

Regulador Integral Linear Quadrático com Rejeição Distúrbios para Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos

Linear Quadratic Integral Regulator with Disturbance Rejection for Markovian Jump Linear Systems

Yago de Castro Souza ^a, Gildson Queiroz de Jesus ^{a,*}, Thiago Pereira das Chagas ^a

^aPrograma de Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, BA, Brasil

* Autor Correspondente: gqjesus@uesc.br

Resumo: Este artigo trata do problema de regulação integral linear quadrática com rejeição de distúrbios para uma classe de sistemas lineares discretos no tempo denominada sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos. Para a solução deste problema foi utilizada uma formulação baseada em estados aumentados e no método dos mínimos quadrados ponderado restrito. Foram realizadas simulações para demonstrar a eficácia da ação integral e da rejeição de distúrbios na robustez do regulador proposto.

Palavras-chave: Regulador; Controle Ótimo; Sistemas Markovianos; Discreto no Tempo; Distúrbios; Ação Integral.

Abstract: In this paper, the problem of linear quadratic regulation with integral action and external disturbances rejection is addressed for Markovian Jump Linear Systems. Problem solution is based on augmented state and the method of constrained weighted least squares. Numerical examples are presented to demonstrated to efficiency of the proposed regulator.

keywords: Regulator; Optimal Control; Markovian Systems; Discrete-time; Disturbance; Integral Action.

1 Introdução

Problemas em que ocorrem variações descontínuas abruptas, como falhas e flutuações do ambiente, tem sido modelados como Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos (SLSM), como pode ser visto em áreas como: robótica [1, 2], reabilitação robótica [3, 18], finanças [4], entre outros.

No campo do controle ótimo, a solução do Regulador Linear Quadrático (LQR, sigla em inglês) foi proposta em [5], tendo diversas outras proposições para estes sistemas ao longo do tempo [6–8]. A solução apresentada em [21] propôs uma abordagem recursiva baseada no método dos mínimos quadrados ponderado restrito, em que através de uma estrutura de blocos matriciais permitia encontrar o estado ótimo e a entrada de controle ótimo simultaneamente.

Sistemas reais estão suscetíveis a distúrbios, ou entradas não diretamente manipuláveis pelo controlador, que podem afetar a dinâmica do sistema com comportamentos indesejáveis [9]. As proposições citadas em [21] para o LQR para SLSM não consideram o distúrbio, podendo ter um pior desempenho ao se introduzir uma lei de controle diretamente associada ao valor do distúrbio.

O seguimento de um referência diferente dos pontos de operação ou de equilíbrio do sistema é outro problema de interesse a ser solucionado. Uma estratégia bastante adotada está em trabalhar com o erro entre uma referência desejada e a saída do sistema, observada em [10–12]. Em particular, uma estratégia adotada por [22] para sistemas determinísticos utiliza a ação integral sobre este erro através de uma formulação baseada em estados aumentados, conseguindo reduzir o erro em regime permanente e aumentando a robustez a distúrbio. Esta estratégia pode ser incorporada aos SLSM, garantindo também uma lei de controle diretamente relacionada aos distúrbios externos.

É possível também incorporar a esta formulação um parâmetro em que se estabelece uma relação entre a evolução das sucessivas referências, baseando-se em um caso particular de *preview control* visto em [13, 14], sendo possível obter relações específicas para cada modo do SLSM (podendo ter diferentes referências para diferentes modos). Em casos de desconhecer a seqüência exata para a referência, mas se conhecer seu comportamento (por exemplo, degraú com pequena variação ao longo do tempo), este parâmetro pode ser considerado como invariante no tempo ajustado para cada modo, atuando como uma sintonia para o controlador. A abordagem sujeita a saltos possibilita uma sintonia mais agressiva não possível no caso determinístico (como valores superiores a 1), uma vez que as soluções encontradas são computadas através do valor esperado, ponderado pela matriz de transição de probabilidades.

Sendo assim, este trabalho propõem um novo algoritmo de controle ótimo denominado: Regulador Integral Linear Quadrático com Rejeição de Distúrbios Externos (LQIED, sigla em inglês) para sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos. Simmulações computacionais foram realizadas com o intuito de testar a eficiência do algoritmo proposto.

Este artigo está organizado da seguinte forma: Na Seção 2 será apresentada a teoria proposta para obtenção do Regulador Integral Linear Quadrático com Rejeição de Distúrbios Externos para SLSM. Na Seção 3 serão apresentadas as simulações computacionais dos resultados utilizando diferentes configurações para a referência e conjunto de parâmetros em comparação ao resultado existente na literatura. Na Seção 4 será apresentada a conclusão e discussões finais.

2 Regulador Integral Linear Quadrático com Rejeição de Distúrbios Externos

Esta seção apresenta a formulação do problema de controle ótimo quadrático com ação integral e rejeição de distúrbios externos para SLSM.

Considere o SLSM em tempo discreto

$$x_{k+1} = F_{\theta_k,k}x_k + G_{\theta_k,k}u_k + E_{\theta_k,k}d_k, \quad (2.1)$$

$$y_k = H_{\theta_k,k}x_k, \quad (2.2)$$

$$e_{k+1} = e_k + t_s(r_k - y_k), \quad k = 0, \dots, N, \quad (2.3)$$

sendo $x_k \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ o vetor de entrada de controle, $d_k \in \mathbb{R}^q$ o vetor de distúrbio ou de entradas externas, $y_k \in \mathbb{R}^p$ o vetor de saídas, $r_k \in \mathbb{R}^p$ o vetor de referência, e $e_k \in \mathbb{R}^p$ o somatório do erro entre a saída y_k e a referência r_k , t_s é o período de amostragem (sendo este igual a 1 para sistemas discretos). As matrizes de parâmetros $F_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$G_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $E_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $H_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, e o vetor de referência r_k são conhecidos para todo k , com x_0 conhecido.

Para esta formulação é conhecido para cada instante $k = 0, \dots, N$ o parâmetro de salto $\theta_k \in \Theta = \{1, \dots, s\}$. A sequência $\{\theta_k\}_{k=0}^N$ é uma cadeia de Markov, com matriz de probabilidade de transição dos estados definida como $\mathbb{P} = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{s \times s}$ satisfazendo

$$Prob[\theta_{k+1} = j | \theta_k = i] = p_{ij}, \quad Prob[\theta_0 = i] = \pi_i, \quad (2.4)$$

$$\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad (2.5)$$

sendo π_i a probabilidade da distribuição inicial para $\theta_0 = i$. O vetor de distúrbio d_k é considerado uma entrada exógena, não podendo ser removido do sistema e com magnitude que não pode ser alterada, e sendo considerada limitada.

Uma estratégia considerada em [22] está em adotar a variação conhecida da referência, sendo um caso particular dos métodos vistos em [13, 14], como forma de se obter um melhor comportamento transitório para o controlador com ação integral. Para isso, introduz-se o parâmetro $L_{\theta_k,k} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, sendo

$$r_{k+1} = L_{\theta_k,k} r_k, \quad (2.6)$$

sendo r_k a referência desejada para o tempo k . Para casos onde não se conheça a sequência exata $\{r_k\}_0^N$, o parâmetro pode ser considerado como um parâmetro de sintonia invariante no tempo, de acordo com o conhecimento do comportamento da referência.

Manipulando algebricamente (2.1),(2.2),(2.3) e (2.6), pode-se reescrever o sistema na forma aumentada como

$$\mathcal{X}_{k+1} := \mathcal{F}_{\theta_k,k} \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k,k} u_k, \quad (2.7)$$

$$y_k := \mathcal{H}_{\theta_k,k} \mathcal{X}_k, \quad k = 0, \dots, N, \quad (2.8)$$

sendo

$$\mathcal{X}_k := \begin{bmatrix} x_k \\ e_k \\ r_k \\ d_k \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_{\theta_k,k} := \begin{bmatrix} F_{\theta_k,k} & 0 & 0 & E_{\theta_k,k} \\ -H_{\theta_k,k} t_s & I & I t_s & 0 \\ 0 & 0 & L_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{G}_{\theta_k,k} := \begin{bmatrix} G_{\theta_k,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_{\theta_k,k} := [H_{\theta_k,k} \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (2.10)$$

Define-se um termo quadrático auxiliar e o funcional custo quadrático

$$\mathfrak{L}_{\theta_k,k}(\mathcal{X}_k, u_k) := \begin{bmatrix} \mathcal{X}_k \\ u_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & R_{\theta_k,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{X}_k \\ u_k \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{J}(\theta, \mathcal{X}, u) := \sum_{k=0}^{N-1} \mathfrak{L}_{\theta_k,k} + \mathcal{X}_N^T \mathcal{P}_{\theta_N,N} \mathcal{X}_N, \quad (2.12)$$

sendo $\mathcal{Q}_{\theta_k,k} := \text{diag}(Q_{\theta_k,k}^x, Q_{\theta_k,k}^e, Q_{\theta_k,k}^r, Q_{\theta_k,k}^d)$ e $R_{\theta_k,k}$ são matrizes simétricas definidas positivas

de ponderação de estado e de entrada de controle, respectivamente. A matriz $\mathcal{P}_{\theta_k, k}$ é dada por:

$$\mathcal{P}_{\theta_k, k} = \begin{bmatrix} P_{\theta_k, k}^x & P_{\theta_k, k}^{xe} & P_{\theta_k, k}^{xr} & P_{\theta_k, k}^{xd} \\ P_{\theta_k, k}^{ex} & P_{\theta_k, k}^e & P_{\theta_k, k}^{er} & P_{\theta_k, k}^{ed} \\ P_{\theta_k, k}^{rx} & P_{\theta_k, k}^{re} & P_{\theta_k, k}^r & P_{\theta_k, k}^{rd} \\ P_{\theta_k, k}^{dx} & P_{\theta_k, k}^{de} & P_{\theta_k, k}^{dr} & P_{\theta_k, k}^d \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Essa estrutura aumentada permite utilizar a solução clássica do LQR para SLSM dada por [21], através do seguinte problema de minimização

$$\min_{\mathcal{X}_{k+1}, u_k} \mathbb{E}\{\mathcal{J}(\theta, \mathcal{X}, u) | O_0\} \quad (2.14)$$

$$s.a \quad \mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta_k, k} \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k, k} u_k, \quad (2.15)$$

A solução ótima pode ser obtida através da programação dinâmica e do princípio da otimalidade. Define-se uma função valor

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k, \theta_k = i) &:= \min_{\mathcal{X}_{k+1}, u_k} \mathbb{E}\{\mathcal{L}_{\theta_k}(\mathcal{X}_k, u_k) + \mathcal{V}_{k+1}(\mathcal{X}_{k+1}, \theta_{k+1} = j) | O_k\}, \\ s.a \quad \mathcal{X}_{k+1} &= \mathcal{F}_{\theta_k, k} \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k, k} u_k. \end{aligned} \quad (2.16)$$

sendo

$$O_k = \{\theta_k = i, \mathcal{X}_k\}, \quad \text{para todo } k = 0, \dots, N-1, \quad (2.17)$$

e

$$\mathcal{V}_N(\mathcal{X}_N, \theta_k = i) = \mathcal{X}_N^T \mathcal{P}_{i, N} \mathcal{X}_N. \quad (2.18)$$

De (2.18), pode-se escrever $\mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k, \theta_k = i)$ como

$$\mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k, \theta_k = i) = \mathcal{X}_k^T \mathcal{P}_{i, k} \mathcal{X}_k. \quad (2.19)$$

O valor esperado do termo quadrático auxiliar não depende de O_k , podendo rescrever como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k, \theta_k = i) &= \min_{\mathcal{X}_{k+1}, u_k} \{\mathcal{L}_{\theta_k}(\mathcal{X}_k, u_k) + \mathbb{E}[\mathcal{V}_{k+1}(\mathcal{X}_{k+1}, \theta_{k+1}) | O_k]\}, \\ s.a \quad \mathcal{X}_{k+1} &= \mathcal{F}_{\theta_k, k} \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k, k} u_k. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Manipulando os estados aumentados da formulação proposta, pelo princípio da otimalidade, para $k+1$, podemos fazer

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k(\mathcal{X}_k, \theta_k = i) &= \min_{\mathcal{X}_{k+1}, u_k} \{\mathcal{L}_{\theta_k}(\mathcal{X}_k, u_k) + \mathcal{X}_{k+1}^T \mathbb{E}[\mathcal{P}_{\theta_{k+1}, k+1} | O_k] \mathcal{X}_{k+1}\}, \\ s.a \quad \mathcal{X}_{k+1} &= \mathcal{F}_{\theta_k, k} \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k, k} u_k. \end{aligned} \quad (2.21)$$

O valor esperado da $\mathcal{P}_{\theta_{k+1}, k+1}$ dado O_k reflete implicitamente em soluções de equações acopladas de Riccati, dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{P}_{\theta_{k+1}, k+1} | O_k] &= \mathbb{E}[\mathcal{P}_{\theta_{k+1}, k+1} | \theta_k = i] \\ &= \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_{j, k+1} \text{Prob}[\theta_{k+1} = j | \theta_k = i] = \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_{j, k+1} p_{ij} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{px} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{xe}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{xr}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{xd}} \\ \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{ex}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{ee}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{er}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{ed}} \\ \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{rx}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{re}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{rr}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{rd}} \\ \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{dx}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{de}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{dr}} & \sum_{j=1}^s P_{j,k+1}^{p_{j,k+1}^{dd}} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Pode-se definir um operador auxiliar das equações acopladas, para todo $i \in \Theta$ como

$$\Psi_{i,k+1} = \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_{j,k+1} p_{ij}. \quad (2.23)$$

Obtendo

$$\Psi_{\theta_k,k} = \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k,k}^x & \psi_{\theta_k,k}^{xe} & \psi_{\theta_k,k}^{xr} & \psi_{\theta_k,k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{ex} & \psi_{\theta_k,k}^e & \psi_{\theta_k,k}^{er} & \psi_{\theta_k,k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k,k}^{rx} & \psi_{\theta_k,k}^{re} & \psi_{\theta_k,k}^r & \psi_{\theta_k,k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{dx} & \psi_{\theta_k,k}^{de} & \psi_{\theta_k,k}^{dr} & \psi_{\theta_k,k}^d \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Assim pode se reescrever o problema como

$$\min_{x_{k+1}, u_k} \{ \mathcal{X}_{k+1}^T \Psi_{i,k+1} \mathcal{X}_{k+1} + u_k^T R_{i,k} u_k + \mathcal{X}_k^T \mathcal{Q}_{i,k} \mathcal{X}_k \}, \quad (2.25)$$

$$s.a \quad \mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{F}_{\theta_k,k} \mathcal{X}_k + \mathcal{G}_{\theta_k,k} u_k. \quad (2.26)$$

O funcional em (2.25) sujeito a (2.26) é semelhante ao utilizado na resolução do LQR clássico para SLSM através do método dos mínimos quadrados ponderado restrito em [21], cuja a solução é dada no seguinte Lema.

Lema 2.1. *A solução ótima $(\mathcal{X}_{k+1}^*, u_k^*)$ para o problema de minimização (2.25) sujeito a (2.26) é dada, para $k = 0, \dots, N - 1$ e $\theta_k \in \Theta$, por*

$$\mathcal{X}_{k+1}^* = \mathcal{L}_{\theta_k,k} \mathcal{X}_k^* \quad e \quad u_k^* = \mathcal{K}_{\theta_k,k} \mathcal{X}_k^* \quad (2.27)$$

sendo para cada $i \in \Theta$ e $k = N - 1, \dots, 0$

$$\mathcal{L}_{i,k} = (\mathcal{F}_{i,k} + \mathcal{G}_{i,k} \mathcal{K}_{i,k}) = (\mathcal{F}_{i,k} - \mathcal{G}_{i,k} (R_{i,k} + \mathcal{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \mathcal{G}_{i,k})^{-1} \mathcal{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \mathcal{F}_{i,k}) \quad (2.28)$$

$$\mathcal{K}_{i,k} = -(R_{i,k} + \mathcal{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \mathcal{G}_{i,k})^{-1} \mathcal{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \mathcal{F}_{i,k} \quad (2.29)$$

com

$$\mathcal{P}_{i,k} = \mathcal{F}_{i,k}^T \left(\Psi_{i,k+1} - \Psi_{i,k+1} \mathcal{G}_{i,k} (R_{i,k} + \mathcal{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \mathcal{G}_{i,k})^{-1} \mathcal{G}_{i,k}^T \Psi_{i,k+1} \right) \mathcal{F}_{i,k} + \mathcal{Q}_{i,k}. \quad (2.30)$$

No próximo Teorema será apresentado o LQIED para SLSM baseado no Lema 2.1.

Teorema 2.2. *A solução ótima (x_{k+1}^*, u_k^*) para o regulador integral linear quadrático com rejeição de distúrbios externos para SLSM usando as soluções ótimas (2.27)-(2.30) e as identificações apresentadas em (2.9) e (2.10) é dada por*

$$\begin{aligned} x_{k+1}^* &= (F_{i,k} - \Phi_{i,k} (\psi_{i,k+1}^x F_{i,k} - \psi_{i,k+1}^{xe} H_{i,k} t_s)) x_k - \Phi_{i,k} \psi_{i,k+1}^{xe} e_k \\ &\quad - \Phi_{i,k} (\psi_{i,k+1}^{xe} t_s + \psi_{i,k}^{xr} L_{i,k}) r_k + (E_{i,k} - \Phi_{i,k} \psi_{i,k+1}^x E_{i,k}) d_k, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$e_{k+1}^* = e_k + t_s (r_k - H_{i,k} x_k), \quad (2.32)$$

e

$$u_k^* = -(K_k^x x_k + K_k^e e_k + K_k^r r_k + K_k^d d_k), \quad (2.33)$$

com

$$K_{i,k}^x = -(R_{i,k} + G_{i,k}^T \psi_{i,k+1}^x G_{i,k})^{-1} G_{i,k}^T (\psi_{i,k}^x F_{i,k} - \psi_{i,k}^{xe} H_{i,k} t_s), \quad (2.34)$$

$$K_{i,k}^e = -(R_{i,k} + G_{i,k}^T \psi_{i,k+1}^x G_{i,k})^{-1} G_{i,k}^T \psi_{i,k}^{xe}, \quad (2.35)$$

$$K_{i,k}^r = -(R_{i,k} + G_{i,k}^T \psi_{i,k+1}^x G_{i,k})^{-1} G_{i,k}^T (\psi_{i,k}^{xe} t_s + \psi_{i,k}^{xr} L_{i,k}), \quad (2.36)$$

$$K_{i,k}^d = -(R_{i,k} + G_{i,k}^T \psi_{i,k+1}^x G_{i,k})^{-1} G_{i,k}^T \psi_{i,k}^x E_{i,k}, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} P_{i,k}^x &= (F_{i,k}^T (\psi_{i,k+1}^x - \psi_{i,k+1}^x \Phi_{i,k} \psi_{i,k+1}^x) - H_{i,k}^T (\psi_{i,k+1}^{ex} t_s - \psi_{i,k+1}^{ex} \Phi_{i,k} \psi_{i,k+1}^x t_s)) F_{i,k} \\ &\quad - (F_{i,k}^T (\psi_{i,k+1}^{xe} - \psi_{i,k+1}^x \Phi_{i,k} \psi_{i,k+1}^{xe} t_s) + H_{i,k}^T (\psi_{i,k+1}^e t_s^2 - \psi_{i,k+1}^{ex} \Phi_{i,k} \psi_{i,k+1}^{xe} t_s^2)) H_{i,k} + Q_{i,k}^x, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$P_{i,k}^e = (\psi_{i,k+1}^e - \psi_{i,k+1}^{ex} \Phi_{i,k} \psi_{i,k+1}^{xe}) + Q_{i,k}^e, \quad (2.39)$$

$$P_{i,k}^{ex} = (\psi_{i,k+1}^{ex} - \psi_{i,k+1}^{ex} \Phi_{i,k} \psi_{i,k+1}^x) F_{i,k} - (\psi_{i,k+1}^e - \psi_{i,k+1}^{ex} \Phi_{i,k} \psi_{i,k+1}^{xe}) H_{i,k} t_s, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} P_{i,k}^{xr} &= F_{i,k}^T (\psi_{i,k+1}^e t_s + \psi_{i,k+1}^{xr} L_{i,k} - \psi_{i,k+1}^x \Phi_{i,k} (\psi_{i,k+1}^{xe} t_s + \psi_{i,k+1}^{xr})) \\ &\quad + H_{i,k}^T (-\psi_{i,k+1}^e t_s - \psi_{i,k+1}^{er} L_{i,k} t_s + \psi_{i,k+1}^{ex} \Phi_{i,k} (\psi_{i,k+1}^{xe} t_s^2 + \psi_{i,k+1}^{xr} L_{i,k} t_s)), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$P_{i,k}^{er} = \psi_{i,k+1}^e + \psi_{i,k+1}^{er} L_{i,k} - \psi_{i,k+1}^{ex} \Phi_{i,k} (\psi_{i,k+1}^{xe} t_s + \psi_{i,k+1}^{xr} L_{i,k}), \quad (2.42)$$

$$P_{i,k}^{xe} = (P_{i,k}^{ex})^T, \quad (2.43)$$

com

$$\Phi_{i,k} = G_{i,k} (R_{i,k} + G_{i,k}^T \psi_{i,k+1}^x G_{i,k})^{-1} G_{i,k}^T. \quad (2.44)$$

Prova: Considere a matrizes aumentadas $\mathcal{P}_{\theta_k, k}$, definida em (2.13), $\mathcal{Q}_{\theta_k, k}$ e $R_{\theta_k, k}$ definidas previamente.

Para cada $i \in \Theta$ temos que o operador $\Psi_{i, k+1}$ dado por (2.23) e (2.24) é descrito por

$$\Psi_{i, k+1} = \sum_{j=1}^s \mathcal{P}_{j, k+1} p_{ij}. \quad (2.45)$$

Expandindo a formulação apresentada no Lema 2.1, que apresenta equivalência a solução clássica (ver [21]), obtemos:

$$\mathcal{X}_{k+1}^* = (\mathcal{F}_{i,k} - \mathcal{G}_{i,k} (R_{i,k} + \mathcal{G}_{i,k}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{G}_{i,k})^{-1} \mathcal{G}_{i,k}^T \Psi_{i, k+1} \mathcal{F}_{i,k}) \quad (2.46)$$

$$\mathcal{X}_{k+1}^* = \left(\begin{bmatrix} F_{\theta_k,k} & 0 & 0 & E_{\theta_k,k} \\ -H_{\theta_k,k}t_s & I & I * t_s & 0 \\ 0 & 0 & L_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left(R_{i,k} + \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \right. \right. \\ \left. \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k,k}^x & \psi_{\theta_k,k}^{xe} & \psi_{\theta_k,k}^{xr} & \psi_{\theta_k,k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{ex} & \psi_{\theta_k,k}^e & \psi_{\theta_k,k}^{er} & \psi_{\theta_k,k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k,k}^{rx} & \psi_{\theta_k,k}^{re} & \psi_{\theta_k,k}^r & \psi_{\theta_k,k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{dx} & \psi_{\theta_k,k}^{de} & \psi_{\theta_k,k}^{dr} & \psi_{\theta_k,k}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ \left. \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k,k}^x & \psi_{\theta_k,k}^{xe} & \psi_{\theta_k,k}^{xr} & \psi_{\theta_k,k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{ex} & \psi_{\theta_k,k}^e & \psi_{\theta_k,k}^{er} & \psi_{\theta_k,k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k,k}^{rx} & \psi_{\theta_k,k}^{re} & \psi_{\theta_k,k}^r & \psi_{\theta_k,k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{dx} & \psi_{\theta_k,k}^{de} & \psi_{\theta_k,k}^{dr} & \psi_{\theta_k,k}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\theta_k,k} & 0 & 0 & E_{\theta_k,k} \\ -H_{\theta_k,k}t_s & I & I * t_s & 0 \\ 0 & 0 & L_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right). \quad (2.47)$$

e

$$\mathcal{K}_{i,k} = \\ - \left(R_{i,k} + \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k,k}^x & \psi_{\theta_k,k}^{xe} & \psi_{\theta_k,k}^{xr} & \psi_{\theta_k,k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{ex} & \psi_{\theta_k,k}^e & \psi_{\theta_k,k}^{er} & \psi_{\theta_k,k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k,k}^{rx} & \psi_{\theta_k,k}^{re} & \psi_{\theta_k,k}^r & \psi_{\theta_k,k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{dx} & \psi_{\theta_k,k}^{de} & \psi_{\theta_k,k}^{dr} & \psi_{\theta_k,k}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \begin{bmatrix} G_{i,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \psi_{\theta_k,k}^x & \psi_{\theta_k,k}^{xe} & \psi_{\theta_k,k}^{xr} & \psi_{\theta_k,k}^{xd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{ex} & \psi_{\theta_k,k}^e & \psi_{\theta_k,k}^{er} & \psi_{\theta_k,k}^{ed} \\ \psi_{\theta_k,k}^{rx} & \psi_{\theta_k,k}^{re} & \psi_{\theta_k,k}^r & \psi_{\theta_k,k}^{rd} \\ \psi_{\theta_k,k}^{dx} & \psi_{\theta_k,k}^{de} & \psi_{\theta_k,k}^{dr} & \psi_{\theta_k,k}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\theta_k,k} & 0 & 0 & E_{\theta_k,k} \\ -H_{\theta_k,k}t_s & I & I * t_s & 0 \\ 0 & 0 & L_{\theta_k,k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Por manipulações algébricas dessas expressões, chega-se nos resultados apresentados em (2.31) a (2.37). Sendo

$$\mathcal{K}_{i,k} = \begin{bmatrix} K_{i,k}^x & K_{i,k}^e & K_{i,k}^r & K_{i,k}^d \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Analogamente, substituindo (2.9) e (2.10) em (2.30) chega-se as equações apresentadas em (2.38) a (2.42). Por a solução da equação de Riccati ser simétrica, e o somatório ser trazido para dentro da matriz aumentada, mantém-se a propriedade do operador $\Psi_{i,k+1} = \Psi_{i,k+1}^T$, e obtém (2.43) bem como outras identidades.

Remark 2.3. Em um sistema determinístico, ou seja, $s = 1$ e $\mathbb{P} = [p_{ij} = 1]$, as soluções encontradas no Teorema 2.2 equivalem ao controlador abordado em [22].

Remark 2.4. Se o funcional composto por (2.14), sujeito a (2.15), não possuir ação integral e não considerar a ação do distúrbio, i.e. considerar $L_{i,k} = 0$, $e_k = 0$ e $r_k = 0, \forall i, k = 0 \dots N$, utilizar a matriz de parâmetros de saída nula $H_{i,k} = 0, \forall i, k = 0 \dots N \in \Theta$, e considerar a matriz de distúrbios nula $E_{i,k} = 0, \forall i \in \Theta$, a solução encontrada neste Teorema 2.2 considerando essas premissas equivale ao caso abordado em [21].

3 Exemplo Numérico

Nesta seção, apresentamos três estudos de caso que usam a teoria apresentada na Seção (2). O primeiro observa o comportamento do LQIED para SLSM para uma referência não nula e posteriormente uma referência nula, mediante ao distúrbio externo d_k . O segundo consta de um comparativo entre os controladores para a rejeição do distúrbio externo d_k , tendo como referência nula para o LQIED para SLSM. O terceiro observa a influência do parâmetro $L_{i,k}$

no LQIED para SLSM.

Considere um sistema linear com $x \in \mathbb{R}^2$ e 3 modos lineares e invariante no tempo, dados por

$$F_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2,5 & 3,2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4,3 & 4,5 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5,3 & 6,2 \end{bmatrix}.$$

O exemplo utilizado apresenta todos os modos instáveis, isto $\tilde{A} \odot$, as matrizes de estado possuem pelo menos um autovalor com magnitude maior que 1, o que apresenta uma maior complexidade do sistema.

A matriz de parâmetros de saída foi considerada a mesma para todos os modos, bem como a matriz de parâmetros das entradas e dos distúrbios externos, sendo

$$H_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_i = \begin{bmatrix} 1,0206 \\ 2,5094 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Esse sistema possui matriz de transição de probabilidade dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,17 & 0,16 \\ 0,3 & 0,47 & 0,23 \\ 0,26 & 0,1 & 0,64 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

As matrizes de ponderação para o estado e para o controle são dadas por

$$Q_1^x = \begin{bmatrix} 3,60 & -3,80 \\ -3,80 & 4,87 \end{bmatrix}, Q_2^x = \begin{bmatrix} 3,38 & -2,54 \\ -2,54 & 2,70 \end{bmatrix}, Q_3^x = \begin{bmatrix} 5 & -4,5 \\ -4,5 & 4,5 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = 2,6; R_2 = 1,16; R_3 = 1,111.$$

As matrizes de ponderação para a referência e distúrbio não influenciam no cálculo na formulação proposta, sendo assumidas como matrizes identidades de tamanho compatível apenas para garantia de trabalhar com $Q_{i,k}$ simétrica e positiva definida. A matriz de ponderação para o erro foi considerada dez vezes a matriz identidade de tamanho compatível.

É assumido um distúrbio $d_k = 0,99^k$ [9] amplificado pela matriz de distúrbios E_i ($i = 1, 2, 3$). As simulações foram realizadas via software MATLAB.

3.1 Ação Integral com Rejeição de Distúrbio Externo

Para o sistema assumido condições iniciais nulas com referência degrau para a saída y_k . Para $k = 0, \dots, 100$, foi assumido $r_k = 4$, de forma a observar o comportamento de rejeição de distúrbios externos e ação integral frente a uma entrada de referência degrau não nula. Para $k = 101, \dots, N$, $r_k = 0$, de forma a observar a ação integral ao alternar para uma referência nula.

Para o LQIED para SLSM são utilizados ganhos constantes para cada modo, visto que as matrizes do sistema são invariantes no tempo e, utilizando o Teorema 2.2 com N tendendo a um valor elevado, estes tendem a convergir para os valores mostrados a seguir:

$$\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} -1,258 & -4,950 & 0,181 & 0,181 & -4,302 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} 0,475 & -6,91 & 0,187 & 0,187 & -4,346 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } \mathcal{K}_3 = \begin{bmatrix} -9,164 & -8,021 & 0,192 & 0,192 & -4,384 \end{bmatrix}.$$

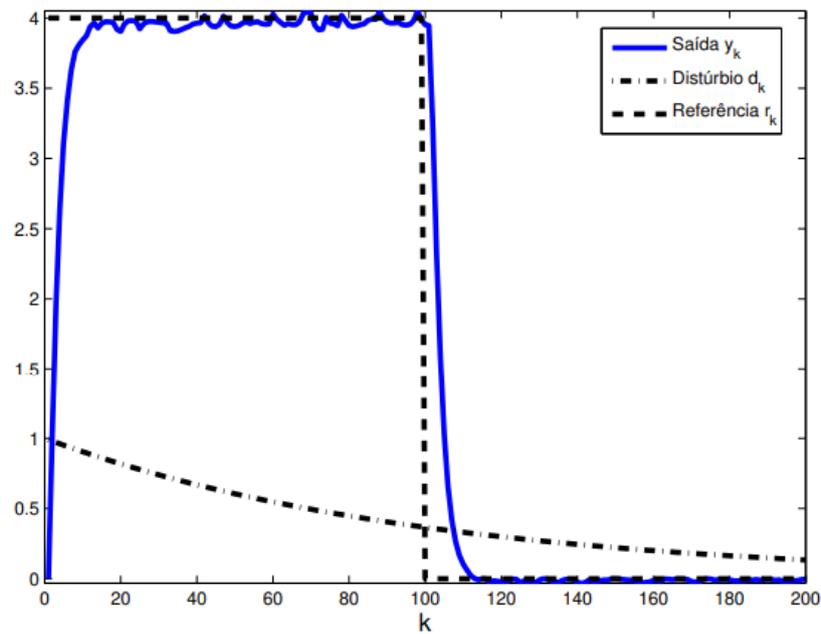


Figura 1. Saída y_k sujeita a distúrbios e referência degrau

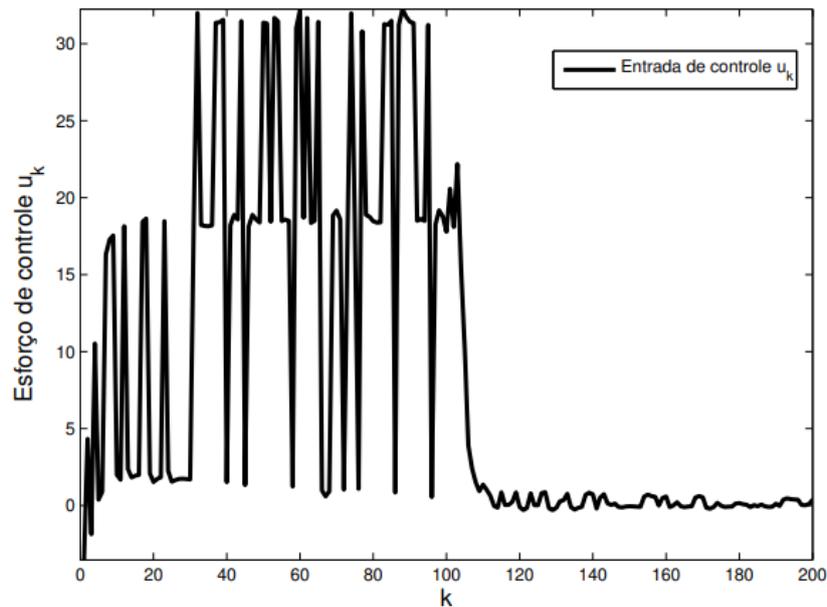


Figura 2. Ação de controle

A Figura 1 contém a saída do sistema ao longo da iteração k , com o distúrbio exponencial e a referência degrau variando de 0 a 4 e de 4 a 0, no primeiro e segundo momento respectivamente. A saída do sistema alcança a referência rapidamente, sendo necessário apenas 10 iterações para que o valor alcance a referência com erro menor que 5%. A rejeição do distúrbio é verificada pelo seguimento da referência de valor 4 mesmo na presença do distúrbio, sendo o erro máximo após 18 iterações não maior que 2,5% .

Após a 101ª iteração, a referência para a saída é posta como nula, e observa-se o rápido decaimento para o valor desejado, com erro absoluto (módulo da diferença entre a saída e a

referência) menor que 0,035 após 12 iterações, mantendo-se dentro desse erro no restante da execução. Este erro absoluto corresponde a menos de 1% da variação ocorrida na referência (de 4 a 0). O distúrbio também é rejeitado para operação como regulador ($r_k = 0$), embora seu efeito tenha menor amplitude devido ao decaimento exponencial.

Não se pode garantir erro nulo devido a ação integral para referência degrau nessa formulação, em função dos distúrbios e das descontinuidades. Entretanto, a trajetória permanece na vizinhança da referência. Também, o controlador proposto minimiza a contribuição do distúrbio devido a lei de controle considerá-lo.

A Figura 2 contém o esforço de controle u_k . As variações abruptas são ocasionadas pelo parâmetro de salto θ_k , onde cada modo possui ganhos diferentes. Quando a referência é igualada a 0, o esforço de controle se torna consideravelmente baixo, tendo seu pico 30 vezes menor que o pico da referência não nula (e média menor em mesma magnitude). Esse fato é entendido uma vez que as parcelas $K_{i,k}^r$ e $K_{i,k}^e$ se anulam ou tendem a zero. A contribuição do distúrbio e do estado contribuem para o valor.

3.2 Efeito da rejeição de distúrbio externo

Para comparativo apenas da rejeição de distúrbios externos, foram realizados testes com os controladores propostos LQIED para SLSM e LQRED para SLSM. Essa comparação permite a visualização da contribuição da ação integral com intuito apenas de rejeição de distúrbios externos. Utilizou-se o regulador recursivo para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos da literatura para comparativo [21].

A primeira métrica de comparação utilizada foi a norma euclidiana das variáveis do estado, definida por

$$\|x_k\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_k^j|^2}. \quad (3.3)$$

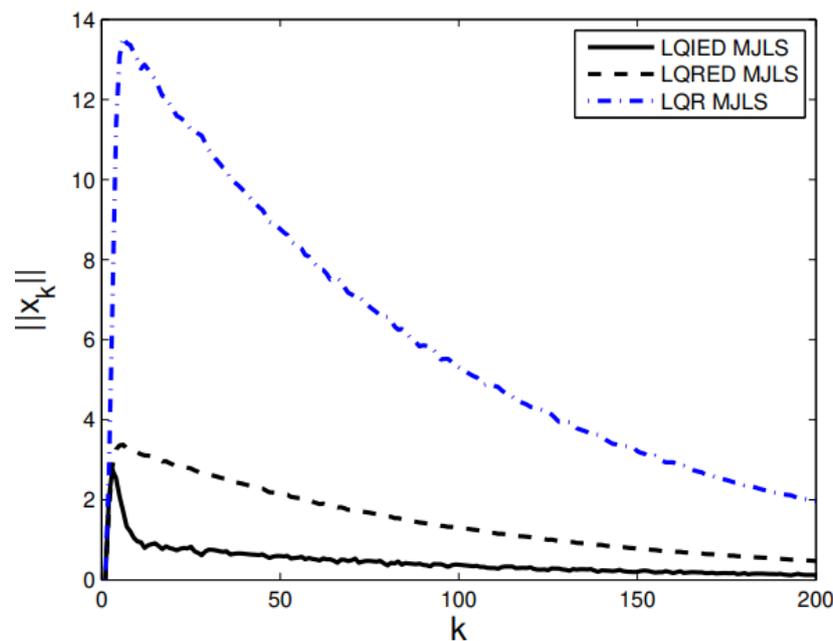


Figura 3. Norma do estado para os dois controladores sujeitos a distúrbio

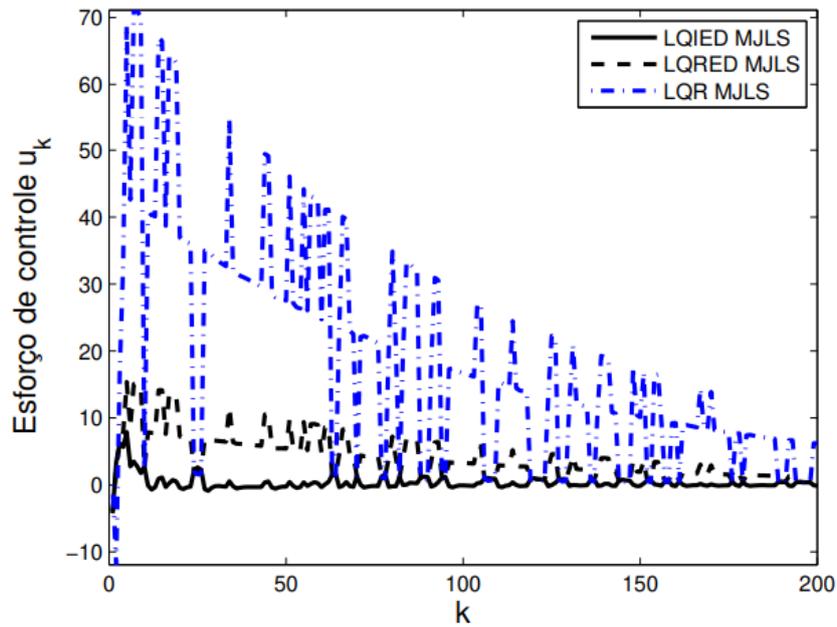


Figura 4. Comparativo da ação de controle

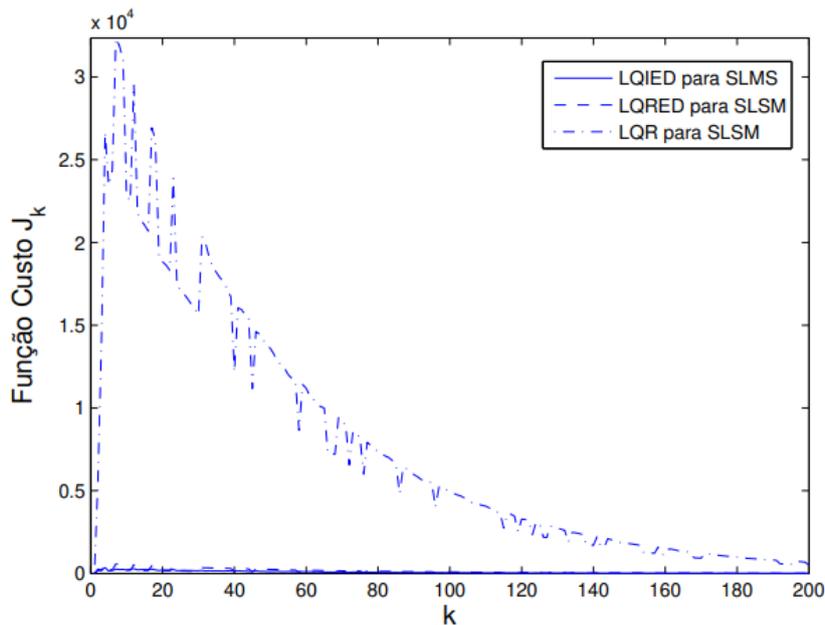


Figura 5. Evolução da função custo

A Figura 3 apresenta o comportamento de rejeição de distúrbios externos para o controlador LQIED para SLMS, para o LQRED para SLMS, e LQR para SLMS. Ambas abordagens deste trabalho apresentaram norma menor que o regulador que não leva em consideração distúrbio na formulação.

O controlador proposto com ação integral apresenta um desempenho melhor, apresentando após um pico inicial valores entre 3 a 4 vezes menores que o controlador sem ação integral, tendo seus valores finais $\|x_k\| = 0,130$ e $\|x_k\| = 0,478$, com $k = 200$, respectivamente. Pode-se atribuir esse melhor comportamento a um ganho com ajuste mais fino, com mais duas

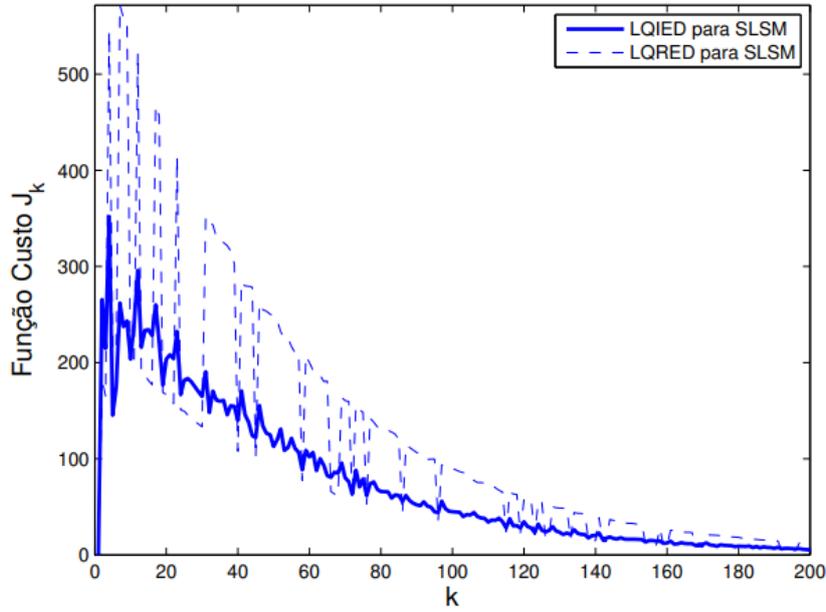


Figura 6. Evolução da função custo para controladores propostos

parcelas dependente do erro ($K_{i,k}^e$) e da referência ($K_{i,k}^d$), além da parcela de ganho $K_{i,k}^d$ e $K_{i,k}^x$.

Mesmo com uma contribuição destas parcelas extras, o controlador apresenta um esforço de controle notavelmente menor que a abordagem sem ação integral e convencional, visto na Figura 4. A abordagem convencional teve picos demasiadamente elevados (6 vezes maiores que os picos dos controladores propostos) e com valores elevados ao longo de toda trajetória.

O controlador com ação integral após pico inicial de 12.29, teve seus valores baixos ao longo do tempo, não ultrapassando 2.73 após $k = 10$.

A Figura 5 e a Figura 6 contêm a terceira métrica de comparação, a evolução da função custo para os controladores LQIED para SLSM, LQRED para SLSM e clássico LQR para SLSM. Como forma de manter apropriado o comparativo, foi utilizado a função custo quadrática comum ao LQR para SLSM para todos os controladores observados, sendo descrita como

$$J(\theta, x, u) = x_N^T P_{\theta_N, N} x_N + \sum_{k=0}^{N-1} x_k^T Q_{\theta_k, k} x_k + u_k^T R_{\theta_k, k} u_k \quad (3.4)$$

e evolução da função custo dada por

$$J_k(\theta, x, u) = x_k^T P_{\theta_k, k} x_k. \quad (3.5)$$

O custo para o regulador clássico foi superior aos controladores propostos, devido a ser em média 28 vezes maior que o segundo maior custo, como observado na Figura 6. O mesmo foi omitido na Figura 5 para melhor comparativo entre os desenvolvidos no trabalho. Os valores finais para o custo, em $k = 200$ foram $J_k = 337, 285$ (LQR para SLSM), $J_k = 12, 094$ (LQRED para SLSM) e $J_k = 6, 303$ (LQIED para SLSM). Além da evolução da função custo predominantemente menor do controlador com ação integral e rejeição a distúrbios externos, observa-se também um comportamento mais suave da evolução em contraste com variações ocorridas no controlador apenas com rejeição a distúrbios externos. Isto é consequência de um esforço de controle menor e mais suave quando a referência é 0, impactando na parcela

$u_k^T R_{i,k} u_k$ do funcional.

3.3 Sintonia do parâmetro de referência do controlador

O efeito do parâmetro de sintonia $L_{i,k}$ será investigado utilizando o exemplo anterior mostrado em 3.1. Novamente serão utilizado condições iniciais nulas, considerando uma referência degrau até metade da simulação, e uma referência nula até o término da mesma.

Para a comparação da melhoria da introdução do parâmetro será considerado o funcional aumentado dado por

$$\mathcal{J}(\theta, \mathcal{X}, u) := \mathcal{X}_N^T \mathcal{P}_{\theta_N, N} \mathcal{X}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathcal{X}_k^T \mathcal{Q}_{\theta_k, k} \mathcal{X}_k + u_k^T R_{\theta_k, k} u_k),$$

e a raiz do erro médio quadrático (*RMSE*) entre a referência r_k e a saída y_k , dado por

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^N (r_k - y_k)^2}{N}}.$$

Foi considerado que não se conhece previamente a sequência de referência, apenas seu comportamento degrau com uma variação ao longo da simulação. Com isso foram escolhidos parâmetros de sintonia invariantes no tempo, sendo ajustados empiricamente de acordo do conhecimento das matrizes dos modos e das transições entre eles. Foram escolhidos valores que demonstrem a melhoria ao se utilizar o método, tanto valores fixos para todos os modos como ajustados para cada um especificamente. Não é o foco deste trabalho estabelecer um método para encontrar os valores mais apropriados para cada problema.

Para comparação, foi incluso o caso onde não há influência da sintonia, representado por $L_i = 0, \forall i \in \Theta$. Outros quatro exemplos de sintonia para L_i são apresentados, dois com L_i igual para todos os modos e dois com valores diferente A Figura 7 apresenta os efeitos dos parâmetros escolhidos na saída do sistema, bem como a representação do distúrbio aplicado e da referência utilizada para cada instante k .

A Tabela 1 apresenta as métricas do funcional \mathcal{J} e da raiz do erro médio quadrático para os diferentes casos analisados.

Tabela 1. Funcional e RMSE para diferentes combinações de L_i .

	L_1	L_2	L_3	$\mathcal{J}(\theta, \mathcal{X}, u)$	<i>RMSE</i>
Caso 1	0	0	0	751604,55	0,0457
Caso 2	1	1	1	622843,08	0,0473
Caso 3	0,8	0,8	0,8	594871,14	0,0392
Caso 4	0,90	0,95	0,85	585652,96	0,0415
Caso 5	0,85	0,95	0,85	585974,83	0,0409

A melhora com a introdução dessa sintonia é perceptível com o valor do funcional e da raiz do erro médio quadrático comparado ao Caso 1.

O Caso 3 apresentou o menor valor para a raiz do erro médio quadrático, sendo os valores escolhidos iguais para todos os modos. Ao se ajustar esses valores para cada modo especificamente, obteve-se no Caso 4 o menor valor para o funcional, sendo esse o objetivo principal da minimização proposta nesse trabalho. O Caso 5 mostrou uma vantagem comparada ao Caso 4, onde com um funcional pouco maior (diferença relativa menor que 0.1%) teve uma redução de 1.4% no valor da raiz do erro médio quadrático, o que implica ser acompanhado de um

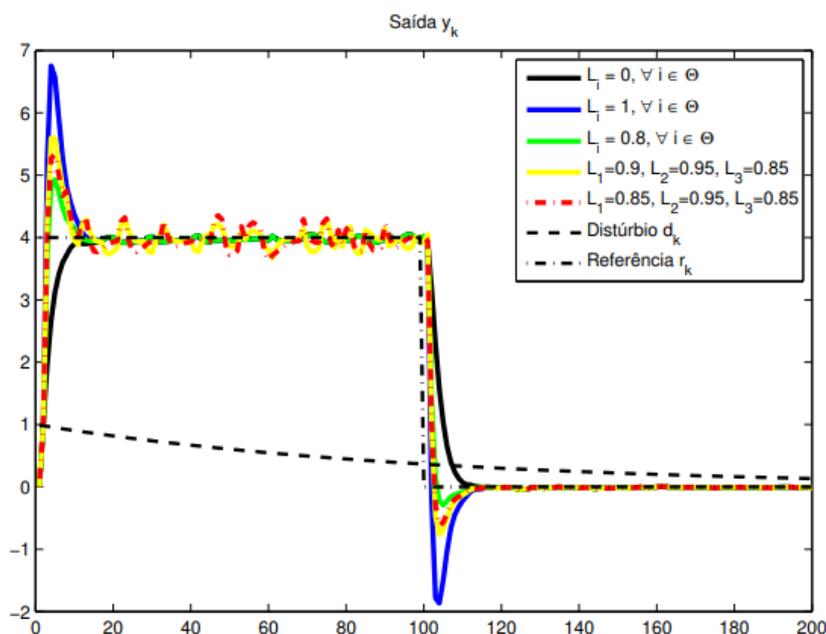


Figura 7. Saída do sistema para diferentes parâmetros $L_{i,k}$

aumento no esforço de controle.

4 Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido um regulador integral linear quadrático com rejeição de distúrbios para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos discretos no tempo. A introdução da rejeição de distúrbios e da ação integral proporcionou a redução do funcional do problema para menos da metade em todos os exemplos numéricos. O uso de diferentes conjuntos de parâmetros para sintonia da referência proporcionou uma redução ainda maior do funcional e do RMSE para as diferentes referências testadas. Como trabalhos futuros pretende-se desenvolver o regulador integral linear quadrático com rejeição de distúrbios para sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos para o caso com incertezas paramétricas.

Fontes de Financiamento

Agradecimentos a UESC pelo apoio financeiro a esta pesquisa via projeto: Controle e Filtragem para Sistemas Lineares Sujeitos a Saltos Markovianos com Entradas Desconhecidas, Processo 073.6766.2020.00111 08-14.

Orcid

Yago de Castro Souza  <https://orcid.org/0009-0000-3612-234X>

Gildson Queiroz de Jesus  <https://orcid.org/0000-0003-0831-607X>

Thiago Pereira das Chagas  <https://orcid.org/0000-0002-5866-0656>

Referências

1. A.A. Siqueira, M.H. Terra, "A fault tolerant manipulator robot based on H_2 , H_∞ , and mixed H_2/H_∞ Markovian controls", *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, vol. 1, pp. 309 - 314, 2004.
2. A. N. Vargas, E. F. Costa, J.B.R. do Val, "Finite-time stability, homogeneity, homogeneous systems, implicit Lyapunov function, non-aymptotic stabilization, sliding mode control, uncertain systems", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 23, no. 10, pp. 1136 - 1150, 2013.
3. Z. Matjacic and T. Bajd, "Arm-free paraplegic standing–Part I: Control model synthesis and simulation", *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering*, vol. 6, no. 2, p. 125 - 138, 1998.
4. A. P. Blake, F. Zampolli, "Optimal policy in Markov-switching rational expectations models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 35, no. 10, p. 1626 - 1651, 2011.
5. D. Swonder, "Feedback control of a class of linear systems with jump parameters", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 14, no. 1, p. 9 - 14, 1969.
6. H. J. Chizeck, A. S. Willsky, D. Castanon, "Markovian Jump Linear Quadratic Optimal Control in Discrete Time", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, p. 1138 - 1142, 1983.
7. H. J. Chizeck, A. S. Willsky, D. Castanon, "Discrete-time markovian-jump linear quadratic optimal control", *International Journal of Control*, vol. 43, no. 1, p. 213 - 231, 1986.
8. H. Abou-Kandil, G. Freiling, G. Jank, "On the solution of discrete-time Markovian jump linear quadratic control problems", *Automatica*, vol. 31, no. 5, p. 765 - 768, 1995.
9. A. K. Singh, B. C. Pal, "An extended linear quadratic regulator for LTI systems with exogenous inputs", *Automatica*, vol. 76, p. 10 - 16, 2017.
10. G. Ma, X. Liu, P. R. Pagilla, "Repetitive Control of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems", *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 6, p. 4546 - 4551, 2018.
11. G. Nakura, "Stochastic optimal tracking with preview by state feedback for linear discrete-time markovian jump systems", *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, vol. 6, no. 1, p. 15 - 27, 2010.
12. G. Nakura, "Stochastic Optimal Tracking with Preview for Linear Continuous-Time Markovian Jump Systems by Output Feedback", *Proceedings of the ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications*, p. 13 - 21, 2015.
13. N. Birla, A. Swarup, "Optimal preview control: A review", *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 36, no. 2, p. 241 - 268, 2015.
14. J. Wu, F. Liao Z. Xu, "Preview control for a class of linear stochastic systems with multiplicative noise", *International Journal of Systems Science*, vol. 50, no. 14, p. 2592 - 2603, 2019.
15. T. Holzhuter, "Optimal regulator for the inverted pendulum via Euler-Lagrange backward integration", *Automatica*, vol. 40, no. 9, p. 1613 - 1620, 2004.
16. M. Akhtaruzzaman, A. A. Shafie, "Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis", *Proceedings of 2010 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, ICMA 2010*, p. 1342 - 1347, 2010.
17. K. Yoshida, "Swing-up control of an inverted pendulum by energy-based methods", *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 6, no. 6, p. 4045 - 4047, 1999.
18. C. M. Mitschka and , M. H. Terra, A. A. G. Siqueira, , "Derivation of a Markovian controller for an exo-skeleton by overcome the benchmarks of a single and double inverted pendulum", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, p. 5061 - 5066, 2015.
19. A. T. Safa, A. Nouriani, A. Alasty, "Stable handspring maneuvers with passive flight phases: Results from an inverted pendulum-like template", *International Journal of Non-Linear*

- Mechanics*, vol. 128, p. 103606, 2021.
20. K. Furuta, M. Yamakita, S. Kobayashi, "Swing-up Control of Inverted Pendulum Using Pseudo-State Feedback", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 206, no. 4, p. 263 - 269, 1992.
 21. J. P. Cerri and M. H. Terra, "Recursive Robust Regulator for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 11, p. 6004 - 6011, 2017
 22. V. S. Madureira, T.P. das Chagas, G. Q. de Jesus, "Integral linear quadratic Gaussian regulator subject to unknown inputs: application in photovoltaic systems", *International Journal Dynamic Control*, 2023.