

Indutância de solenoides e circuitos magnéticos: comparativo entre resultados analíticos e simulados

Inductance of solenoids and magnetic circuits: a comparative analysis between analytical and simulated results

Juliano Bitencourt Padilha ^{a,*}, Felipe da Silva^a, João Vitor Sousa Soeiro^a, Lisandra Kittel Ries ^a, Adilson Pacheco Bortoluzzi ^a, Ricardo Luiz Alves ^a

^aInstituto Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brasil

* Autor Correspondente: juliano.padilha@ifsc.edu.br

Resumo: Este trabalho apresenta uma abordagem teórica referente ao cálculo da indutância de solenoides e circuitos magnéticos. No caso dos solenoides, são avaliados resultados de três equaes analíticas. Já para o cálculo de circuitos magnéticos,  apresentada uma metodologia que considera algumas hipóteses simplificativas. Por fim, os resultados analíticos são comparados aos obtidos por meio de simulaes com o software FEEM.

Palavras-chave: Indutância; Solenoides; Circuitos Magnéticos; software FEEM.

Abstract: This work presents a theoretical approach regarding the calculation of the inductance of solenoids and magnetic circuits. In the case of solenoids, results from three analytical equations are evaluated. For the calculation of magnetic circuits, a methodology is presented that considers some simplifying assumptions. Finally, the analytical results are compared to those obtained through simulations using the FEEM software.

keywords: Inductance; Solenoids; Magnetic Circuits; FEEM software.

1 Introduo

A teoria eletromagntica está associada ao cálculo de campos eltricos e magnéticos. Enquanto os capacitores estão relacionados ao armazenamento de energia em um campo elétrico, os indutores estão relacionados ao armazenamento de energia em um campo magnético. Presentes em quase todos os circuitos elétricos e eletrnicos, desde os de pequeno porte, como transmissores e receptores de sinais, até os de grande porte, como em transformadores de potência e motores de induo, os indutores assumem um papel importante no funcionamento de dispositivos eletromagnéticos.

A indutância própria de uma bobina representa a capacidade dessa produzir um fluxo magnético dada uma determinada corrente atravessando a mesma. Há na literatura trabalhos que abordam o dimensionamento de indutâncias a partir de equaes analíticas e também a partir de simulaes computacionais que empregam o método de elementos finitos [1–6]. Este trabalho faz uso dessas duas ferramentas, com destaque para o emprego do *software* livre

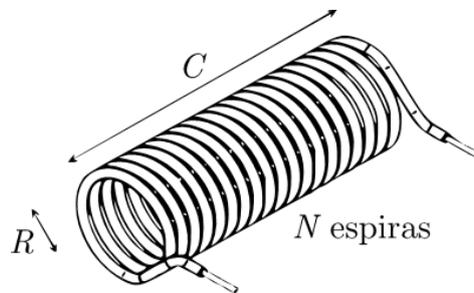
FEEM (*Finite Element Method Magnetics*) [7, 8]. A abordagem analítica é apresentada tanto para solenoides quanto para circuitos magnéticos e os resultados provenientes da mesma são comparados com os obtidos por meio das simulações.

Este artigo organiza-se da seguinte forma: na seção 2, são descritas as principais equações para o cálculo analítico da indutância de solenoides; na seção 3 apresenta as fórmulas analíticas para circuitos magnéticos e suas considerações; na seção 4, são apresentados os resultados das análises comparativas entre os cálculos analíticos e as simulações realizadas pelo software FEEM; por fim, na quinta seção, as conclusões destacam os principais achados e discutem as implicações dos métodos avaliados, além de sugerir possíveis melhorias para estudos futuros.

2 Solenoides: Cálculo Analítico

A Figura 1 apresenta um solenoide com núcleo de ar com os respectivos parâmetros que o definem.

Figura 1. Solenoide com núcleo de ar



Fonte: adaptado de [9].

Segundo a referência [9], a indutância do solenoide com núcleo de ar é dada por:

$$L = \frac{0,0395N^2R^2}{C} \quad (1)$$

$$L = \frac{0,0395N^2R^2}{\sqrt{C^2 + 4R^2}} \quad (2)$$

Onde: $L(\mu H)$ é a indutância, $C(cm)$ é o comprimento, $R(cm)$ é o raio, N é o número de espiras.

A Equação (1) assume que $C \gg R$ (solenóide longo), representando uma aproximação para a Equação (2).

Já a referência [10] apresenta a seguinte equação:

$$L = \frac{1,5648N^2R^2}{36R + 40C} \quad (3)$$

3 Circuito Magnético: Cálculo Analítico

Para um circuito magnético, a indutância de uma bobina é dada por:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}} \quad (4)$$

Onde: $L(H)$ é a indutância, N é o número de espiras e \mathcal{R}_{eq} (A/Wb) é a relutância magnética equivalente do circuito magnético.

A relutância magnética representa uma oposição à passagem do fluxo magnético, sendo expressa por:

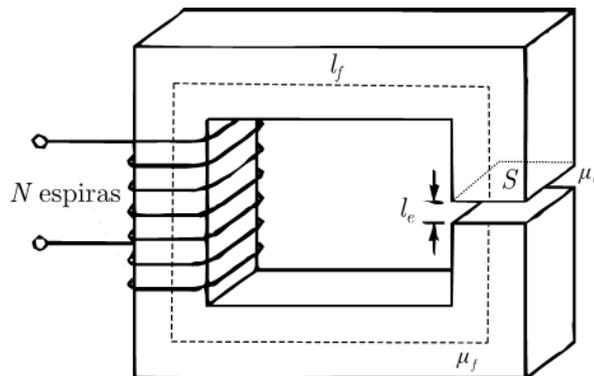
$$\mathcal{R} = \frac{l_m}{\mu S} \quad (5)$$

Onde: $l_m(m)$ é o comprimento do caminho magnético, μ (H/m) é a permeabilidade magnética do meio e $S(m^2)$ é a área atravessada pelo fluxo magnético.

Considerando o circuito magnético apresentado na Figura 2, tem-se que a relutância equivalente, nesse caso, é a soma da relutância do núcleo ferromagnético (\mathcal{R}_f) com a relutância do entreferro (\mathcal{R}_{eq} – região de ar):

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_e. \quad (6)$$

Figura 2. Circuito magnético com entreferro (região de ar)



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na prática, a relutância do núcleo ferromagnético varia de acordo com a corrente que atravessa a bobina (problema não-linear), uma vez que permeabilidade magnética do núcleo depende do campo magnético. Por outro lado, a relutância do entreferro (que não varia com a corrente), a depender da dimensão do mesmo, tende a ser muito maior que a relutância do núcleo, de modo que em muitos casos é possível assumir que:

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_e \quad (7)$$

Assumindo essa aproximação, a indutância da bobina será dada por:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l_e}. \quad (8)$$

Onde: $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$ é permeabilidade magnética do ar e $l_e(m)$ é o comprimento do entreferro.

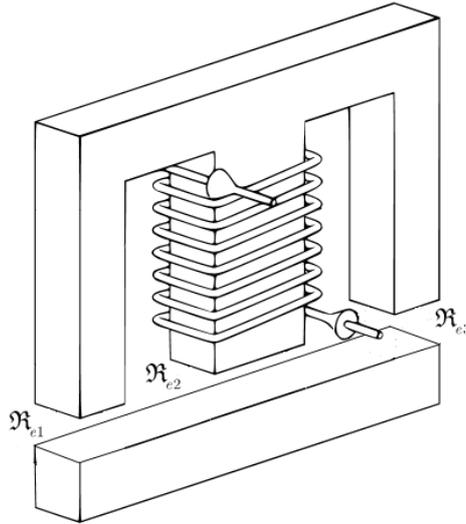
A Figura 3 ilustra um outro circuito magnético. Nesse circuito, desprezando a relutância do

núcleo ferromagnético e em analogia com a teoria de circuitos elétricos, tem-se que:

$$\mathcal{R}_{eq} = \left(\frac{1}{\mathcal{R}_{e1}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{e3}} \right)^{-1} + \mathcal{R}_{e2}. \quad (9)$$

Onde: \mathcal{R}_{e1} , \mathcal{R}_{e2} e \mathcal{R}_{e3} representam as relutâncias dos entreferros. Observe que as relutâncias \mathcal{R}_{e1} e \mathcal{R}_{e3} encontram-se em paralelo.

Figura 3. Circuito magnético com três entreferros (núcleo EI)



Fonte: Elaborado pelos autores.

Ainda, para o circuito da Figura 3, assumindo que todos os entreferros apresentam comprimento l_e , pode ser considerado um fator de correção, F , para a indutância obtida [11]:

$$L = F \frac{N^2}{\mathcal{R}_{eq}} \quad (10)$$

$$F = \left[1 + \frac{2l_e}{\sqrt{S_c}} \ln \left(\frac{G}{l_e} \right) \right] \quad (11)$$

Onde: $S_c(m^2)$ é a área da seção transversal da coluna central e $G(m)$ é a altura da janela (região onde é inserida a bobina).

4 Resultados Analíticos e Simulados

Primeiramente são apresentados os resultados obtidos para solenoides com núcleo de ar. Os mesmos têm as seguintes especificações:

- solenoide 1: $R = 2cm$, $C = 5cm$ e $N = 100$ espiras;
- solenoide 2: $R = 2cm$, $C = 10cm$ e $N = 200$ espiras;
- solenoide 3: $R = 2cm$, $C = 20cm$ e $N = 400$ espiras;
- solenoide 4: $R = 2cm$, $C = 40cm$ e $N = 800$ espiras;
- solenoide 5: $R = 2cm$, $C = 60cm$ e $N = 1200$ espiras;

- solenoide 6: $R = 2\text{cm}$, $C = 80\text{cm}$ e $N = 1600$ espiras.

A Tabela 1 ilustra os resultados obtidos. As diferenças calculadas assumem o resultado de simulação como referência.

Tabela 1. Solenoides: comparativo entre resultados

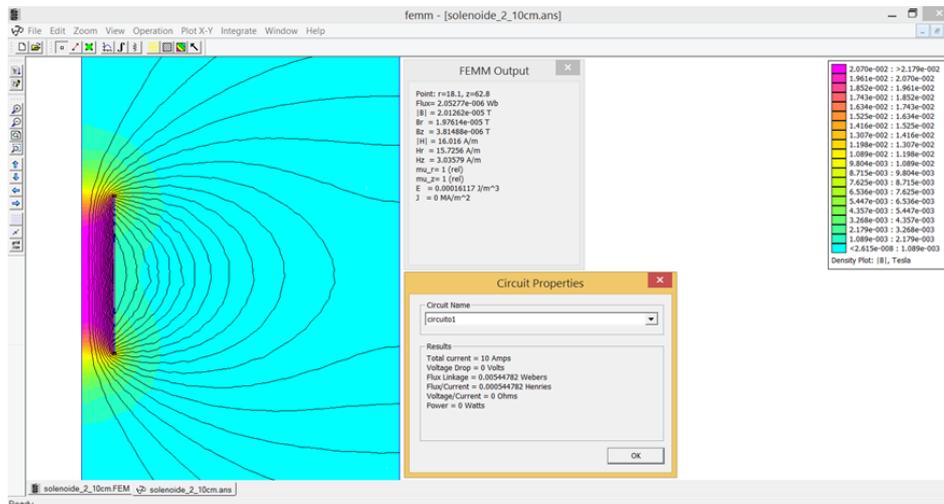
solenóide	indutância (mH)				diferenças (%)		
	FEEM	Equação (1)	Equação (2)	Equação (3)	Equação (1)	Equação (2)	Equação (3)
1	0,2330	0,3160	0,2468	0,2301	+35,62	+5,92	-1,24
2	0,5448	0,6320	0,5868	0,5304	+16,01	+7,71	-2,64
3	1,1874	1,2640	1,2395	1,1485	+6,45	+4,39	-3,28
4	2,4816	2,5280	2,5155	2,3959	+1,87	+1,37	-3,45
5	3,7750	3,7920	3,7836	3,6461	+0,45	+0,23	-3,41
6	5,0718	5,0560	5,0497	4,8972	-0,31	-0,44	-3,44

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Tabela 1, é possível notar uma boa concordância entre todos os resultados e, também, fica claro que a Equação (1) não é adequada para solenoides curtos.

A Figura 4 ilustra alguns resultados apresentados pelo software FEEM. No caso do solenoide, trata-se de um problema axissimétrico.

Figura 4. Exemplo de resultados apresentados pelo software FEEM



Fonte: Elaborado pelos autores.

O circuito magnético apresentado na Figura 2 também foi avaliado. As seguintes dimensões foram assumidas: largura = 10cm , altura = 10cm , profundidade = 2cm , largura da coluna = 2cm , $l_e = 1\text{mm}$, $l_f = (36\text{cm} - l_e)$ e $N = 400$ espiras. Para a permeabilidade magnética relativa do núcleo ferromagnético ($\mu_0 r_f$), seis valores foram considerados: 500, 1000, 2000, 3000, 5000 e 10000. Ainda, para o cálculo da indutância fez-se o uso da Equação (4) para dois casos: considerando a relutância magnética do núcleo e desconsiderando a mesma. A Tabela 2 ilustra os resultados obtidos. As diferenças calculadas assumem o resultado de simulação como referência.

A Tabela 2 demonstra que as diferenças encontradas para o caso $\mathcal{R}_f \neq 0$ são uniformes, sugerindo uma melhoria no cálculo a partir de novas considerações. Assim, analisando os

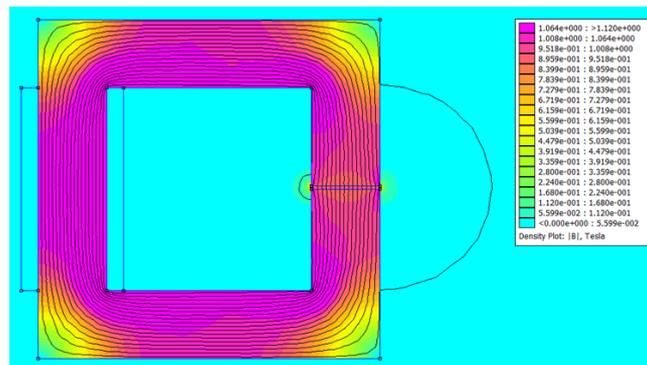
Tabela 2. Circuito magnético: comparativo entre resultados

μ_{rt}	FEEM	indutância (mH)		diferenças (%)	
		Equação (4) com $\mathcal{R}_f = 0$	Equação (4) com $\mathcal{R}_f \neq 0$	Equação (4) com $\mathcal{R}_f = 0$	Equação (4) com $\mathcal{R}_f \neq 0$
500	60,7765	80,4248	49,0994	+32,33	-19,21
1000	75,1557	80,4248	60,9740	+7,01	-18,87
2000	85,3958	80,4248	69,3616	-5,82	-18,78
3000	89,4849	80,4248	72,6949	-10,12	-18,76
5000	93,0596	80,4248	75,6014	-13,58	-18,76
10000	95,9402	80,4248	77,9385	-16,17	-18,76

Fonte: Dados da pesquisa.

resultados apresentados pelo *software* FEEM, é possível constatar que o caminho assumido para l_f nos cálculos analíticos é sobre-estimado, uma vez que há uma maior concentração de linhas de fluxo nas bordas internas do núcleo (ver Figura 5).

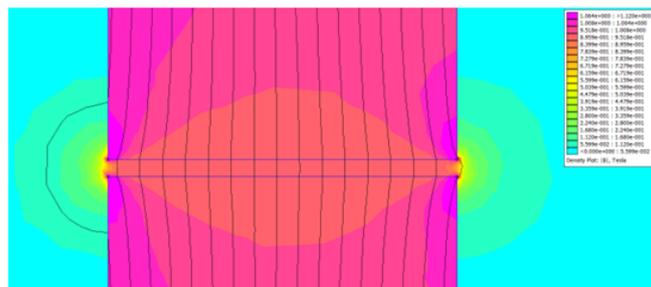
Figura 5. Linhas de fluxo e densidade de fluxo magnético ao longo do circuito magnético (resultado para $\mu_{rf} = 3000$)



Fonte: Elaborado pelos autores.

Outro fato constatado nas simulações está relacionado à área da seção transversal assumida para o cálculo analítico da relutância do entreferro. Observando a Figura 6, é possível constatar que área assumida nos cálculos é subestimada, uma vez que há um fluxo magnético disperso considerável a essa área (além dos limites da mesma). Essa mesma constatação é descrita em [12].

Figura 6. Região do entreferro (resultado para $\mu_{rf} = 3000$)



Dado o exposto nos dois parágrafos anteriores, novos cálculos analíticos foram realizados considerando um decréscimo de 10% para o valor de l_f e um aumento de 10% para a área a ser

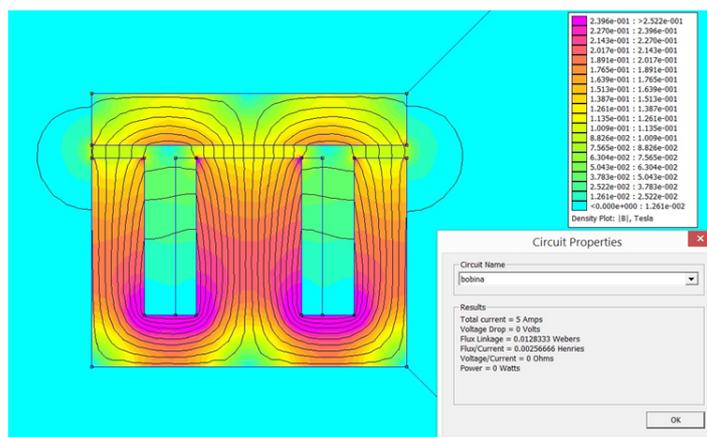


Figura 7. Linhas de fluxo e densidade de fluxo magnético ao longo do circuito magnético com três entreferros (núcleo EI)

considerada no cálculo da relutância do entreferro. Os resultados obtidos a partir dessas novas considerações são apresentados na Tabela 3 e comparados com os resultados de simulação (esses últimos são assumidos como referência).

Tabela 3. Circuito magnético: comparativo entre resultados

μ_{rf}	FEEM	indutância (mH)		diferenças (%)	
		Equação (4) com $\mathcal{R}_f = 0$	Equação (4) com $\mathcal{R}_f \neq 0$	Equação (4) com $\mathcal{R}_f = 0$	Equação (4) com $\mathcal{R}_f \neq 0$
500	60,7765	88,4672	54,2205	+45,56	-10,79
1000	75,1557	88,4672	67,2341	+17,71	-10,54
2000	85,3958	88,4672	76,4029	+3,60	-10,53
3000	89,4849	88,4672	80,0413	-1,14	-10,55
5000	93,0596	88,4672	83,2114	-4,93	-10,58
10000	95,9402	88,4672	85,7589	-7,79	-10,61

Fonte: Dados da pesquisa.

Pela Tabela 3, observa-se que para valores menores de μ_{rf} a relutância magnética do núcleo ferromagnético afeta significativamente no resultado da indutância. Já para valores de μ_{rf} a partir de 2000, esse impacto é menor. Ainda, de forma geral, observa-se uma atenuação nas diferenças obtidas quando comparadas com os resultados apresentados na Tabela 2, validando, principalmente, os novos valores assumindo para o comprimento e área do entreferro nos cálculos analíticos.

Um último circuito magnético foi analisado, esse possuindo a mesma forma do apresentado na Figura 3. O resultado da simulação é apresentado na Figura 7, onde a indutância obtida foi de $2,5667mH$ para $\mu_{rf} = 5000$. Analiticamente, a partir da equação (10) e desconsiderando a relutância do núcleo ferromagnético, o resultado é de $2,3403mH$. Assim, a diferença observada, assumindo o resultado de simulação como referência, foi da ordem de $-8,82\%$.

5 Considerações Finais

Este artigo apresentou uma abordagem abrangente sobre indutâncias, focada na obtenção de resultados analíticos e de simulações por meio do método de elementos finitos utilizando o software livre FEEM. É importante ressaltar que tais resultados procuram fornecer uma base teórica para o projeto de indutores.

Para os solenoides, observou-se que as equações analíticas são adequadas em cenários específicos, como solenoides longos, mas apresentam discrepâncias crescentes em casos de solenoides curtos. Em contrapartida, os resultados mostraram que a consideração das relutâncias do núcleo e do entreferro é crucial para uma maior precisão, especialmente em situações em que as características geométricas e materiais têm um impacto significativo no fluxo magnético.

Em relação aos resultados obtidos, de maneira geral, os mesmos apresentaram boa concordância. Especificamente, para as análises do circuito magnético, buscando cálculos mais precisos, se fez necessário reavaliar o comprimento do caminho magnético do núcleo e também a área a ser considerada no cálculo da relutância do entreferro.

Em resumo, este artigo visou contribuir significativamente para o entendimento de indutâncias e estabelecer uma base sólida para posteriores investigações. Assim, espera-se que o mesmo inspire pesquisadores a explorar mais o tema e a aplicar os conhecimentos aqui apresentados em trabalhos futuros.

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Orcid

Juliano Bitencourt Padilha  <https://orcid.org/0000-0003-2219-6836>

Lisandra Kittel Ries  <https://orcid.org/0000-0003-3708-9582>

Adilson Pacheco Bortoluzzi  <https://orcid.org/0000-0003-0895-4282>

Ricardo Luiz Alves  <https://orcid.org/0000-0003-4225-727X>

Referências

1. SEMENOV, A. A.; ASHANIN, M. E. Inductance of the Coil Changed by Electric Field. 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/280098222>.
2. BARBI, I.; FONT, C. H. I.; ALVES, R. L. Projeto Físico de Indutores e Transformadores. 2002. Disponível em: https://www.professorpetry.com.br/Bases_Dados/Apostilas_Tutoriais/Apostila_Projeto_Fisico_De_Magneticos.pdf.
3. VILKN, P. H. J. Desenvolvimento de Metodologia para Projeto de Indutores Utilizados em UPS de Alto Rendimento. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais. Dissertação de mestrado. 2018. Disponível em: <https://www.ppgee.ufmg.br/defesas/1572M.PDF>.
4. BUENO, M.; ASSIS, A. K. T. Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos. 2 edição. Apeiron Montreal, 2015.
5. THOMPSON, M. T. Inductance Calculation Techniques – Part II: Approximations and Handbook Methods. Power Control and Intelligent Motion, 1999. Disponível em: <http://www.thompsonrd.com/induct2.pdf>.
6. GOMES, L. F. E. Projeto e Desenvolvimento de Indutores de Núcleo EI. Curso de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina. Trabalho de conclusão de curso. 2019.
7. Finite Element Method Magnetics. Disponível em: <https://www.femm.info/wiki/HomePage>.

8. Finite Element Method Magnetics (Version 4.2 – User’s Manual). 2015. Disponível em: <https://www.femm.info/wiki/Documentation/>.
9. BASTOS, J. P. A. Eletromagnetismo para Engenharia – Estática e Quase Estática. 3ª edição revisada, Editora UFSC, 2012.
10. American Radio Relay League. The ARRL Handbook for Radio Communications (Publication no. 6 of the Radio amateur’s library). ARRL, 2003.
11. MCLYMAN, C. W. T. Transformer and Inductor Design Handbook. Third edition, revised and expanded. Marcel Dekker, Idyllwild, California, U.S.A., 2004.
12. TERSARIOL, F. G. R. Estudo do Caminho Magnético Médio em Estrutura Eletromagnética Monofásica. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 2017.