

As Cônicas na geometria exponencial

Conics in exponential geometry

Elzimar de Oliveira Rufino ^a, Rafael Jorge Pontes Diógenes ^b

^aUniversidade Federal de Roraima - UFRR, Brasil; ^bUniversidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção - CE, Brasil

* Autor Correspondente: elzimar.rufino@ufr.br

Resumo: O presente trabalho tem como principal objetivo estudar as cônicas sob o ponto de vista da “geometria exponencial”. Esta geometria é construída no espaço vetorial dos pares ordenados de coordenadas positivas, ou seja, em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Para realizar este estudo definimos uma métrica adequada e observamos sua influência no aspecto geométrico das cônicas. O estudo das cônicas utilizando métricas específicas tem obtido destaque recentemente, como é caso das cônicas na geometria do táxi e as cônicas no plano de Minkowski. O trabalho é complementado ao utilizarmos as operações de espaço vetorial para realizar um estudo sobre suas retas. Tais retas possuem, em geral, aspectos geométricos diferentes das retas do plano euclidiano, se assemelhando a essas somente em alguns casos particulares. De posse da métrica adotada também obtivemos uma fórmula para o cálculo da distância de um ponto a uma reta. A fórmula obtida tem certa semelhança com a fórmula da distância de ponto à reta na geometria euclidiana plana, mas envolve a utilização da função logaritmo. Por fim, a métrica é utilizada para a dedução da equação das cônicas. Com o auxílio do software de Geometria dinâmica Geogebra apresentamos visualizações geométricas das cônicas através de algumas situações particulares.

Palavras-chave: Geometria exponencial; Métricas; Cônicas.

Abstract: The main objective of this work is to study conics from the point of view of exponential geometry. This geometry is constructed in the vector space of the ordered pairs of positive coordinates, i.e., in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. To carry out this study we defined a suitable metric and observed its influence on the geometric aspect of the conics. The study of conics using specific metrics has gained prominence recently, as is the case with the conics in the geometry of the cab and the conics in the Minkowski plane. The work is complemented by using vector space operations to perform a study on its lines. Such lines have, in general, geometrical aspects different from the lines of the Euclidean plane, resembling the latter only in some particular cases. With the adopted metric, we also obtained a formula for calculating the distance from a point to a line. The formula obtained bears some resemblance to the formula for the distance from point to line in plane Euclidean geometry, but involves the use of the logarithm function. Finally, the metric is used to deduct the equation of the conics. With the help of the Geogebra Dynamic Geometry software, we present geometric visualizations of the conics through some particular situations.

keywords: Exponential geometry; Metrics; Conicals.

1 Introdução

O conceito de distância entre dois pontos é algo de elevada importância na matemática e também na vida cotidiana. No segundo caso, surge como uma necessidade natural, bastando para isso uma unidade de medida, como é o caso da unidade metro, ou até mesmo um pedaço de madeira retilíneo. No primeiro caso, para termos um “modelo” de medir distância, são necessárias condições mais específicas a serem satisfeitas. De posse de modelos adequados para medir distâncias, surgem os chamados espaços métricos e, como consequência, podem surgir novos modelos de geometria.

Em toda a Matemática, especialmente nos ramos da Geometria, Topologia e da Análise, o conhecimento da teoria dos espaços métricos é uma ferramenta essencial. Podemos encontrar aplicações do conceito de métrica tanto em situações específicas da matemática quanto em situações do cotidiano.

Como pode ser visto em [1], o conceito de distância, foi introduzido no âmbito do Cálculo Funcional, pelo matemático francês Maurice Fréchet em 1906, em sua tese de doutorado sobre o Cálculo Funcional. No entanto, o leitor poderá verificar em [2], que o termo “espaço métrico” foi, finalmente, introduzido pelo matemático Felix Hausdorff (1869-1942) em 1912, enquanto ponderava sobre o papel dos conjuntos de pontos na Teoria dos Conjuntos. Um espaço métrico, nesse sentido, é constituído de um conjunto não-vazio dotado de uma maneira adequada de medir distâncias entre dois elementos desse conjunto. Um mesmo conjunto pode ser munido de diferentes maneiras de medir distâncias, por meio das chamadas “métricas”. Em algumas situações é possível explorar aspectos geométricos oriundos dessas métricas.

Estudar os efeitos da métrica na geometria do espaço torna-se de relevante importância na matemática. Citamos como exemplo o trabalho de LOIOLA e COSTA em [6], no qual eles estudam as cônicas na geometria do táxi. A Geometria do táxi, considerada por Hermann Minkowski no século XIX, é uma forma de geometria em que a usual métrica da geometria euclidiana é substituída por uma nova métrica em que a distância entre dois pontos é a soma das diferenças absolutas de suas coordenadas. A métrica do táxi é também conhecida como distância L1, ou distância de Manhattan. Por outro lado, Silva em [13] estuda a elipse na geometria do plano de Minkowski tomando como base o trabalho de Shonoda [12], que versa sobre as cônicas na geometria do plano de Minkowski. Ainda considerando o trabalho de Shonoda [12], Batalha [14] faz um estudo mais completo sobre as cônicas no plano de Minkowski.

Em nosso trabalho, vamos considerar o conjunto dos pares ordenados de coordenadas positivas, para o qual iremos adotar a notação $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, ou seja, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$. Esse conjunto é dotado de uma estrutura de espaço vetorial que pode ser vista em Steinbrunsh [11]. O espaço vetorial ao qual nos referimos também foi estudado por Rufino e Naveca em [9]. Iremos dotar $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ de uma métrica compatível

com a geometria das retas determinada pelas operações do espaço vetorial. De posse dessa métrica introduzida, estudaremos as cônicas nessa geometria. Para plotarmos as cônicas nessa geometria utilizamos o software de geometria dinâmica Geogebra.

2 A métrica adotada em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Ao longo da história, os matemáticos tentaram demonstrar sem sucesso o quinto postulado de Euclides da Geometria euclidiana, a partir dos quatro primeiros postulados. Essas tentativas provocaram o surgimento de outros modelos de geometrias, distintas da geometria de Euclides, com novos olhares sobre as retas e sobre a maneira de medir distâncias entre dois pontos. Na geometria euclidiana plana se destaca o teorema de Pitágoras, o qual determina o modo de calcular as distâncias. Uma das primeiras geometrias não-euclidianas a surgir foi a geometria hiperbólica, a qual considera como ponto de partida um quinto postulado diferente. Nessa geometria, por um ponto fora de uma reta passam infinitas retas paralelas à reta dada. De acordo com LOIOLA e COSTA [6], na geometria do táxi a distância é calculada considerando-se caminhos compostos de segmentos horizontais e verticais. A geometria do plano de Minkowski, por sua vez, tem estreita relação com a teoria da relatividade protagonizada por Albert Einstein, conforme pode ser visto em [8]. Em cada uma dessas geometrias os objetos tais como as retas e as cônicas são modificados de acordo com a maneira específica de medir distâncias.

Para darmos continuidade aos nossos argumentos relembremos o conceito de métrica.

Definição 2.1 *Uma métrica em um conjunto $M \neq \emptyset$ é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa, a cada par ordenado $(x, y) \in M \times M$, um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in M$:*

- d1)** $d(x, x) = 0$;
- d2)** Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
- d3)** $d(x, y) = d(y, x)$;
- d4)** $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um par (M, d) , onde d é uma métrica em M é chamado de espaço métrico.

Para maiores detalhes a respeito desta definição e exemplos sugerimos ao leitor consultar [4].

Antes de definirmos uma métrica em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, vamos destacar algumas métricas no espaço \mathbb{R}^2 , constantes na literatura corrente.

Na geometria euclidiana a métrica $d_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$d_E((a, b), (c, d)) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}. \quad (1)$$

A Equação (1) pode ser obtida facilmente em decorrência do Teorema de Pitágoras. O matemático alemão Herman Minkowski idealizou a métrica $d_T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_T((a, b), (c, d)) = |a - c| + |b - d|. \quad (2)$$

A métrica descrita pela Equação (2) é mais conhecida como a métrica do táxi, em virtude da maneira como os táxis se movimentam em uma cidade com ruas em formato quadriculado. Essa métrica também é conhecida como métrica da soma e pode ser definida nos espaços \mathbb{R}^n . Além dessas métricas, podemos citar a função distância do plano de Minkowski $d_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_M((a, b), (c, d)) = \sqrt{|(a - c)^2 - (b - d)^2|}.$$

Na verdade d_M não satisfaz todas as propriedades da definição de métrica. A função d_M está intimamente ligada à teoria da relatividade de Albert Einstein. Para mais informações a respeito sugerimos ao leitor consultar [13].

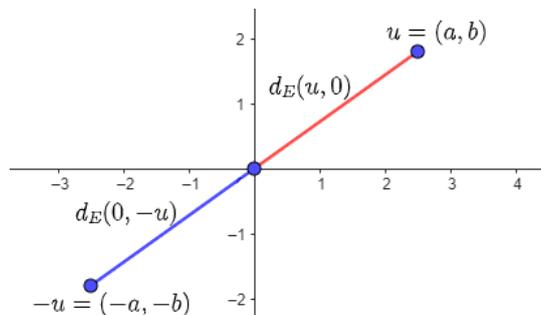
A motivação inicial para a obtenção de uma métrica para $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ surgiu da observação da estrutura de espaço vetorial deste espaço que pode ser vista em [11]. Este conjunto é dotado de uma estrutura de espaço vetorial em que operações de adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar são definidas por

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (z, w) &= (x \cdot z, y \cdot w) \\ \alpha \odot (x, y) &= (x^\alpha, y^\alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

Utilizando as operações dadas pelas equações (3), obtém-se que o elemento neutro da adição \oplus é vetor $0 = (1, 1)$ e o simétrico de cada vetor $u = (x, y)$ é $-u = (\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$. Conforme pode-se perceber na Figura 1, no espaço \mathbb{R}^2 canônico, a distância euclidiana de um vetor $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ até a origem $0 = (0, 0)$ é igual à distância euclidiana da origem ao simétrico $-u = (-a, -b)$, isto é,

$$d_E((a, b), (0, 0)) = d_E((0, 0), (-a, -b)).$$

Figura 1. Distância entre pontos simétricos no espaço \mathbb{R}^2 canônico.



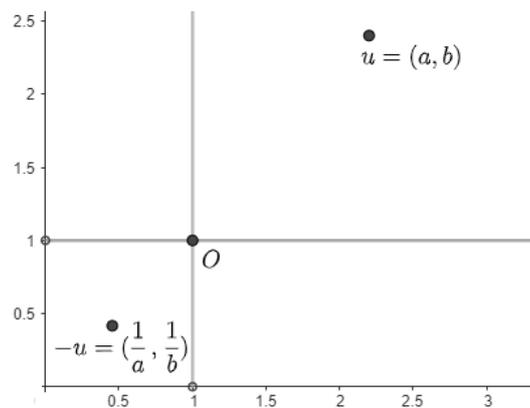
Fonte: Autores

Então, nos perguntamos que métrica d_e mantém essa característica no espaço vetorial $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$. Neste espaço vetorial o simétrico do vetor (a, b) , em relação à origem $(1, 1)$, é o vetor $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$. Assim, queremos saber se existe uma métrica em $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ que satisfaz a igualdade

$$d_e((a, b), (1, 1)) = d_e((1, 1), (a^{-1}, b^{-1})).$$

Observe os vetores genéricos $u = (a, b)$ e $-u = (\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ na Figura 2.

Figura 2. Pontos simétricos em relação à origem $(1, 1)$ no espaço $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$.



Fonte: Autores

Usando a distância euclidiana usual no caso particular em que $u = (2, 3)$ e $-u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ obtem-se

$$d_E((2, 3), (1, 1)) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} \approx 2,236 \quad (4)$$

e

$$d_E((2^{-1}, 3^{-1}), (1, 1)) = \sqrt{(2^{-1}-1)^2 + (3^{-1}-1)^2} = \sqrt{\frac{13}{36}} \approx 0,6. \quad (5)$$

A métrica d_e que almejamos determinar deve ser capaz de compensar a diferença $\sqrt{5} - \sqrt{\frac{13}{36}} \approx 2,236 - 0,6 = 1,636$.

Na seguinte proposição apresentamos a métrica através da qual estudaremos as cônicas em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Observe que o espaço $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ é a exponenciação de \mathbb{R}^2 no sentido de que a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definida por $\varphi(x, y) = (e^x, e^y)$ é uma bijeção. Por essa razão, chamaremos a métrica d_e de “métrica exponencial” e a geometria associada a ela de “geometria exponencial”. Embora possa ser feito um estudo da geometria exponencial com o auxílio da bijeção φ , esse não é o nosso foco. Nosso principal objetivo é mostrar como a métrica d_e , dada na Proposição 2.2, influencia diretamente na geometria de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e, em particular, na geometria das cônicas. Assim, iremos obter as equações a partir da definição da métrica e não da bijeção, pois é uma forma de estudar e enfatizar os efeitos geométricos.

Proposição 2.2 A função $d_e : (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \times (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d_e((a, b), (c, d)) = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{a}{c}\right)\right)^2 + \left(\ln\left(\frac{b}{d}\right)\right)^2}$$

é uma métrica.

Demonstração. Sejam $u = (a, b), v = (c, d), w = (e, f)$ em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

d1) $d_e(u, u) = \sqrt{(\ln(\frac{a}{a}))^2 + (\ln(\frac{b}{b}))^2} = \sqrt{(\ln 1)^2 + (\ln 1)^2} = 0.$

d2) Se $u \neq v$, então $\ln(\frac{a}{c}) \neq 0$ ou $\ln(\frac{b}{d}) \neq 0$. Logo, $d_e(u, v) = \sqrt{(\ln(\frac{a}{c}))^2 + (\ln(\frac{b}{d}))^2} > 0.$

d3) $d_e(u, v) = \sqrt{(\ln(\frac{a}{c}))^2 + (\ln(\frac{b}{d}))^2} = \sqrt{(\ln(\frac{c}{a}))^2 + (\ln(\frac{d}{b}))^2} = d_e(v, u).$

d4) Veja que

$$d_e(u, w) = \sqrt{\left(\ln\left(\frac{a}{e}\right)\right)^2 + \left(\ln\left(\frac{b}{f}\right)\right)^2} = \sqrt{(\ln a - \ln e)^2 + (\ln b - \ln f)^2}. \quad (6)$$

Usando a desigualdade triangular da métrica euclidiana d_E obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{(\ln a - \ln e)^2 + (\ln b - \ln f)^2} &\leq \sqrt{(\ln a - \ln c)^2 + (\ln b - \ln d)^2} \\ &\quad + \sqrt{(\ln c - \ln e)^2 + (\ln d - \ln f)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Segue da Equação (6) e da inequação (7) que

$$\begin{aligned} d_e(u, w) &\leq \sqrt{(\ln a - \ln c)^2 + (\ln b - \ln d)^2} + \sqrt{(\ln c - \ln e)^2 + (\ln d - \ln f)^2} \\ &= \sqrt{\left(\ln\left(\frac{a}{c}\right)\right)^2 + \left(\ln\left(\frac{b}{d}\right)\right)^2} + \sqrt{\left(\ln\left(\frac{c}{e}\right)\right)^2 + \left(\ln\left(\frac{d}{f}\right)\right)^2} \\ &= d_e(u, v) + d_e(v, w). \end{aligned}$$

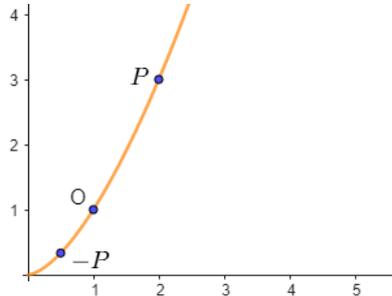
Exemplo 2.3 Vamos utilizar a métrica d_e da Proposição 2.2 calcular a distância de pontos P e $-P$ até a origem, conforme mencionado na Figura 2. Se $P = (2, 3), O = (1, 1)$ e $-P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ então,

$$d_e(P, O) = \sqrt{\left(\ln\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\ln\frac{3}{1}\right)^2} = \sqrt{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2} = d_e(O, Q) \approx 1,298.$$

A título de comparação vimos nas equações (4) e (5) que $d_E(2, 3), (1, 1) \approx 2,236$ e $d_E((2^{-1}, 3^{-1}), (1, 1)) \approx 0,6$.

A Figura 3 temos apresenta a ilustração dos pontos $P = (2, 3)$ e $-P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

Figura 3. Os pontos $P = (2, 3)$ e $-P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ equidistantes da origem segundo a métrica d_e no espaço $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.



Fonte: Autores

Com uma métrica d_e definida em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ podemos agora nos perguntar como é o traço das cônicas na geometria resultante. Além disso, também é natural perguntar sobre uma fórmula para o cálculo da distância de um ponto a uma reta. Na próxima seção realizamos um estudo das retas em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

3 Retas em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Dado um espaço vetorial, utilizaremos suas operações de adição e multiplicação por escalar para darmos um conceito de reta. O leitor poderá consultar [5] para mais detalhes.

Definição 3.1 Em um espaço vetorial $(E, +, \cdot)$, a reta r que contém os vetores u e v de E é, por definição,

$$r = \{(1 - t) \cdot u + t \cdot v; t \in \mathbb{R}\}.$$

Se restringirmos o parâmetro t ao intervalo fechado $[0, 1]$ temos um segmento de reta uv , ou seja,

$$uv = \{(1 - t) \cdot u + t \cdot v; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Após as definições iniciais, podemos estudar as retas em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Começaremos com um exemplo genérico.

Exemplo 3.2 Seja $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ o espaço vetorial com as operações definidas em (3). Um ponto da reta r que passa pelos elementos $R = (a, b)$ e $S = (c, d)$ de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ é escrito como

$$(1 - t) \odot (a, b) \oplus t \odot (c, d) = (a^{1-t}, b^{1-t}) \oplus (c^t, d^t) = (a^{1-t} \cdot c^t, b^{1-t} \cdot d^t)$$

onde $t \in \mathbb{R}$, isto é,

$$r = \{(a^{1-t} \cdot c^t, b^{1-t} \cdot d^t); t \in \mathbb{R}\}. \tag{8}$$

Em particular, se $(a, b) = (1, 1)$ então,

$$r = \{(c^t, d^t); t \in \mathbb{R}\} = \{t \odot (c, d); t \in \mathbb{R}\}. \quad (9)$$

é a reta que passa pela origem $(1, 1)$ e pelo ponto (c, d) .

Vamos determinar as equações geral e reduzida de uma reta r em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Considere que a reta r passa pelos pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$. Os pontos da reta r são da forma $(1 - t) \odot (a, b) \oplus t \odot (c, d)$. Observe que

$$\begin{aligned} (1 - t) \odot (a, b) \oplus t \odot (c, d) &= (a^{1-t}, b^{1-t}) \oplus (c^t, d^t) \\ &= (a^{1-t} \cdot c^t, b^{1-t} \cdot d^t) \\ &= \left(a \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^t, b \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^t \right). \end{aligned}$$

Fazendo

$$x = a \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^t \quad \text{e} \quad y = b \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^t,$$

obtemos

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{c}{a}\right)^t \quad \text{e} \quad \frac{y}{b} = \left(\frac{d}{b}\right)^t.$$

Aplicando o logaritmo nessas equações obtemos

$$\ln \frac{x}{a} = t \cdot \ln \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \ln \frac{y}{b} = t \cdot \ln \frac{d}{b}.$$

Como consequência,

$$\ln \frac{d}{b} \ln \frac{x}{a} = t \ln \frac{d}{b} \ln \frac{c}{a} = \ln \frac{y}{b} \ln \frac{c}{a}.$$

Portanto,

$$\ln \frac{d}{b} \ln x - \ln \frac{c}{a} \ln y = \ln d \ln a - \ln c \ln b. \quad (10)$$

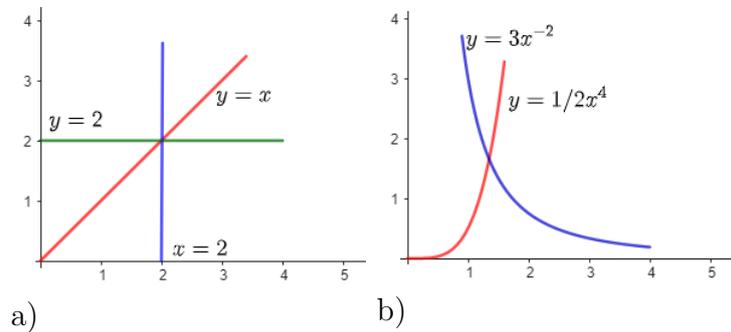
Segue de (10) que a equação geral da reta em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ é dada por uma das formas

$$\alpha \ln x + \beta \ln y = \gamma \quad \text{ou} \quad x^\alpha \cdot y^\beta = e^\gamma, \quad \text{onde} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Temos as seguintes situações:

- (I) se $\alpha = 0$, então y é constante positivo.
- (II) se $\beta = 0$, então x é constante positivo.
- (III) se $\alpha, \beta \neq 0$, então existem reais A, B com $B > 0$ tais que $y = Bx^A$ é a equação reduzida da reta. Em particular, se $A = B = 1$, temos $y = x$.

Figura 4. a) Retas em $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$, situações I), II) e III) no caso em que $\alpha, \beta \neq 0$ e $A = B = 1$. b) Retas em $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$, situação III), com $A \neq B$.



Fonte: Autores

Na Figura 4 temos o esboço de algumas retas em $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$.

A seguir vamos obter uma fórmula para a distância de um ponto a uma reta em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, segundo a métrica d_e .

4 Distância de ponto a reta em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Nesta seção vamos obter uma fórmula para calcular a distância de um ponto a uma reta em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Na geometria do espaço \mathbb{R}^2 canônico, a distância de um ponto $P = (x_o, y_o)$ à reta r de equação geral $ax + by + c = 0$ é dada por

$$d_E(P, r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Na geometria do táxi, conforme LOIOLA e COSTA [6], a distância entre $P = (x_o, y_o)$ e a reta $r : ax + by + c = 0$ é calculada pela fórmula

$$d_T(P, r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\max\{|a|, |b|\}}.$$

Para o caso de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, sejam $P = (x_o, y_o)$ e r a reta de equação geral $a \ln x + b \ln y = c$. Vamos determinar explicitamente

$$d_e(P, r) = \min_{(x,y)} \{d_e(P, (x, y)); a \ln x + b \ln y = c\}.$$

Usaremos a técnica dos multiplicadores de Lagrange para minimizar a função

$$f(x, y) = \left(\ln \frac{x}{x_o} \right)^2 + \left(\ln \frac{y}{y_o} \right)^2, \tag{11}$$

com a restrição $g(x, y) = a \ln x + b \ln y = c$. Por derivação parcial obtemos

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{2}{x} \ln \frac{x}{x_o} & ; & \quad f_y = \frac{2}{y} \ln \frac{y}{y_o} \\ g_x &= \frac{a}{x} & ; & \quad g_y = \frac{b}{y}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Leftrightarrow \frac{2}{x} \ln \frac{x}{x_o} = \frac{\lambda a}{x} \tag{12}$$

$$\frac{2}{y} \ln \frac{y}{y_o} = \frac{\lambda b}{y}, \tag{13}$$

onde ∇f e ∇g são os gradientes das funções f e g . Note que a e b não podem simultaneamente nulos, pois caso contrário, não teríamos uma reta. Assim, vamos supor que $b \neq 0$. Pela simetria do sistema acima, o caso $a \neq 0$ é similar. Neste caso, as igualdades (12) e (13) ocorrem se, e somente se, $\ln \frac{x}{x_o} = \frac{a}{b} \ln \frac{y}{y_o}$. Esses resultados juntamente com a Equação (11) nos fornece

$$f(x, y) = \left(\frac{a}{b} \ln \frac{y}{y_o} \right)^2 + \left(\ln \frac{y}{y_o} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2} \left(\ln \frac{y}{y_o} \right)^2. \tag{14}$$

Mas, $a \ln x + b \ln y = c$, se, e somente se,

$$\begin{aligned} b \ln y &= c - a \ln x \\ &= c - a \ln \left(x_o \left(\frac{y}{y_o} \right)^{\frac{a}{b}} \right) \\ &= c - a \ln x_o - \frac{a^2}{b} \ln \frac{y}{y_o} \\ &= c - a \ln x_o - \frac{a^2}{b} \ln y + \frac{a^2}{b} \ln y_o. \end{aligned}$$

Logo, $(b + \frac{a^2}{b}) \ln y = c - a \ln x_o + \frac{a^2}{b} \ln y_o$, isto é,

$$\ln y = \frac{b}{a^2 + b^2} (c - a \ln x_o + \frac{a^2}{b} \ln y_o). \tag{15}$$

Substituindo-se (15) em (14) obtemos

$$[d_e(P, r)]^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2} \left[\frac{b}{a^2 + b^2} (c - a \ln x_o + \frac{a^2}{b} \ln y_o) - \ln y_o \right]^2 = \frac{(a \ln x_o + b \ln y_o - c)^2}{a^2 + b^2}.$$

Portanto,

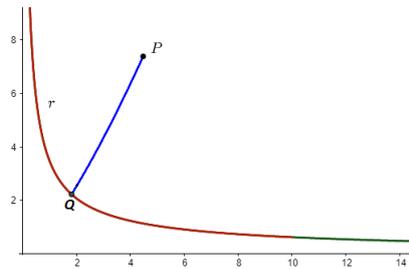
$$d_e(P, r) = \frac{|a \ln x_o + b \ln y_o - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{16}$$

Exemplo 4.1 Vamos determinar a distância, na métrica d_e , da reta r cuja equação é dada por $3 \ln x + 4 \ln y = 5$ ao ponto $P = (e^{\frac{3}{2}}, e^2)$. Pela fórmula (16) temos que

$$d_e(P, r) = \frac{|3 \ln e^{\frac{3}{2}} + 4 \ln e^2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot 2 - 5|}{5} = \frac{3}{2}.$$

Na Figura 5 temos a reta $r : 3 \ln x + 4 \ln y = 5$, o ponto $P = (e^{\frac{3}{2}}, e^2)$ e o ponto Q onde a distância é atingida.

Figura 5. Distância da reta $r : 3 \ln x + 4 \ln y = 5$, ao ponto $P = (e^{\frac{3}{2}}, e^2)$ em $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, d_e)$.



Fonte: Autores

Note que não é possível fazer uma comparação da distância de ponto à reta na geometria exponencial com a distância de ponto à reta na geometria euclidiana plana, visto que retas em uma dessas geometrias não são retas na outra.

Na próxima seção passamos a estudar as cônicas em $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ do ponto de vista da métrica d_e .

5 As cônicas em $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, d_e)$

Nesta seção vamos determinar as cônicas na geometria de $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, d_e)$, isto é, a circunferência, a elipse, a parábola e a hipérbole segundo a métrica d_e .

5.1 A circunferência em $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, d_e)$

Vamos começar lembrando que uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo chamado centro, conforme conceitua LOIOLA e COSTA em [6].

Antes de estudarmos a circunferência em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, vamos recordar alguns casos conhecidos. A circunferência S_E^r de centro (a, b) e raio r na métrica d_E é dada por

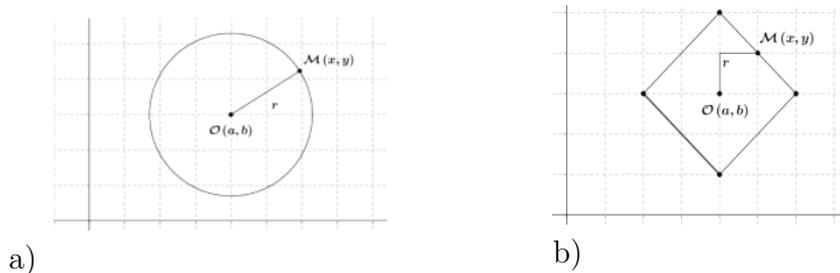
$$S_E^r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

Na geometria da métrica d_T do táxi, a circunferência S_T^r de centro (a, b) e raio r é dada por

$$S_T^r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - a| + |y - b| = r\}.$$

Na figura 6, temos circunferências nas métricas d_E e d_T .

Figura 6. a) Circunferência na métrica d_E , b) Circunferência na métrica d_T .



Fonte: LOIOLA e COSTA [6]

Note que a circunferência na métrica d_T é um quadrado cujas diagonais são paralelas aos eixos coordenados.

Vamos determinar a circunferência S_e^r de raio r centrada na origem $0 = (1, 1)$ em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Por definição, $S^r = \{P \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; d_e(P, 0) = r\}$. Assim, dado um ponto $P = (x, y)$, segue que

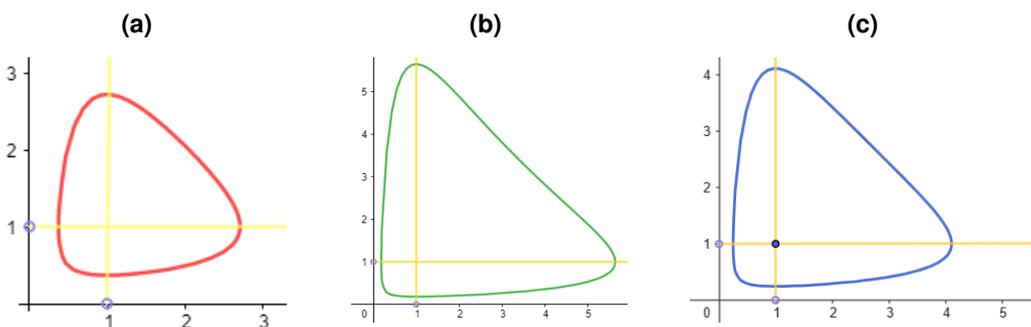
$$d_e(P, 0) = d_e((x, y), (1, 1)) = \sqrt{(\ln x)^2 + (\ln y)^2} = r$$

se, e somente se, $(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = r^2$. Desta forma, a equação da circunferência de centro na origem e raio r é

$$(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = r^2. \quad (17)$$

A Figura 7 mostra três circunferências em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ com centros na origem $(1, 1)$, segundo a métrica d_e .

Figura 7. a) Circunferências com centro na origem $(1, 1)$ e $r = 1$; b) Circunferências com centro na origem $(1, 1)$ e $r = \sqrt{3}$; c) Circunferências com centro na origem $(1, 1)$ e $r = 2$.



Fonte: Autores

5.2 Elipse em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Define-se uma elipse, conforme LOIOLA e COSTA [6], como sendo o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos, é igual a uma constante, maior do que a distância entre os focos.

Se os focos são $F_1 = (a, b)$, $F_2 = (c, d)$ e k é uma constante então a elipse euclidiana E_E é dada por

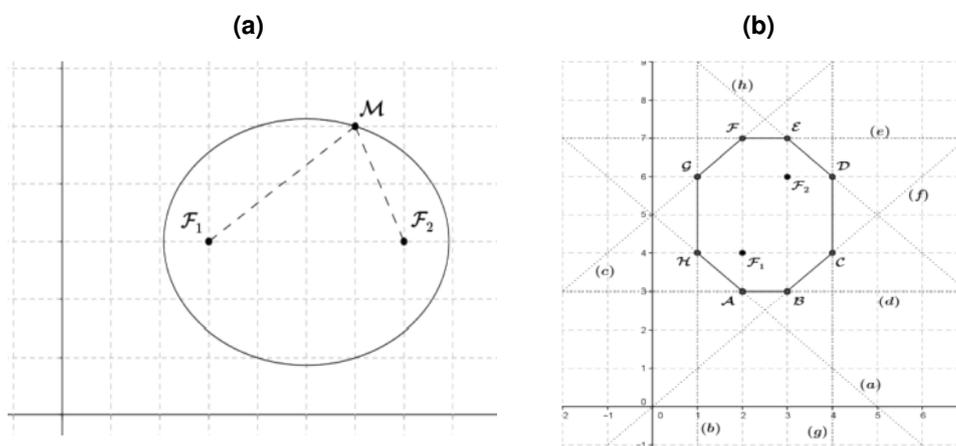
$$E_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = 2k\}.$$

Por sua vez, a elipse E_T na geometria do táxi é dada por

$$E_T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x-a| + |y-b| + |x-c| + |y-d| = 2k\}.$$

A Figura 8 a) mostra uma elipse na geometria euclidiana, ou seja, construída com o uso da métrica d_E . Na Figura 8 b) temos uma elipse na geometria da métrica d_T , do táxi. Essas circunferências possuem aspectos geométricos bem distintos.

Figura 8. a) Elipse euclidiana, b) Elipse com focos $F_1 = (2, 4)$, $F_2 = (3, 6)$ e $2k = 5$, na geometria do táxi.



Fonte: LOIOLA e COSTA [6]

Nesta seção vamos determinar a equação da elipse de centro na origem $O = (1, 1)$. Para tal, partimos da definição de elipse como lugar geométrico. Assim, considere os focos $F_1 = (\frac{1}{c}, 1)$ e $F_2 = (c, 1)$. Além disso, sejam $A_1 = (\frac{1}{a}, 1)$ e $A_2 = (a, 1)$ de modo que $a > c > 1$. Portanto, da definição de elipse devemos ter $d_e(F_1, P) + d_e(P, F_2) = 2d_e(O, A_2)$, onde $P = (x, y)$ é um ponto genérico da elipse. Observe que

$$d_e(O, A_2) = \sqrt{(\ln a)^2 + (\ln 1)^2} = \ln a, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} d_e(F_1, P) &= \sqrt{(\ln(\frac{1}{cx}))^2 + (\ln(\frac{1}{y}))^2} \\ &= \sqrt{(\ln(-cx))^2 + (\ln(-y))^2} \\ &= \sqrt{(\ln(cx))^2 + (\ln y)^2}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$d_e(F_2, P) = \sqrt{(\ln(\frac{x}{c}))^2 + (\ln y)^2}. \tag{20}$$

Da definição de elipse e das equações (18) (19) e (20) obtemos

$$\sqrt{\left(\ln(cx)\right)^2 + \left(\ln y\right)^2} + \sqrt{\left(\ln\left(\frac{x}{c}\right)\right)^2 + \left(\ln y\right)^2} = 2 \ln a. \quad (21)$$

Reorganizando a Equação (21) obtemos

$$\sqrt{(\ln(cx))^2 + (\ln y)^2} = 2 \ln a - \sqrt{\left(\ln\left(\frac{x}{c}\right)\right)^2 + \left(\ln y\right)^2}. \quad (22)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação (22) obtemos

$$\ln(cx)^2 + (\ln y)^2 = 4(\ln a)^2 - 4 \ln a \sqrt{\left(\ln\left(\frac{x}{c}\right)\right)^2 + \left(\ln y\right)^2} + \ln\left(\frac{x}{c}\right)^2 + (\ln y)^2 \quad (23)$$

Usando propriedade dos logaritmos nos termos $(\ln(cx))^2$ e $(\ln(\frac{x}{c}))^2$ que estão fora do radicando, desenvolvendo e cancelando termos na equação (23) obtemos

$$2 \ln c \ln x = 4(\ln a)^2 - 4 \ln a \sqrt{\left(\ln\left(\frac{x}{c}\right)\right)^2 + \left(\ln y\right)^2} - 2 \ln c \ln x,$$

isto é,

$$4 \ln a \sqrt{(\ln(\frac{x}{c}))^2 + (\ln y)^2} = 4(\ln a)^2 - 4 \ln c \ln x. \quad (24)$$

Simplificando a Equação (24) obtem-se

$$\ln a \sqrt{(\ln(\frac{x}{c}))^2 + (\ln y)^2} = (\ln a)^2 - \ln c \ln x. \quad (25)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação (25), usando propriedade dos logaritmos e desenvolvendo o quadrado no termo $\ln(\frac{x}{c})^2$ obtem-se a equação

$$(\ln a)^2[(\ln x)^2 - 2 \ln c \ln x + (\ln c)^2] + (\ln y)^2 = (\ln a)^4 - (\ln a)^2 \ln c \ln x + (\ln c)^2 (\ln x)^2. \quad (26)$$

Realizando a multiplicação do lado esquerdo da Equação (26), eliminando termos e organizando obtem-se

$$((\ln a)^2 - (\ln c)^2)(\ln x)^2 + (\ln a)^2 (\ln y)^2 = (\ln a)^4 - (\ln a)^2 (\ln c)^2. \quad (27)$$

Antes de prosseguirmos vamos obter uma relação análoga à fornecida pelo teorema de Pitágoras na geometria euclidiana. Seja $(1, b)$ o ponto vértice do eixo vertical tal que

$$d_e\left(\left(\frac{1}{c}, 1\right), (1, b)\right) = \ln a.$$

Dessa igualdade obtém-se a seguinte equivalência

$$\sqrt{\left(\ln \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\ln \frac{1}{b}\right)^2} = \ln a \Leftrightarrow \left(\ln \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\ln \frac{1}{b}\right)^2 = (\ln a)^2$$

Logo, a relação que procurávamos é dada por

$$(\ln a)^2 = (\ln b)^2 + (\ln c)^2. \quad (28)$$

Agora, retornando à equação (27) obtém-se

$$((\ln a)^2 - (\ln c)^2)(\ln x)^2 + (\ln a)^2 + (\ln a)^2(\ln y)^2 = (\ln a)^2((\ln a)^2 - (\ln c)^2). \quad (29)$$

As relações (28) e equação (29) fornecem

$$(\ln b)^2(\ln x)^2 + (\ln a)^2(\ln y)^2 = (\ln a)^2(\ln b)^2. \quad (30)$$

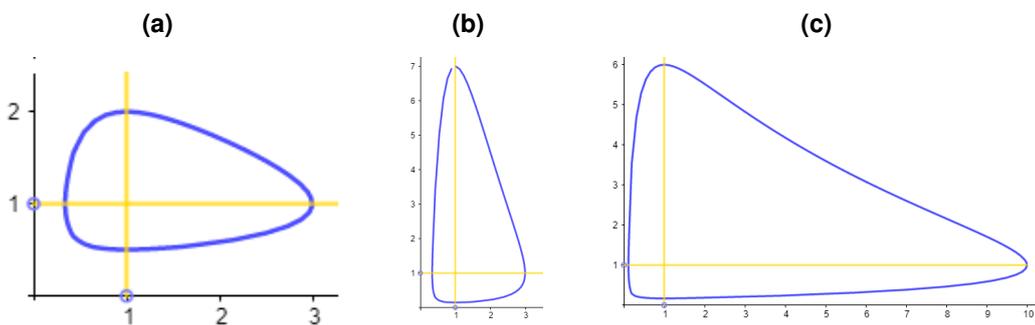
Dividindo ambos os membros da equação (30) por $(\ln a)^2(\ln b)^2$, obtém-se a equação

$$\frac{(\ln x)^2}{(\ln a)^2} + \frac{(\ln y)^2}{(\ln b)^2} = 1,$$

da elipse na geometria da métrica d_e , de centro na origem $0 = (1, 1)$, eixo focal principal com vértices em $A_1 = (\frac{1}{a}, 1)$ e $A_2 = (a, 1)$ e focos $F_1 = (\frac{1}{c}, 1)$ e $F_2 = (c, 1)$, com $a > c > 1$.

A Figura 9 mostra elipses centradas na origem $(1, 1)$, segundo a métrica d_e . Duas elipses com focos no eixo horizontal e uma com focos no eixo vertical.

Figura 9. a) Elipse com centro na origem $(1, 1)$, $a = 3$ $b = 2$; b) Elipse com centro na origem $(1, 1)$, $a = 3$ $b = 7$; c) Elipse com centro na origem $(1, 1)$, $a = 10$ $b = 6$



Fonte: Autores

5.3 Parábola em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Conforme menciona LOIOLA e COSTA [6], dado uma reta d e um ponto $F \notin d$, que chamamos de diretriz e foco, respectivamente, define-se uma parábola como sendo o lugar geométrico dos pontos do P plano cuja distância ao ponto F e a d são iguais.

No caso da geometria euclidiana usual, dado um foco $F = (a, b)$ e a diretriz $d : mx + ny + c = 0$, a parábola P_E é dada por

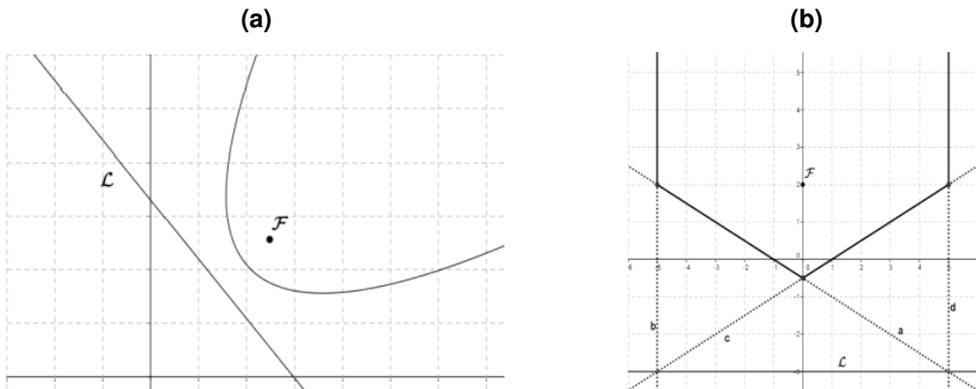
$$P_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = \frac{|mx + ny + c|}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right\}.$$

A parábola P_T na geometria do táxi é dada por

$$P_T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - a| + |y - b| = \frac{|mx + ny + c|}{\max\{|m|, |n|\}} \right\}$$

A Figura 10 mostra a descrição de parábolas na geometria euclidiana e na geometria do táxi.

Figura 10. a) Parábola na geometria euclidiana, b) Parábola na geometria do táxi.



Fonte: LOIOLA e COSTA [6]

Note que a parábola na geometria do táxi, aos olhos euclidianos, é constituída de duas demiretas e dois segmentos que partem da origem das semirretas e se encontram no vértice da parábola. Uma curiosidade é a seguinte: para um móvel percorrer um parte de um desses segmentos que se encontram no vértice, é necessário sair do segmento a cada toque em um ponto, já que só são permitidos movimentos na horizontal e na vertical.

Agora, vamos determinar a equação da parábola de vértice na origem, na métrica d_e . Para tal, partimos da definição de parábola como lugar geométrico. Assim, considere o foco $F = (1, p)$ e a reta diretriz d de equação $y = 1/p$. Portanto, por definição, dado um ponto $P = (x, y)$ na parábola devemos ter

$$d_e(F, P) = d_e(P, d). \tag{31}$$

Por um lado,

$$d_e(F, P) = d_e((1, p), (x, y)) = \sqrt{(\ln x)^2 + \left(\ln \frac{y}{p}\right)^2}. \quad (32)$$

Por outro, usando a equação da diretriz na forma $\ln y = -\ln p$ e a fórmula (16)

$$d_e(P, d) = |\ln y - (-\ln p)| = |\ln py|. \quad (33)$$

Assim, da condição de definição de parábola posta na equação (31) e das equações (32) e (33) obtém-se

$$\sqrt{(\ln x)^2 + \left(\ln \frac{y}{p}\right)^2} = |\ln py| \quad (34)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação (34) e simplificando os termos obtém-se a equação

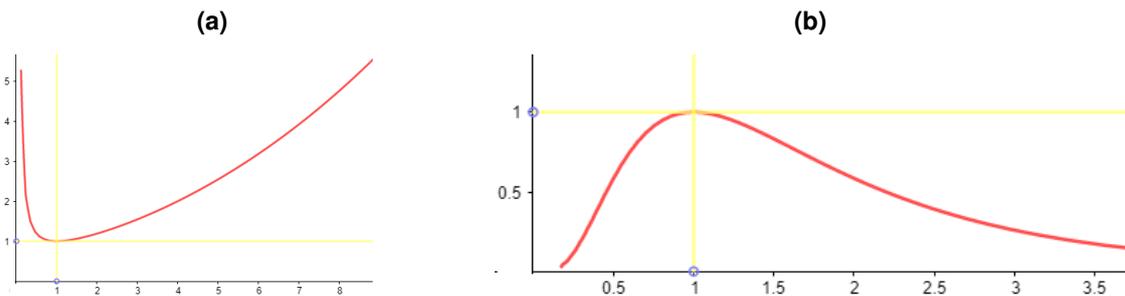
$$(\ln x)^2 = 4 \ln p \ln y,$$

de uma parábola de vértice na origem $V = (1, 1)$, foco $F = (1, p)$ e reta diretriz d de equação $y = \frac{1}{p}$. Se isolarmos a variável y a equação da parábola torna-se

$$y = e^{\frac{(\ln x)^2}{4 \ln p}}.$$

A Figura 11 mostra parábolas com vértice na origem $(1, 1)$ e com reta diretriz horizontal $y = \frac{1}{p}$.

Figura 11. a) Parábola com reta diretriz $y = \frac{1}{2}$; b) Parábola com reta diretriz $y = \frac{5}{4}$.



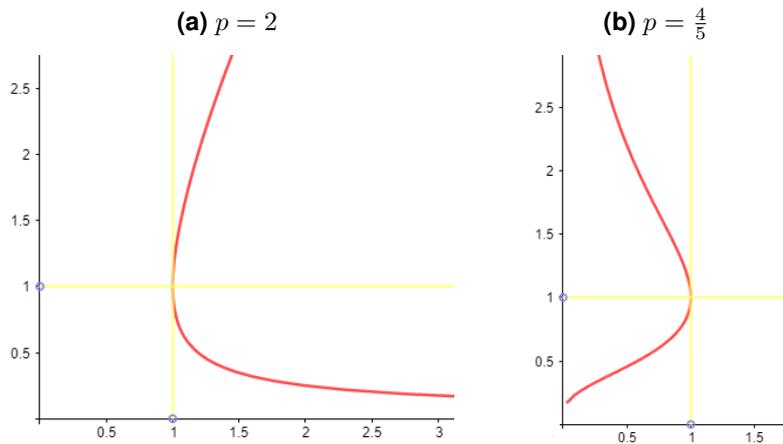
Fonte: Autores

No caso em que o foco é $F = (p, 1)$ e a reta diretriz possui equação $x = \frac{1}{p}$, de modo análogo, a equação

$$(\ln y)^2 = 4 \ln p \ln x.$$

A Figura 12 mostra parábolas com vértice na origem e reta diretriz vertical.

Figura 12. Parábolas com reta diretriz $x = \frac{1}{p}$



Fonte: Autores

5.4 Hipérbole em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Dados dois pontos F_1 e F_2 do plano, que chamamos de focos, definimos hipérbole como sendo o lugar geométrico dos pontos para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a um valor constante (LOIOLA e COSTA [6]).

No caso em que $F_1 = (x_o, y_o)$ e $F_2 = (x_1, y_1)$ a hipérbole H_E na métrica d_E é dada por

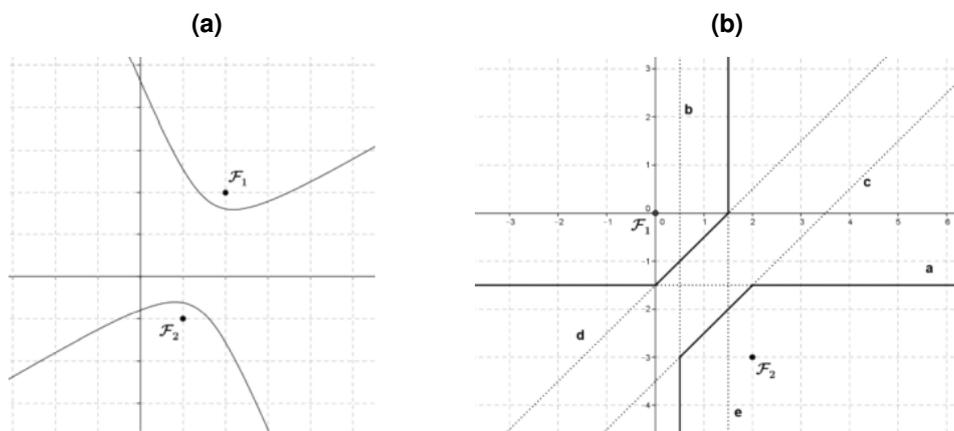
$$H_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |\sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} - \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}| = 2k\}.$$

Na geometria do táxi a hipérbole H_T é dada por

$$H_T = \{|x - x_o| + |y - y_o| - (|x - x_1| + |y - y_1|) = 2k\}.$$

A Figura 13 mostra uma descrição de hipérboles nessas geometrias.

Figura 13. a) Hipérbole euclidiana, b) Hipérbole na geometria do táxi.



Fonte: LOIOLA e COSTA [6]

Agora vamos determinar a equação da hipérbole, de centro na origem $(1, 1)$, na métrica d_e . Para tal, partimos da definição de elipse como lugar geométrico. Assim, considere os focos $F_1 = (\frac{1}{c}, 1)$, $F_2 = (c, 1)$, Além disso, sejam $A_1 = (\frac{1}{a}, 1)$ e $A_2 = (a, 1)$ de modo que $a > c > 1$. Além disso, para facilitar as contas, seja $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\ln c)^2 = (\ln a)^2 + (\ln b)^2. \quad (35)$$

Dado um ponto $P(x, y)$ na hipérbole, segue da definição que

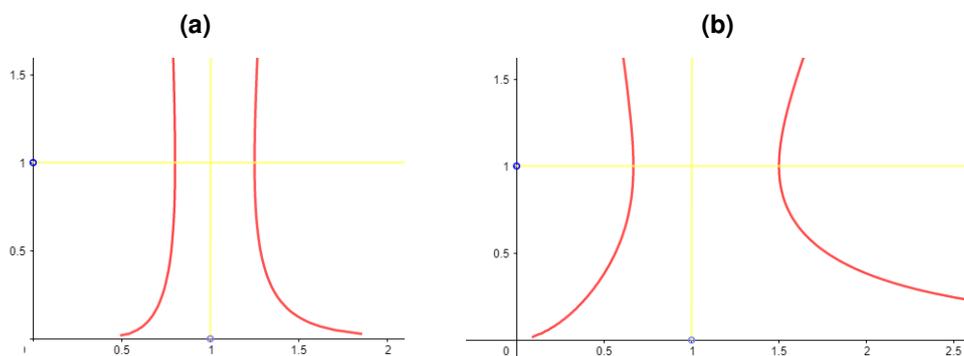
$$|d_e(P, F_1) - d_e(P, F_2)| = 2d_e(O, A_2) = 2 \ln a. \quad (36)$$

Da definição de módulo segue que $d_e(P, F_1) - d_e(P, F_2) = \pm 2 \ln a$. Assim, usando a métrica obtem-se $\sqrt{(\ln cx)^2 + (\ln y)^2} - \sqrt{\left(\ln \frac{x}{c}\right)^2 + (\ln y)^2} = \pm 2 \ln a$. Simplificando os termos e usando a relação 35, obtem-se a equação da hipérbole focos no eixo horizontal $y = 1$.

$$\frac{(\ln x)^2}{(\ln a)^2} - \frac{(\ln y)^2}{(\ln b)^2} = 1.$$

A Figura 14 mostra casos particulares com focos no eixo horizontal $y = 1$.

Figura 14. a) Hipérboles com focos no eixo $y = 1$, $a = \frac{5}{4}$ $b = 4$ b) Hipérboles com focos no eixo $y = 1$, $a = \frac{3}{2}$ $b = \frac{1}{2}$



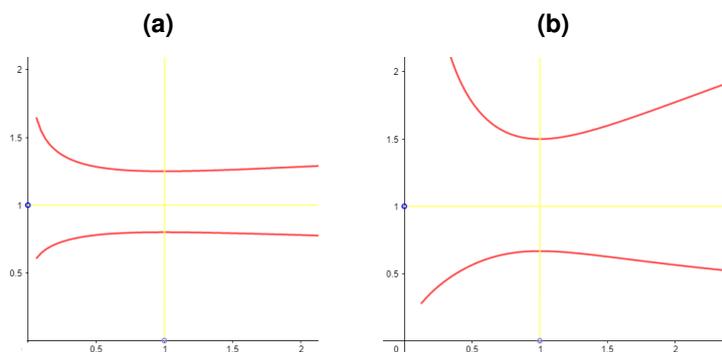
Fonte: Autores

Analogamente, obtem-se a equação da hipérbole de centro na origem e focos no eixo vertical $x = 1$.

$$\frac{(\ln y)^2}{(\ln a)^2} - \frac{(\ln x)^2}{(\ln b)^2} = 1.$$

A Figura 15 apresenta hipérboles com focos no eixo vertical $x = 1$.

Figura 15. a) Hipérbole com focos no eixo $x = 1$, $a = \frac{5}{4}$ $b = 4$. b) Hipérboles com focos no eixo $x = 1$ $a = \frac{3}{2}$ $b = \frac{1}{2}$



Fonte: Autores

Conclusão

Em nosso trabalho abordamos aspectos de uma geometria construída em um espaço vetorial que é subconjunto do espaço euclidiano bidimensional, a saber o conjunto dos pares ordenados de coordenadas positivas. A métrica foi introduzida no espaço fazendo-se uso da função logarítmica, cujo domínio está em consonância com a positividade das coordenadas do espaço. De posse da métrica passamos a estudar a geometria que surge como consequência. Utilizando as operações definidas no espaço buscamos compreender o comportamento das retas do ponto de vista da estrutura de espaço vetorial e utilizamos o software geogebra para ilustrar algumas situações. Também estudamos uma estratégia para calcular a distância de um ponto a uma reta. Neste caso, a fórmula possui certa semelhança com as fórmulas da geometria euclidiana canônica e da geometria do táxi. Por fim, estudamos as cônicas nessa geometria obtendo as equações que as determinam e realizando visualizações geométricas com o uso do software geogebra. Por fim observamos que a visualização geométrica das cônicas está diretamente subordinada à maneira como medimos a distância no espaço. Acreditamos que o trabalho seja útil aos interessados pelo assunto, a alunos e professores, tanto do ensino médio quanto da graduação em matemática.

Fontes de financiamento

Não há.

Orcid

Elzimar de Oliveira Rufino  <https://orcid.org/0000-0002-1430-2283>

Rafael Jorge Pontes Diógenes  <https://orcid.org/0000-0002-1362-5179>

Referências

1. Fréchet, Maurice. Sur quelques points du Calcul Fonctionnel , Rendic. Circ. Mat. Palermo 22, 174, 1906.
2. Taskovic, M. R. Fréchet's Metric Spaces. 100th next , Mathematica Moravica, Vol. 9(2005), pp. 69 - 75.
3. Boyer C. "História da Matemática". ed. Edgard Blucher, S. Paulo. Pag. 424 - 427, 1974.
4. Lima, E. L. "Espaços métricos". IMPA, Rio de Janeiro, 2005
5. Lima, E. L. "Álgebra linear". IMPA, Rio de Janeiro, 2009
6. Loiola C. A. G., Costa, C.S. As cônicas na geometria do taxi. Revista do Centro de Ciência e exatas-UFSM,v.37 p. 179 - 191, 2015.
7. Lopes, Tharine Antunes. Uma conexão entre a álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos.Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018
8. Paula, C. T., Rodrigues, L. M. D. A. A geometria do espaço de Minkowski e a teoria da relatividade especial. REMAT Revista Eletrônica da Matemática · Abril 2023. <https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6351>
9. Rufino, E. O., Navezca, K. D. Espaços vetoriais do tipo gráfico. 1.ed. Boa Vista: EDUFRR, 2021.
10. Rufino, E. O., Naveca, K. D. Novos exemplos de espaços vetoriais do tipo gráfico. Revista de Ciência e Tecnologia - RCT- UFRR, Boa Vista, 2021. <https://doi.org/10.18227/rct.v7i0.6777>
11. Steinbruch, A., Winterle, P. Álgebra linear. 2. ed., Pearson Maron Books, São Paulo,1987.
12. Shonoda, E. N. Classification of conics and Cassini curves in Minkowski space-time plane. Journal of the Egyptian Mathematical Society 24, 270 - 278, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.joems.2015.07.002>
13. Silva, D. A. Elipse no plano de Minkowski. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, Universidade Federal do Acre, Acre, 2021.
14. Batalha, J. A. Um estudo das cônicas no plano de Minkowski. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, Universidade Federal do Acre, Acre, 2023.

Editor-científico: Marcelo Batista de Souza. Orcid iD: <https://orcid.org/0000-0003-2397-5399>

