

Caracterização de uma transição de fase contínua em um sistema caótico

Characterization of a continuous phase transition in a chaotic system

Edson D. Leonel ^{a,*}, Célia M. Kuwana ^a

^aDepartamento de Física, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, Brasil

* Correspondence: edson-denis.leonel@unesp.br

Resumo: Discutimos uma invariância de escala para a difusão caótica em uma transição de fase de integrabilidade para não integrabilidade em uma classe de sistemas dinâmicos descritos por um mapeamento bidimensional, não linear e preserva a área no espaço de configurações. As variáveis que descrevem o sistema são a ação I e o ângulo θ . Este tem a propriedade de divergir no limite em que a ação é suficientemente pequena. A transição de fase é controlada por um parâmetro ϵ . Uma invariância de escala observada

para a ação quadrática média ao longo do mar caótico prova que a transição observada da integrabilidade para a não integrabilidade é equivalente a uma transição de fase de segunda ordem, que é também conhecida como transição de fase contínua. Uma evidência clara disso refere-se ao fato de que o parâmetro de ordem se aproxima de zero ao mesmo tempo que a susceptibilidade - resposta do parâmetro de ordem à variação do parâmetro de controle - diverge no mesmo limite.

Palavras-chave: Difusão; Transição de fase; Expoentes críticos.

Abstract: We discuss a scaling invariance for chaotic diffusion in a transition from integrability to nonintegrability in a class of dynamical systems described by a two-dimensional, nonlinear, and area-preserving mapping. The variables describing the system are the action I and the angle θ , which have the property of diverging in the limit of vanishingly action. The phase transition is controlled by a parameter ϵ . A scaling invariance observed for the average squared action along the chaotic sea proves that the transition observed from integrability to nonintegrability is equivalent to a second order and is therefore called a continuous phase transition. A clear signature of this

is to the fact that the order parameter approaches zero simultaneously, and the response of the order parameter to the variation of the control parameter (susceptibility) diverges.

keywords: Diffusion; Phase transition; Critical exponents.

Os sistemas Hamiltonianos são utilizados na investigação e caracterização de muitas propriedades dinâmicas de vários sistemas físicos. Essa descrição pode fornecer um conjunto de resultados interessantes com impactos no entendimento de sistemas físicos que exibem dinâmicas complexas [1]. Um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade pode ser caracterizado por dois pares de variáveis canônicas, que são tipicamente (I_i, θ_i) , com $i = 1, 2$, e I denotando a variável ação enquanto θ corresponde ao ângulo. Para a transição que será discutida neste trabalho, a função Hamiltoniana pode ser escrita como $H(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2)$ onde H_0 corresponde à parte integrável

enquanto H_1 representa a parte não integrável. Esta por sua vez é controlada por um parâmetro ϵ . Quando $\epsilon = 0$ o sistema é integrável. Isso porque tanto a energia quanto a ação são preservadas. Por outro lado para $\epsilon \neq 0$, apenas a energia é preservada, o que destrói a integrabilidade do sistema. Como veremos no decorrer do trabalho, a transição de integrabilidade para não integrabilidade exibe características de uma transição de fase contínua conforme discutido na mecânica estatística [2–4]. Veremos que o observável que define o parâmetro de ordem vai continuamente à zero ao mesmo tempo que sua susceptibilidade diverge.

Podemos notar que a Hamiltoniana H é independente do tempo [5], sendo portanto uma constante, ou seja, $H = E$. Essa propriedade permite eliminar I_2 de H escrevendo uma nova expressão como $H = H(I_1, \theta_1, \theta_2, E)$. O fluxo de soluções que é originalmente quadridimensional pode ser reduzido a um fluxo tridimensional devido à

preservação de energia. Quando esse fluxo de soluções é interceptado por um plano - que é definido como uma superfície de seção ou seção de Poincaré - com θ_2 constante, permite que a dinâmica possa ser descrita por um mapeamento bidimensional e que preserve a área no espaço de fases. A Figura 1 mostra a interseção do fluxo de soluções por um plano.

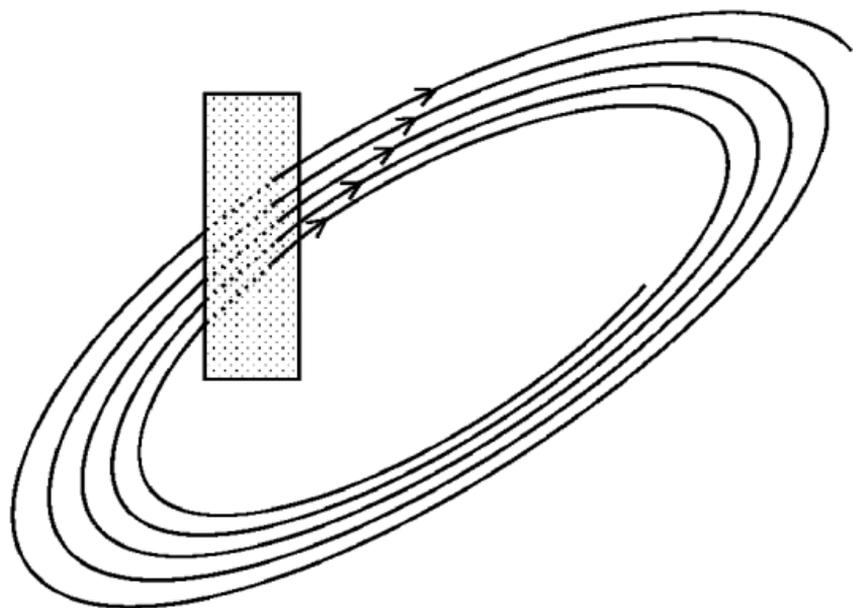


Fig. 1. Ilustração de uma seção de Poincaré.

A forma do mapeamento é dada por:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + K(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \end{cases} \text{mod}(2\pi) \quad , \quad (1)$$

onde $K(I_{n+1})$, $p(\theta_n, I_{n+1})$ e $h(\theta_n, I_{n+1})$ são funções não lineares (ver Ref. [6] para diferentes aplicações). O índice n corresponde à iteração do mapeamento, ou seja, identifica o tempo de cruzamento do fluxo de soluções na seção de Poincaré. A preservação da área no espaço de fases ocorre quando a condição $\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0$ é satisfeita. Essa condição é oriunda da imposição de $\det J = 1$, onde J é a matriz Jacobiana do sistema.

Neste trabalho, consideraremos a seguinte forma matemática para o mapa discreto:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \left[\theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \right] \text{mod}(2\pi) \quad , \end{cases}$$

(2) onde $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(\theta_n)$, $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ e $K = 1/|I_{n+1}|^\gamma$, com $\gamma > 0$, fornecendo a rapidez com que ocorre a divergência da variável θ no limite da ação I suficientemente pequena. A razão desta escolha é devida à difusão caótica. Quando a ação I é pequena, a variável θ_n não tem correlação com θ_{n+1} , o que acaba conduzindo à difusão de órbitas caóticas. Com a difusão, ocorre o crescimento da variável I . Assim que I cresce, as variáveis angulares apresentam correlação. Consequentemente, regularidade aparece no espaço de fases o que leva à existência de ilhas periódicas e curvas invariantes desempenham uma limitação importante para o processo de difusão. Como o determinante da matriz Jacobiana é igual a um, as órbitas caóticas não conseguem cruzar as curvas invariantes ficando, portanto, confinadas a uma região finita do espaço de fases e apresentando propriedades de escala interessantes. Dessa forma, o objetivo principal deste trabalho é discutir a transição

de integrabilidade para não integrabilidade focando na discussão de quatro itens principais: (1) Identificar a quebra de simetria do sistema; (2) Definir o parâmetro de ordem e sua susceptibilidade; (3) Discutir qual seria a excitação elementar e; (4) Discutir os defeitos topológicos presentes no espaço de fases que impactam no transporte de partículas.

É importante observar que o parâmetro ϵ controla uma parte interessante da dinâmica. Para o caso em que $\epsilon = 0$, o sistema é integrável já que tanto a energia E quanto a ação I são constantes. A fase integrável é marcada por um espaço de fases foliado com valores constantes para a ação I . A dinâmica do sistema para $\epsilon = 0$ é elementar e completamente previsível. Isso implica que não existe afastamento exponencial de condições iniciais próximas no espaço de fases, logo, ausência de caos. O regime integrável define, portanto, uma fase regular. Por outro

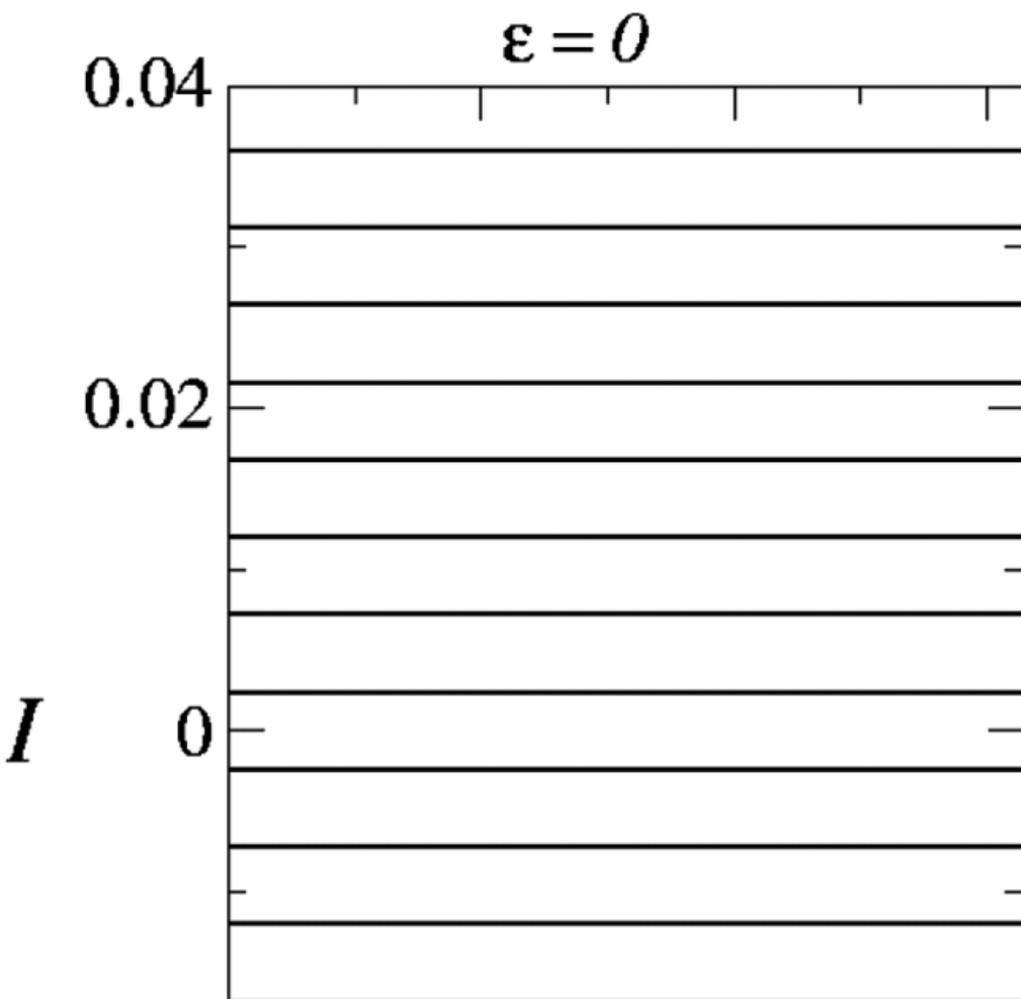
lado, quando $\epsilon \neq 0$, o espaço de fase não é mais foliado assumindo uma forma mista. Nesta nova configuração, o espaço de fases apresenta dinâmica mais complicada e, dependendo tanto das condições iniciais e do parâmetro de controle, um mar caótico limitado por curvas invariantes e ilhas periódicas são observadas. Devido à preservação da área e à aplicação do teorema de Liouville [5], as ilhas de estabilidade não podem ser invadidas por partículas se difundindo ao longo do mar de caos e, ao mesmo tempo, não permite que as partículas movendo-se no interior das ilhas possam escapar delas. Portanto, eles podem ser comparados como equivalentes de defeitos topológicos [7] violando a condição de ergodicidade para o espaço de fases. As curvas invariantes também possuem regras cruciais para a dinâmica. Na verdade, uma vez que bloqueiam a passagem de partículas de baixo para cima e vice-versa, definem o tamanho do mar caótico. A Figura 2 mostra um gráfico

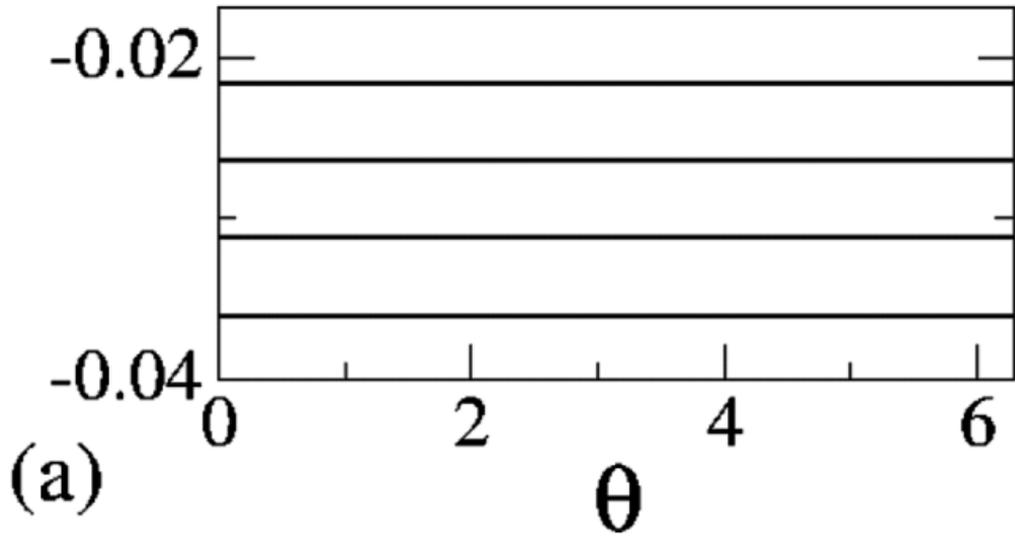
do espaço de fases para o mapeamento (2) considerando dois parâmetros de controle: (a) $\epsilon = 0$ e (b) $\epsilon = 10^{-3}$. Na Figura 2 (b), as curvas em vermelho representam as primeiras curvas invariantes que limitam o mar caótico e são denotadas por *fisc* de *first invariant spanning curve*, ou seja, primeira curva invariante *spanning*.

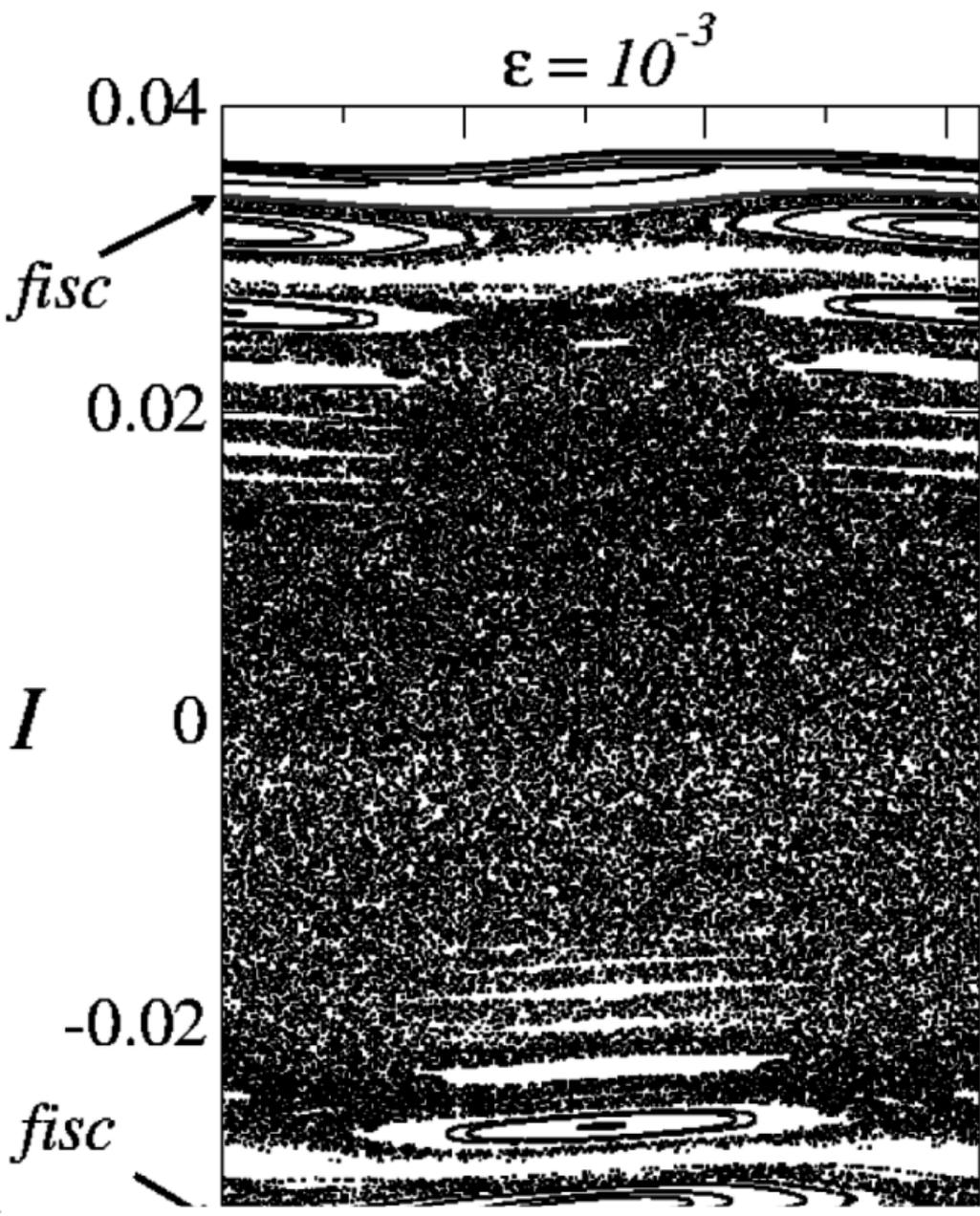
Com a discussão anterior, podemos agora pensar qual pode ter sido a simetria destruída. Notamos que para $\epsilon = 0$, o espaço de fases é foliado, portanto assumindo uma forma completamente regular e simétrica. Cada curva mostrada na Figura 2(a) depende apenas da ação inicial, que é preservada ao longo da dinâmica. Como a dinâmica preserva a ação, as condições iniciais não se afastam exponencialmente uma da outra com o passar do tempo. Observamos uma regularidade dinâmica no espaço de fases caracterizando, então, uma

fase simétrica e regular para a dinâmica.

Por







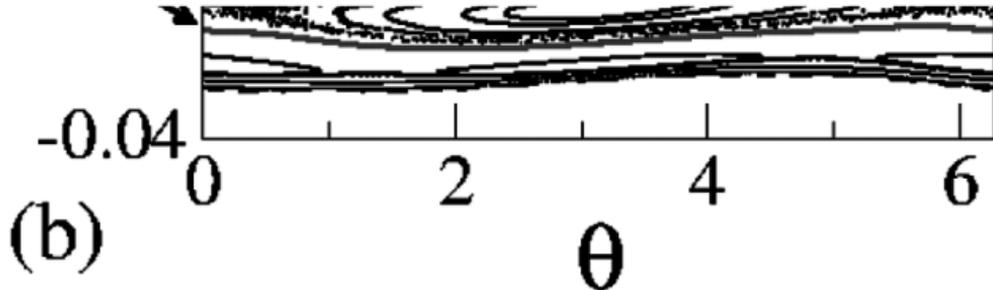


Fig. 2. Gráfico do espaço de fases para o mapeamento (2) para: (a) $\epsilon = 0$ e (b) $\epsilon = 10^{-3}$. As curvas *fisc* mostradas em (b) correspondem às primeiras curvas invariantes e são proporcionais a $\epsilon^{1/(1+\gamma)}$.

outro lado, quando $\epsilon \neq 0$, a função não linear $\sin(\theta)$ afeta a evolução temporal das partículas, afetando diretamente a dinâmica e destruindo a regularidade presente no espaço de fases. Pode-se notar que o espaço de fases apresenta uma forma mista e contém dinâmicas periódicas, marcadas pela existência de diferentes pontos fixos periódicos centralizados nas ilhas periódicas e também a presença de curvas invariantes onde as primeiras delas, tanto do lado positivo quanto negativo, são identificadas na Figura 2(b), além da presença de mar de

caos. Duas condições iniciais ao longo do mar de caos divergem exponencialmente uma da outra com o decorrer do tempo, conforme exigido para caracterizar uma dinâmica caótica. Como discutido em Ref. [6], percebe-se que o mar de caos presente no espaço de fases nasce com tamanho bem definido no eixo das ações. De fato, uma condição inicial fornecida no mar de caos pode se difundir pelo espaço de fases na faixa $I \in \left(- \left[\frac{\gamma\epsilon}{0.9716\dots} \right]^{1/(1+\gamma)}, \left[\frac{\gamma\epsilon}{0.9716\dots} \right]^{1/(1+\gamma)} \right)$. Os dois limites, positivo e negativo, são dados pelas curvas invariantes que funcionam como barreiras impedindo que as partículas as atravessem, limitando assim o tamanho do mar caótico. A destruição da regularidade marca a quebra de simetria para $\epsilon \neq 0$ e define o tamanho do mar de caos. Portanto, a simetria quebrada vai da regularidade para a dinâmica caótica e, conseqüentemente, para a difusão caótica.

Concentraremos agora nas discussões

referentes ao parâmetro de ordem [2]. Como discutimos no parágrafo anterior, a dinâmica é regular para $\epsilon = 0$ e dependendo das condições iniciais, caos pode ser observado para $\epsilon \neq 0$ e a difusão caótica está presente na dinâmica. Devido à existência de duas curvas invariantes (positiva e negativa), a difusão caótica é limitada. Considerando a simetria do espaço de fase, a ação média não é uma boa variável para o estudo da difusão. Por outro lado, uma boa variável seria a raiz quadrada da ação quadrática média. O comportamento desse observável para tempo suficientemente longo fornece a saturação da difusão caótica e é escrito como $I_{sat} \propto \epsilon^\alpha$. Esta variável é uma boa candidata como parâmetro de ordem. No que se refere às condições para se observar uma transição de fase contínua, o parâmetro de ordem se aproxima continuamente de zero na transição, ou seja, quando $\epsilon \rightarrow 0$, marcando assim uma fase ordenada, comparada com àquela quando

$\epsilon \neq 0$, que fornece uma fase caótica.

Uma rápida comparação com uma transição de fase em um sistema ferromagnético pode ser feita [2]. Em um sistema composto por spins que podem interagir entre si e alinhar-se com um campo externo, a magnetização espontânea m é o parâmetro de ordem em tal sistema. Para campo externo nulo, apenas as interações locais definem a magnetização do sistema, que também depende da temperatura externa T . Para uma temperatura T abaixo da crítica T_c , observa-se magnetização não nula. Porém, assim que a temperatura ultrapassa T_c , a fase ordenada marcada por spins alinhados entre si é destruída e magnetização nula é observada. Assim que $T \rightarrow T_c$ pela esquerda, a magnetização vai suave e continuamente até zero. A resposta do parâmetro de ordem frente à variação do campo externo dá a susceptibilidade magnética χ , que diverge nesse limite. Essas duas constatações são

elementos de uma transição de fase contínua.

De volta ao modelo caótico, assim que o parâmetro de controle ϵ é diferente de zero, ocorre o nascimento do mar de caos com tamanho limitado, conforme discutido na Ref. [6]. A Figura 3 mostra o expoente de Lyapunov positivo [8] para uma extensa faixa de variação do parâmetro de controle $\epsilon \in [10^{-6}, 10^{-2}]$.

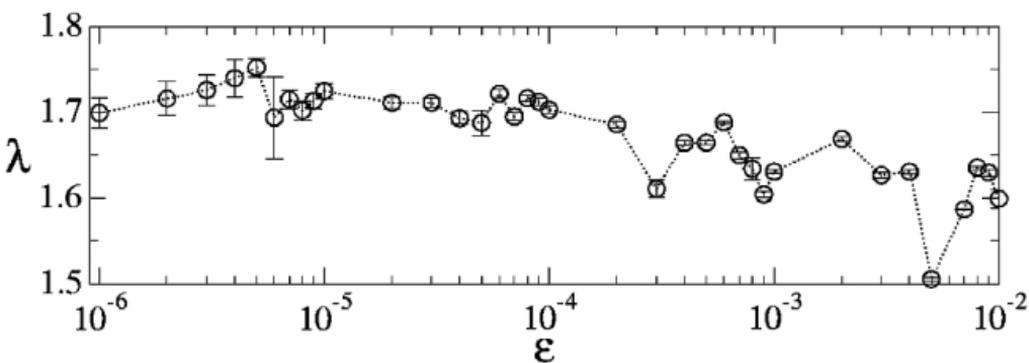


Fig. 3. Gráfico do expoente de Lyapunov positivo para uma extensa faixa de parâmetros de controle $\epsilon \in [10^{-6}, 10^{-2}]$.

Notamos que o expoente de Lyapunov positivo λ varia bem pouco, normalmente ao longo do intervalo $\lambda \in [1.5, 1.75]$ em comparação com a extensa faixa de variação

do parâmetro de controle $\epsilon \in [10^{-6}, 10^{-2}]$. Isso nos permite supor que o mar de caos nasce com uma amplitude ϵ e que a dinâmica caótica tem um expoente de Lyapunov positivo finito. Este valor aproximadamente constante está associado ao fato de que o mar caótico é invariante em escala em relação ao parâmetro de controle ϵ .

Discutiremos, agora, um observável usual para descrever difusão que é a raiz quadrada da ação quadrada média, definida como:

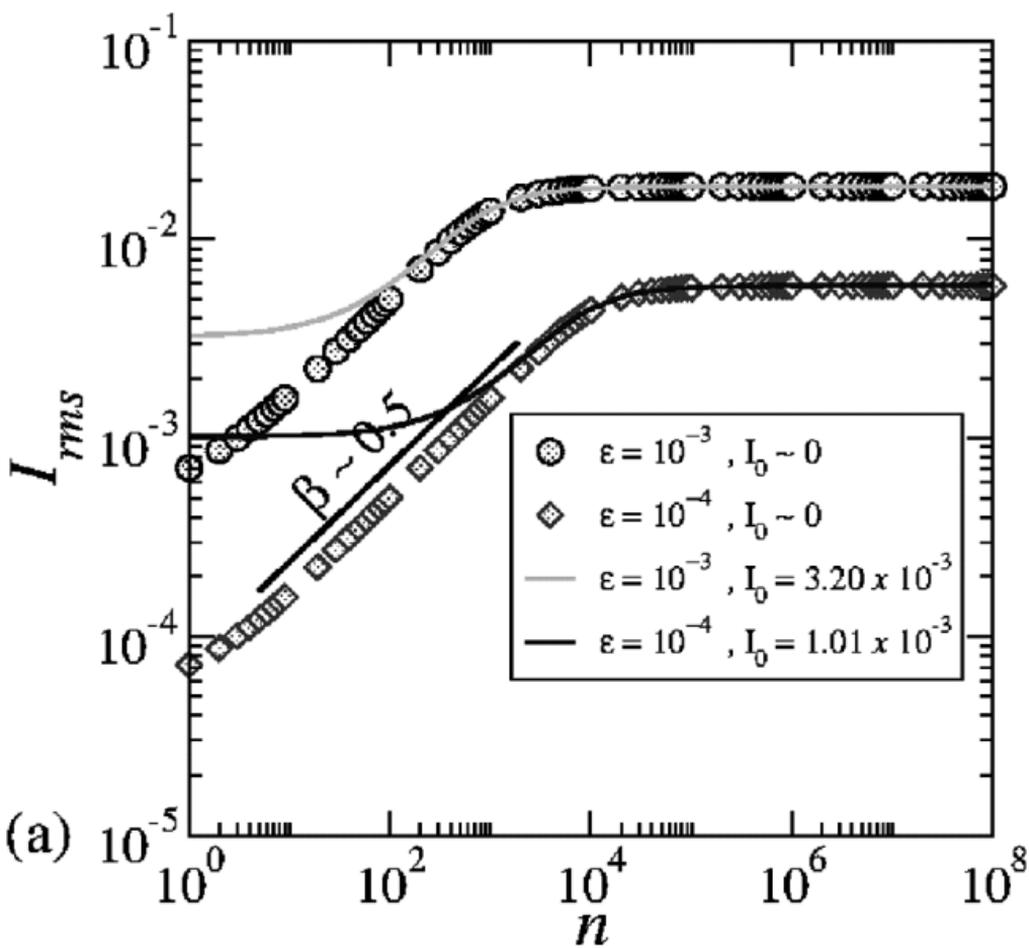
$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{i,j}^2}. \quad (3)$$

Aqui M corresponde a um conjunto de diferentes condições iniciais e n identifica o tempo discreto (número de iterações). Seguindo o procedimento apresentado na Ref. [9], o comportamento de I_{rms} pode ser feito da seguinte forma, conforme mostrado na Figura 4(a). Para uma ação inicial $I_0 \cong 0$,

as curvas se comportam como $I_{rms} \propto (n\epsilon^2)^\beta$, com o expoente $\beta \cong 1/2$. Esse valor numérico faz com que a difusão de partículas seja equivalente à difusão normal. O termo não linear $\sin(\theta_n)$ define a excitação elementar da dinâmica. Para a dinâmica caótica e assumindo independência estatística das variáveis dinâmicas θ e I e considerando pequenos valores de I , a primeira equação de mapeamento (2) leva a uma dinâmica de caminhada aleatória equivalente com passo médio de tamanho $\epsilon/\sqrt{2}$, que passa, então, a ser a excitação elementar do sistema. Tomando o quadrado da primeira equação de mapeamento (2), fazendo uma média sobre um conjunto de diferentes fases iniciais $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ e assumindo independência estatística entre I e θ , obtemos $\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + \frac{\epsilon^2}{2}$. Esta equação também nos permite obter o coeficiente de difusão como $D = \frac{\epsilon^2}{4}$. Uma transformação da equação de diferenças em uma equação diferencial leva ao seguinte

resultado $\overline{I^2}(n) = \overline{I_0^2} + n\frac{\epsilon^2}{2}$, confirmando assim analiticamente o termo ϵ^2 .

Por um tempo suficientemente grande e considerando a existência de curvas invariantes, a saturação é dada por $I_{rms,sat} \propto \epsilon^\alpha$, com $\alpha = \frac{1}{1+\gamma}$. O regime que marca a mudança do crescimento para a saturação é dado por $n_x \propto \epsilon^z$, com $z = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}$. As curvas se sobrepõem muito bem após a transformação de escala, como mostrado na Figura 4(b).



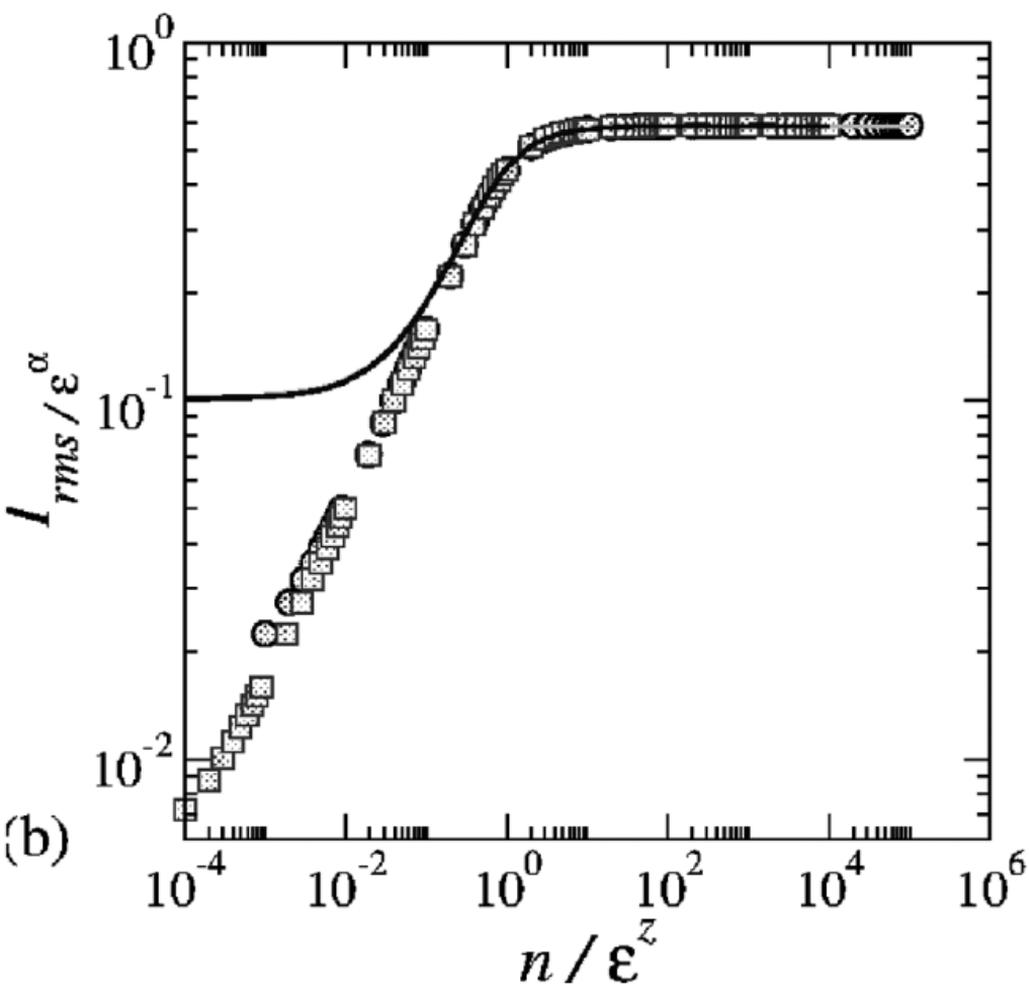


Fig. 4. (a) Gráfico de diferentes curvas de I_{rms} vs. n . Os parâmetros de controle e condições iniciais estão mostrados na figura. (b) Sobreposição do curvas mostradas em (a) em um gráfico único e universal.

A sobreposição das curvas mostradas na Figura 4(b) confirma uma invariância de escala para a dinâmica caótica perto de uma transição da integrabilidade para não integrabilidade do mapeamento (2). Notamos também uma escala presente nas curvas mesmo que a ação inicial não seja pequena o suficiente, como é o caso das curvas contínuas. Estes últimos foram obtidos pela solução analítica da equação de difusão sob condições de contorno específicas[10].

Notamos que no limite de $\epsilon \rightarrow 0$, o parâmetro de ordem $I_{sat} \propto \epsilon^\alpha$ tende a zero continuamente. A teoria da transição de fase de segunda ordem [11, 12] diz que a susceptibilidade, ou seja, a resposta da variação do parâmetro de ordem em relação à variação do parâmetro de controle ϵ , deve divergir no limite acima. A susceptibilidade é calculada como:

$$\chi = \frac{\partial I_{sat}}{\partial \epsilon} = \left[\frac{1}{1 + \gamma} \right] \frac{1}{\epsilon^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}.$$

Como γ é um número não negativo, no limite de $\epsilon \rightarrow 0$, temos que $\chi \rightarrow \infty$. Esta é uma assinatura clara de uma transição de fase de segunda ordem.

Vamos agora abordar a questão dos defeitos topológicos. Essa terminologia é importada da mecânica estatística e conduz à quebra da ergodicidade na dinâmica. Se a dinâmica do sistema for completamente caótica com ausência de qualquer ponto periódico, teríamos que a média ao longo do conjunto microcanônico seria igual à média temporal, o que implicaria que o sistema seria ergódico. Este não é o caso, uma vez que existem ilhas de periodicidade no espaço de fase, que é, por sua vez, misto. As ilhas podem ser interpretadas como equivalentes a estruturas topológicas, logo são defeitos topológicos que destroem a ergodicidade do sistema. Quando a dinâmica passa suficientemente perto das ilhas, a densidade de

probabilidade é modificada afetando as propriedades estatísticas do sistema [10].

Antes de apresentarmos nossos comentários finais, vamos mencionar sucintamente dois exemplos de transições de fase de segunda ordem observadas em outros sistemas [11]. Conforme mencionado ao longo do texto, em um sistema ferromagnético, as variáveis que indicam a transição são $m(t) = m_0|t|^{-\tilde{\beta}}$, com $t = \frac{T-T_c}{T_c}$, e a susceptibilidade $\chi = \frac{dm}{dB} \propto |t|^{-\tilde{\gamma}}$ no limite do campo externo $B \rightarrow 0$. Em uma transição de gás líquido no ponto crítico, as variáveis que caracterizam a transição de fase são $(\rho_l - \rho_g) \propto |t|^{-\tilde{\beta}}$, com $\rho_{l,g}$ identificando as densidades do líquido e do gás, simultaneamente. A susceptibilidade correspondente nesta transição é a compressibilidade isotérmica definida como a resposta do parâmetro de ordem a um campo conjugado a ele, $\chi \propto \frac{\partial V}{\partial P}$ que diverge no limite em que $t \rightarrow 0$.

Em resumo, investigamos os elementos

básicos que podem ser usados para identificar e classificar uma transição de fase de segunda ordem em um sistema dinâmico. A escala presente na difusão caótica está ligada ao tamanho finito do domínio caótico levando a um conjunto de expoentes críticos usados para transformar as curvas de I_{rms} em uma curva universal. O parâmetro de ordem foi identificado como $I_{sat} \propto \epsilon^\alpha$ com $\alpha = \frac{1}{1+\gamma}$, onde ϵ é o parâmetro de controle e que $I_{sat} \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. A susceptibilidade $\chi = \frac{1}{1+\gamma} \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{1+\gamma}}}$ diverge no limite de $\epsilon \rightarrow 0$. Esses dois resultados são identificações claras de transições de fase contínuas. As excitações elementares são produzidas pela função não linear, fazendo com que a dinâmica no domínio de ações pequenas se comporte como uma partícula caminhando aleatoriamente. Finalmente, a existência das ilhas de periodicidade foi interpretada como os defeitos topológicos no espaço de fases modificando as propriedades de transporte de

partículas do sistema levando a dinâmicas lentas, chamadas de *stickiness*. Os resultados apresentados permitem-nos concluir que a transição de fase da integrabilidade para a não integrabilidade no mapeamento (2) é análoga a uma transição de fase de segunda ordem. Os resultados discutidos e o formalismo utilizado podem ser estendidos a muitos outros tipos diferentes de transições de fase em sistemas dinâmicos, incluindo uma transição de difusão caótica limitada para ilimitada [13] e também de aceleração de Fermi limitada para ilimitada [14, 15] em sistemas de bilhar dependentes do tempo [16].

Conflito de interesse

Nenhum potencial conflito de interesses foi relatado pelos autores.

Financiamento

E. D. L. agradece apoio do CNPq (301318/2019-0) e da FAPESP (2019/14038-6, 2021/09519-5).

ORCID

Edson D. Leonel 

<https://orcid.org/0000-0001-8224-3329> *Célia M.*

Kuwana 

<https://orcid.org/0000-0003-1708-3669>

Referências

1. A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, Regular and chaotic dynamics (Appl. Math. Sci.) 38, Springer Verlag, New York, (1992)
2. R. K. Patria, Statistical Mechanics, Elsevier (2008)
3. F. Reif, Fundamentals of statistical and thermal physics, New York: McGraw-Hill, (1965)
4. V. Balakrishnan, Elements of nonequilibrium statistical mechanics, Ane Books India, New Delhi (2008)
5. G. J. Sussman, J. Wisdom, and M. E. Mayer, Structure and Interpretation of Classical Mechanics, MIT Press, Cambridge (2001)
6. E. D. Leonel, J. A. de Oliveira, F. Saif, J. Phys. A, **44**, 302001 (2011)
7. S. A. Holgate, Understanding Solid State Physics, CRC Press, Boca Ratom, Florida-USA (2010).

8. J. P. Eckmann, D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.*, **57** 617 (1985).
9. E. D. Leonel, J. Penalva, R. M. N. Teixeira, R. N. Costa Filho, M. R. Silva, J. A. de Oliveira, *Phys. Lett. A*, **379**, 1808 (2015).
10. E. D. Leonel, C. M. Kuwana, *J. Stat. Phys.* **170**, 69 (2018)
11. J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge University Press, 1996.
12. L. P. Kadanoff, *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization*. World Scientific, Singapore, 1999.
13. R. Aguilar-Sanchez, E. D. Leonel, and J. A. Mendez-Bermudez. *Phys. Lett. A* **377**, 3216 (2013).
14. E. D. Leonel, L. A. Bunimovich, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 224101 (2010).
15. D. F. M. Oliveira, E. D. Leonel, *Phys. Lett. A* **374**, 3016 (2010).
16. F. Lenz, F. K. Diakonov, and P. Schmelcher, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 014103 (2008).