situação-problema e uma familiarização com o mesmo.

Figura 3. Esquema da Modelagem Matemática.



Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

A segunda etapa é a matematização, que de acordo com Biembengut [1], é uma etapa mais complexa e desafiante, geralmente dividida em formulação do problema e a resolução dele. É nesta etapa que é feita a tradução matemática da situação-problema, hipóteses são levantadas e uma vez definido a situação-problema passa para o processo de resolução.

Na terceira e última etapa intitulada como "modelo matemático" é necessária uma avaliação para verificar em que nível ele se aproxima da situação-problema apresentada, fazendo uso da interpretação do modelo analisando as possíveis soluções e a verificação de sua adequação quando se retoma a situação-problema avaliando a quão significativa e relevante é a solução fazendo assim a verificação [1].

Com o propósito de justificar a relação entre a modelagem matemática com o ensino de progressões geométricas por meio dos fractais, Vale e Pimenta [4] ressaltam que o estudo de padrões no ensino de matemática pode auxiliar o estudante a fazer referências à sua realidade e dessa forma atribuir significado ao que está aprendendo.

O estudo de padrões apoia a aprendizagem dos alunos propiciando-os a descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e previsões. Por meio das etapas apresentadas por Biembengut [1], na seção que segue iremos apresentar uma proposta para o ensino de progressões geométricas, evidenciando a relação deste conteúdo com os fractais presentes na natureza.

3 Proposta Pedagógica para o Ensino de Progressões Geométricas

A transposição do estudo de sequências numéricas guiados pelos PCNs principalmente no que diz respeito ao Ensino Médio orientam um estudo pautado no ensino de PG, a fim de que os estudantes possam perceber regularidades, padrões e desta forma desenvolver o pensamento algébrico e, consequentemente, obter êxito nos processos de generalização.

Os PCN [6] instruem que "as sequências, em especial as progressões aritméticas e as progressões geométricas, nada mais são que funções particulares", o que remete ao fato de que tais conteúdos não devem ser trabalhados dissociados do ensino de funções.

Já as orientações curriculares para o ensino médio reafirmam esse trabalho em conjunto enfatizando inclusive que as progressões aritméticas e geométricas "não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas ("determine a soma...", "calcule o quinto termo...") [6].

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [7], a competência específica de número 5 (cinco) relacionada ao ensino das progressões, a ser trabalhada ao longo do Ensino Médio, ressalta o trabalho com investigação e estabelecimento de conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões e experimentações na validação destas conjecturas.

Seguindo o conceito da atual proposta pedagógica foi escolhido o objeto de estudo que é o ensino de progressões geométricas, em conjunto com os fractais como uma nova forma de introduzir esse conteúdo utilizando a modelagem matemática como metodologia.

O conteúdo trazido na proposta foi progressão geométrica que está associada à habilidade presente na BNCC de número EM13MAT508 e seu alcance favorece o desenvolvimento da competência 5 (cinco) citada anteriormente. Tal habilidade propõe identificação e associação das progressões geométricas (PG) às funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

O método começa a partir da elaboração de um plano de aula, definindo os participantes que são recomendados aos estudantes do primeiro ano do ensino médio, o objeto de estudo, que são as progressões geométricas e o tempo de aula com duração de 100 (cem) minutos. A aula tem como propósito compreender o conceito de progressões geométricas a partir dos fractais encontrados na natureza, e mais especificamente associar os fractais presentes na natureza com o ensino de progressões geométricas, demonstrar a fórmula do termo geral de uma P.G (progressão geométrica) com auxílio do GeoGebra e apresentar a Geometria Fractal com o auxílio do software.

Esta proposta pedagógica foi organizada em etapas a fim de mostrar com mais detalhes todo o processo da relação entre o ensino de progressões geométricas com os fractais para que o docente possa aplicar em sala de aula. A mesma foi pensada tanto para uma aula presencial quanto remota. Na aula presencial o docente com auxílio do projetor pode mostrar a construção dos galhos fractais no GeoGebra e iniciar as discussões referente às interações. Já na remota terá como auxílio o Google Meet, fazendo uso de slides para apresentar o ensino de progressões geométricas através da modelagem matemática por meio de um problema envolvendo fractais, abordando inicialmente os fractais e suas propriedades, sequências geométricas, suas classificações e a fórmula geral do termo de uma PG.

A forma avaliativa será acompanhar o processo de cada aluno à medida que eles interagem durante a aula e na resolução de atividades de forma síncrona, sendo assim, uma avaliação processual. A proposta foi pensada com o propósito de ser desenvolvida através das três etapas de modelagem propostas por Biembengut [1]: interação, matematização e modelo matemático. Neste primeiro momento da proposta o docente deve interagir com os estudantes seguindo os princípios trazidos por Biembengut [1] na etapa interação.

3.1 ETAPA 1 - INTERAÇÃO

Esta etapa é dividida em duas: o reconhecimento da situação problema e a elaboração do referencial teórico a ser trabalhado. O reconhecimento começou a partir da definição do objeto de estudo, que neste caso é o ensino de progressão geométrica por meio dos fractais. A partir disso foi feito um recorte dentro dos fractais, com o objetivo de gerar um problema real, sendo decidido trabalhar com os fractais presentes na natureza.

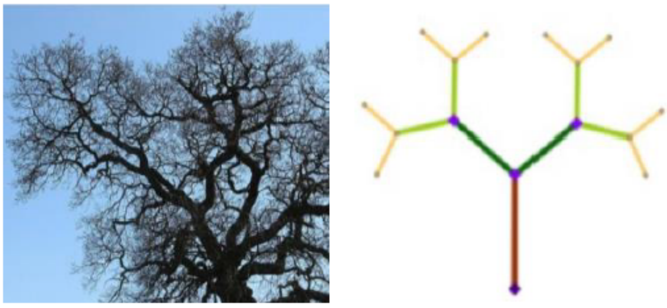
A parte teórica deste trabalho foi gerada por pesquisas realizadas nas áreas da geometria fractal, progressões geométricas e modelagem matemática. Uma vez estabelecida a situação iniciou-se o processo da construção dos galhos fractais no GeoGebra. Para a construção desses galhos foi utilizada a versão online do software GeoGebra, mas caso o docente não queira fazer a construção, ele pode usar algumas construções que já existem no site do GeoGebra[†].

Nesta construção, uma das ferramentas se tornou indispensável, o controle deslizante, sendo necessário principalmente para a visualização progressiva das interações pelos estudantes. A imagem abaixo traz a relação entre o que é encontrado na natureza, que são os galhos de uma árvore com os galhos fractais e suas propriedades. Nela é possível

[†] Geogebra é um aplicativo matemático que permite construções, e pode ser encontrado neste link: https://www.geogebra.org/?lang=pt e a atividade dos galhos fractais pode ser encontrada neste link: https://www.geogebra.org/classic/dvnymdwq

identificar a presença da autossimilaridade entre os galhos, os novos galhos gerados a partir das interações têm as mesmas características e semelhanças do galho gerado inicialmente.

Figura 4. A representação dos Fractais na Botânica.

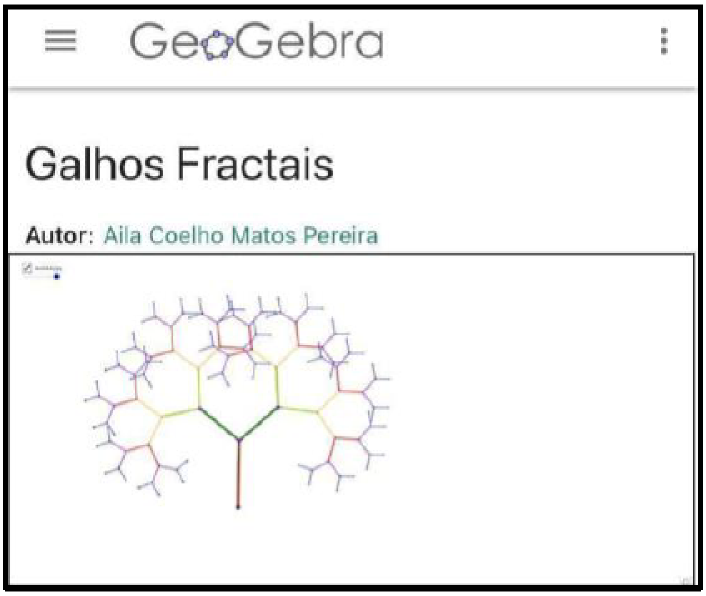


Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

Nesta construção, à medida que o número de interações aumenta, novos galhos são gerados totalizando seis interações desenvolvidas no GeoGebra formando assim uma figura semelhante a uma árvore. Outra característica interessante desta construção é que o docente pode aumentar o tamanho dos galhos e movimentá-los dando a ideia do vento batendo nos galhos facilitando a visualização dos estudantes com dificuldades e trazendo algo mais lúdico e dinâmico para aula.

A imagem da figura 5 refere-se à construção dos galhos fractais no GeoGebra e pode ser encontrada no site do GeoGebra [12], esta opção facilita para o docente acessar a construção e visualizar o processo da construção de forma mais detalhada.

Figura 5. Construção dos Galhos Fractais na GeoGebra.



Fonte: [12, p. 01].

As cores dos galhos são importantes nesse processo de visualização, o ramo principal possui uma cor amarronzada lembrando o tronco inicial de uma árvore, os novos galhos gerados a partir das interações foram construídos com cores diferentes para que o estudante perceba o padrão existente e os próximos termos da sequência.

Nesta construção o docente poderá explorar de forma mais natural e interativa mostrando que há um crescimento a partir da quantidade de interações, podendo assim demonstrar a fórmula do termo geral chegando até a expressão que esse crescimento representa, como veremos de forma mais detalhada na segunda etapa da modelagem matemática: a matematização.

3.2 ETAPA 1 - MATEMATIZAÇÃO

Há duas sub etapas na matematização são elas: formulação do problema e resolução do problema em termos matemáticos. Na formulação do problema uma tarefa, exposta no anexo A, foi preparada para aplicação em sala pelo docente trazendo uma reflexão sobre a importância desses galhos para a natureza, reforçando o conceito dos fractais na botânica. De acordo com Ponte [13] é importante levar uma tarefa matemática para a sala de aula:

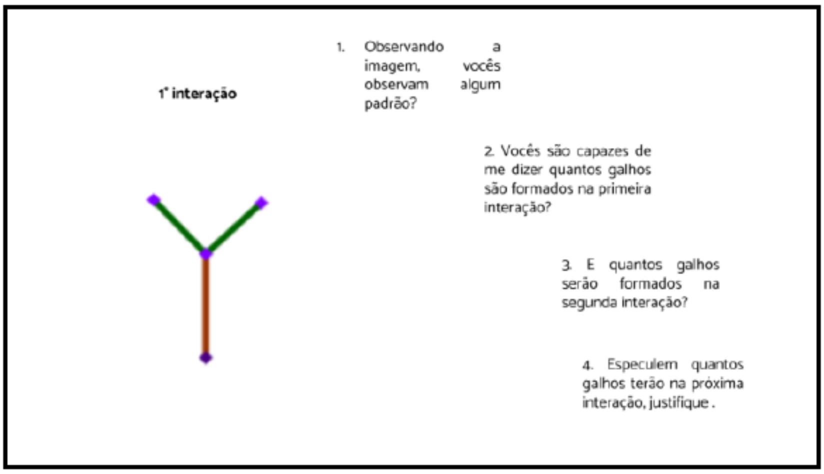
> As tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que podem ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior. É pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende, mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor [13, p. 17].

A tarefa matemática encontrada no anexo A ressalta a relevância da situação didática presente que procura relacionar os fractais encontrados na natureza com o ensino de progressões geométricas despertando assim o interesse e a curiosidade dos estudantes a respeito do assunto. A tarefa proposta reforça a interdisciplinaridade entre a matemática e a biologia, mais especificamente a botânica, trazendo a importância dessa distribuição para a natureza que é a redução do impacto da água da chuva sobre o solo, favorecendo a sua infiltração.

As ramificações funcionam como uma barreira para o calor do sol, evitando o aquecimento, as árvores "seguram" o solo e não deixam as águas da chuva "carregarem" a terra, salientando a importância da distribuição e formação dos galhos para o meio ambiente, através de uma reflexão trazida em sala pelo docente. A proposta permite sair um pouco de aulas somente expositivas, com o professor como figura central e detentor do conhecimento reduzindo o estudante a um mero espectador da aula.

Além da tarefa, o docente terá a construção no GeoGebra para aplicação desta proposta possibilitando a visualização de um padrão no crescimento gradativo dos galhos da árvore, a relação entre o número de interações e a quantidade de galhos gerados, levando o estudante perceber o conteúdo a ser trabalhado em sala. Os questionamentos levantados pelo docente devem ser de forma gradativa, com a finalidade de dar autonomia e tempo para o estudante refletir entre uma pergunta e outra. O docente deve ter cautela para não dar muitas informações facilitando assim o entendimento do estudante. A figura 6 evidencia as perguntas desenvolvidas nesse processo da modelagem matemática.

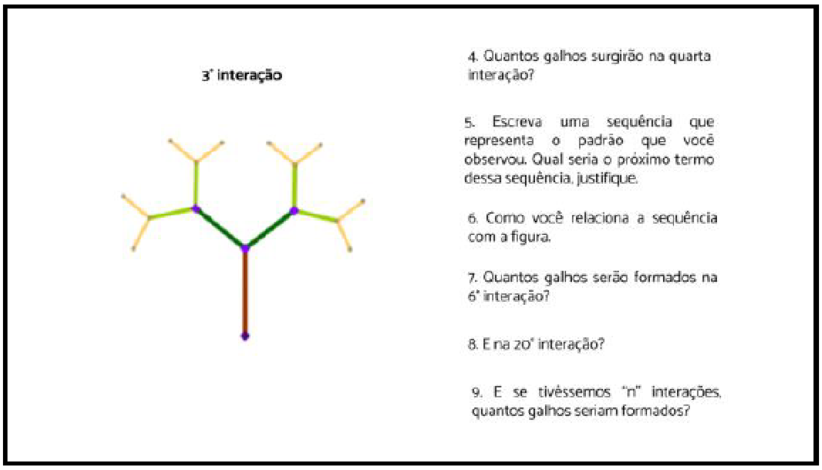
Figura 6. Perguntas elaboradas a partir da primeira interação.



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Nesse estágio da aula o estudante já terá percebido que o crescimento dos galhos a partir das interações gera esta sequência numérica $(2, 4, 8, 16, 32, \cdots)$ que é denominada de progressão geométrica, além de perceber o padrão neste crescimento e a relação que existe entre o número de interações e a quantidade de galhos. Neste momento, espera-se que os estudantes consigam generalizar e descrever a quantidade de galhos gerados na enésima interação.

Figura 7. Perguntas elaboradas na terceira interação.

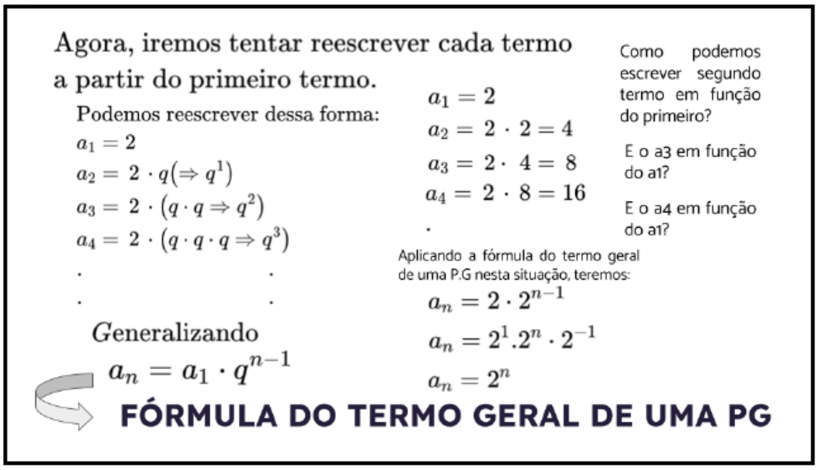


Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A elaboração destas perguntas que serão feitas em sala auxilia o docente na mediação da demonstração da fórmula do termo geral de uma P.G, considerando a relação inicial entre a quantidade de interações e o total de galhos gerados. A primeira interação tem uma quantidade de “x” galhos, na segunda temos uma nova quantidade de galhos e assim sucessivamente, formando assim uma sequência, e nesta sequência podemos observar um padrão.

Após isso, o docente deve partir para generalização desta sequência gerando assim a dedução da fórmula do termo geral de uma progressão geométrica. Nota-se que o docente tem um papel de mediador deste processo de dedução. Como é visto na imagem abaixo:

Figura 8. Deduzindo a fórmula do termo geral de uma P.G.



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Nesta etapa de dedução da fórmula do termo geral de uma P.G é o estágio na modelagem matemática de resolução do problema. É uma das mais importantes nesta proposta, já que aqui o docente irá iniciar o conteúdo matemático contextualizado anteriormente. O processo de dedução da fórmula do termo geral é feito através de questionamento como é possível visualizar na figura 5. Nesse momento é necessário fazer com que os estudantes percebam que, para encontrar o enésimo termo, devem colocar todos os termos seguintes em função do primeiro termo. A construção dos galhos fractais é de grande importância nesse momento, retomando a relação entre o número de interações e a quantidade de galhos formados gerando uma sequência. A seguir iremos avaliar o conhecimento adquirido pelos estudantes na terceira e última etapa do processo de modelagem matemática proposto por Biembengut [1].

3.3 ETAPA 03 - MODELO MATEMÁTICO

A terceira e última etapa também é dividida em duas subtapas: a interpretação da solução e a avaliação.

Após a dedução da fórmula do termo geral de uma PG, foram selecionadas questões envolvendo os fractais e o ensino de progressões geométricas para que o docente pudesse acompanhar e avaliar a aplicação dos conceitos trabalhados anteriormente em outros contextos envolvendo padrões em fractais. A imagem abaixo é uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio que traz um dos fractais mais famosos, o triângulo de Sierpinski, na qual a interpretação do modelo e uma possível solução é gerada pelos estudantes.

Figura 9. Tarefa sobre fractais

(ENEM, 2008) Fractal (do latim fractus, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

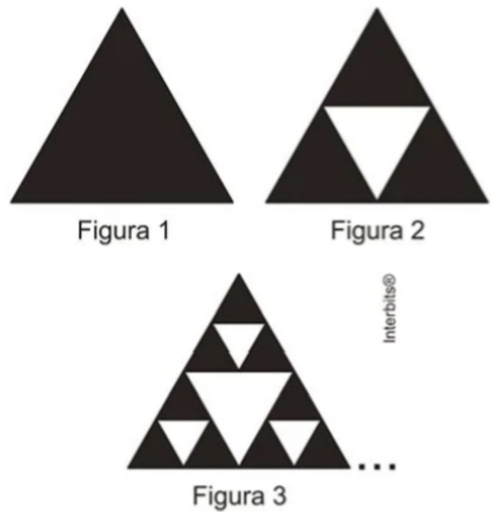
O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. Comece com um triângulo equilátero (Figura 1);

2. Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;

3. Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a Figura 2;

4. Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (Figura 3).



Fonte: [13, p. 09].

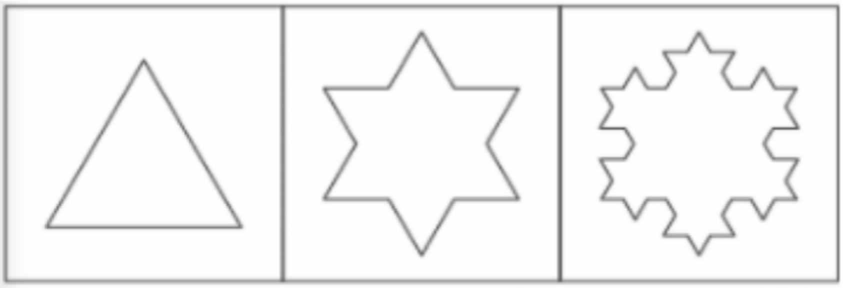
Além de trazer um pouco da história dos fractais, a tarefa pode ser resolvida a partir da observação, gerando uma sequência numérica e deduzindo o próximo termo da sequência sem fazer o uso da fórmula do termo geral de uma P.G. É importante lembrar que se trata de uma aula de introdução ao conteúdo de progressões geométricas, na qual os estudantes ainda estão assimilando os conceitos e como primeira atividade deve ter um caráter introdutório.

Figura 10. Tarefa sobre fractais

(UFJF - 2018) O fractal denominado floco de neve de Koch é obtido partindo-se de um triângulo equilátero. Divide-se cada lado desse triângulo em 3 segmentos de mesmo comprimento, desenha-se um novo triângulo equilátero a partir do segmento do meio e retira-se a sua base, conforme figura abaixo. Esse processo ocorre indefinidamente para obter o floco de neve.

Qual o número de lados da sétima figura, isto é, após ocorrer 6 vezes esse processo?

a) 1.024
b) 3.072
c) 4.096
d) 7.048
e) 12.288



Fonte: disponível em <goo.gl/MfBH7V>

Fonte: [13, p. 09].

Na figura 10 temos a representação da segunda tarefa cujo o propósito é elevar o nível de dificuldade sendo ela o fator de avaliação e conclusão do processo de modelagem matemática, esperando que o estudante tenha uma evolução gradativa no conteúdo de progressões geométricas e generalizações de padrões a partir da observação. Se trata de uma tarefa que também associa os fractais com o ensino de progressões trazendo um fractal conhecido como curva de Coach (Floco de neve), sendo ele outro fractal presente na natureza. Nesta tarefa o estudante não conseguirá saber o próximo termo apenas observando, ele já terá que fazer uso dos conhecimentos vistos anteriormente em sala.

Ao ser questionada sobre o sétimo termo desta sequência, o estudante terá que saber interpretar que existe um padrão presente na imagem e a partir disso escrever sua sequência identificando quem é o primeiro termo, o valor da razão e utilizar a fórmula do termo geral para encontrar o sétimo termo.

É possível observar que houve uma progressão de dificuldade entre a primeira tarefa e a segunda tarefa dois. O docente deve explorar e aproveitar mostrando as características dos fractais presentes na imagem, relembrando o conceito de autossimilaridade presente nos fractais, fazendo associações com o que foi visto anteriormente em sala e reforçando que os fractais estão presentes no cotidiano, especialmente na natureza, fazendo um convite a enxergar a matemática ao nosso redor.

Conclusão

Retomando ao objetivo inicial, que é apresentar uma proposta de ensino de progressões geométricas usando os fractais presentes na natureza, é possível concluir que além de potencializar o ensino de progressões geométricas trazendo uma problemática voltada à realidade, os fractais dão um significado ao ensino de progressões geométricas mostrando a interdisciplinaridade entre um conteúdo matemático e a biologia presente na natureza, mais especificamente na botânica.

Conforme previsto por Barbosa [5] uma das principais dificuldades encontradas durante a elaboração dessa proposta foi a formulação de questionamentos que incentivassem o estudante a ser o protagonista do seu conhecimento, fazendo o uso da modelagem onde o docente tem um papel de mediador e não facilitador do processo de ensino, além do que requer do docente um planejamento e desenvolvimento mais detalhado das aulas demandando um pouco mais de tempo.

É importante ressaltar que a modelagem matemática não é algo novo, ela sempre esteve presente na história da matemática, em suas teorias. Barbosa [5] afirma que os professores verbalizam seu próprio "despreparo" para desenvolver atividades desta natureza e assinalam que a continuidade da aplicação da Modelagem é a forma adequada de adquirir experiência, segurança e confiança.

Retomando as etapas abordadas durante esta proposta a primeira etapa denominada de interação permite que o docente reconheça o problema e busque um referencial teórico para gerar a solução, na matematização há elaboração e resolução do problema e no modelo matemático traz a interpretação e avaliação da solução. Processos que são abordados pelo docente na Modelagem Matemática.

Na apresentação desta proposta foi possível identificar a possibilidade de inserção da modelagem matemática por meio das etapas descritas por Biembengut [1], concluído que o uso da modelagem matemática em sala de aula mostra a aplicabilidade do conteúdo matemático, desenvolve a criatividade do estudante, promove a habilidade de formular e resolver problemas e incentiva a pesquisa.

Logo, constata-se que é importante o docente conduzir novas propostas para a sala de aula, usando novas metodologias já que a prática vai deixando o docente cada vez mais à vontade mesmo com a insegurança e com mais experiência. A partir dessa proposta é possível dar continuidade ao ensino das progressões geométricas, trazendo a relação entre a propagação dos galhos e as fórmulas da soma finita e infinita dos termos.

Concluímos que a proposta elaborada pode contribuir com o ensino de progressões geométricas relacionadas aos fractais, além de trazer ao professor uma sugestão interativa e dinâmica de uso da modelagem matemática e do software GeoGebra. A matemática nesse caso, é percebida em fractais da natureza e oportuniza o estudo desse tópico pouco abordado no âmbito no Ensino Médio.

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Orcid

Aila Coelho Matos Pereira https://orcid.org/0000-0002-4078-8467
Daniela Santa Inês Cunha https://orcid.org/0000-0002-6618-7977
Dirceu de Freitas Piedade https://orcid.org/0000-0001-6329-9239

Referências

1. M. S. Biembengut, *Modelagem Matemática no ensino*, São Paulo: Contexto, 2014.
2. F. Bernardino; W. F. D. G. Garcia and V. Rezende, "Ideias base do conceito de função mobilizadas por estudantes do Ensino Fundamental e Ensino Médio", *Actio*, Curitiba, v. 4, n. 2, pp. 127-147, mai./ago. 2019.
3. M. L. Panossian. "Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para organização de ensino". M. S. Thesis, Educação. São Paulo, 2008.
4. I. Vale and Pimentel, T. "O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo", Portugal, 2013.
5. Barbosa, R. M. B. *Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula*, 3rd ed., Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.
6. Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio. Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC, 2006.
7. Brasil. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. MEC, 2017.
8. B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, New York: W. H. Freeman and Company, 1977.
9. T. A. de Assis; J. G. V. Miranda; F. B. Mota; R. F. S. Andrade and C. M. C. de Castilho, "Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideias", R*evista Brasileira de Ensino da Física*, v. 30, n. 2, pp. 2304.1 - 2304.10, 2008.
10. P. Prusinkiewicz and A. Lindenmayer, "The algorithmic beauty of plants", *Springer Science & Business Media*, 2012.
11. R. C. Bassanezi, *Modelagem Matemática: teoria e prática*. São Paulo: Contexto, 2015.
12. GEOGEBRA. Site: <www.geogebra.org> acesso em 20 de abril de 2022.
13. J. P. Ponte, *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, Instituto de Educação. Lisboa, 2008.
14. Inep. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Sobre o ENEM. [Online]. 2015. Available: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o- enem>. Accessed on: Apr., 20, 2022.

Editora-científica: Ana Paula Perovano. Orcid iD: https://orcid.org/0000-0002-0893-8082