





Indeterminações nos materiais didáticos do CEFET-MG: um estudo histórico de 1970 aos tempos atuais

Indeterminacies in the teaching materials of CEFET MG: a historical study from 1970 to present days

Nina Leão Fonseca ^a, Otávio Gabriel Alves Lara ^a, Érica Marlúcia Leite Pagani ^a, Davidson Paulo Azevedo Oliveira ^{a,*}

^aCentro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil

* Autor Correspondente: ninaleaof@gmail.com

Resumo: O objetivo do presente trabalho é analisar, com base nos Três Mundos da Matemática como as indeterminações são apresentadas em quatro materiais didáticos de matemática produzidos e utilizados por professores do CEFET-MG nos últimos cinquenta anos. A teoria foi desenvolvida por David Tall, apoiada na ideia de que o pensamento matemático está ancorado em três mundos: o Conceitual Corporificado, o Operacional Simbólico e o Formal Axiomático. De acordo com nossas análises, a abordagem do conceito de Indeterminação nos materiais analisados mudou consideravelmente, os mais antigos possuíam ênfase no mundo Operacional Simbólico, e nos recentes, no mundo Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral; Indeterminações; Ensino Profissionalizante, História da Educação Matemática.

Abstract: The aim of this paper is to analyze, based on the Three Worlds of Mathematics, how indeterminacy is presented in four mathematics teaching materials produced and used by CEFET-MG teachers over the last fifty years. The theory was developed by David Tall based on the idea that mathematical thinking is anchored in three worlds: the corporified conceptual, the symbolic operational, and the axiomatic formal. According to our analysis, the approach to the concept of indeterminacy in the materials analyzed has changed considerably, with the older materials emphasizing the symbolic operational world and the more recent ones emphasizing the corporified conceptual and symbolic operational worlds.

keywords: Differential and Integral Calculus; Indeterminancies; Professional Teaching; History of Mathematics Education.

1 Introdução

A pesquisa que deu origem a esse trabalho que aqui relatamos foi desenvolvida no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior (PIBIC-Jr) no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) e o objetivo da pesquisa maior foi realizar uma análise histórica do ensino do Cálculo Diferencial e Integral nessa instituição. Neste artigo, apresentamos um recorte da pesquisa cujo objetivo é analisar, a

partir dos Três Mundos da Matemática, como as indeterminações são apresentadas em quatro materiais didáticos do CEFET-MG.

O Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais é uma instituição multicampi com unidades que atendem do interior à capital do estado e oferece cursos da Educação Profissional Técnica de Nível Médio (EPTNM), cursos de graduação e pós-graduação, que contemplam cursos de especialização *lato sensu*, mestrado e doutorado.

Nas disciplinas de Matemática das três séries da EPTNM, os conteúdos de Cálculo de funções reais de uma variável real, dentre eles os limites e derivadas, estavam, historicamente, inseridos nas grades curriculares de todos os cursos técnicos para atender às demandas de disciplinas técnicas de “alguns” desses cursos. Com o passar dos anos, diante das dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem desses conteúdos e de sua pouca ou nenhuma aplicabilidade na maioria dos cursos, seu ensino passou, a partir do ano letivo de 2013, a ser restrito aos cursos técnicos de Eletrônica, Eletrotécnica e Mecatrônica. O ensino e a aprendizagem desses conteúdos, bem como o material didático a ser utilizado, sempre foram temas de intenso debate entre os professores. Muitas vezes, esses materiais eram desenvolvidos por eles próprios desde a década de 1970.

Além deste cenário, no início de 2020 fomos surpreendidos pela pandemia do COVID-19 que impôs medidas sanitárias como distanciamento, e essa situação enfrentada pelo mundo levou à suspensão das aulas presenciais em todo território nacional por tempo indeterminado. Diante do cenário que se apresentava os professores de Matemática do CEFET-MG organizaram-se num grupo de trabalho intitulado: Grupo de Trabalho de Professores de Matemática no CEFET-MG (GTMAT) e construíram um site com os conteúdos de Matemática da EPTNM, dentre eles os conteúdos de limites, derivadas e integrais.

Diante dessa discussão e materiais produzidos na instituição desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa, embasada na análise documental para a qual tivemos, como principal fonte de informação as apostilas elaboradas e o site construído por professores de Matemática do CEFET-MG nesse período. Com a análise documental identificaremos informações nos documentos e os dados analisados à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática [1].

Para complementar nossa investigação, além das análises do material didático, também conduzimos entrevistas com dois professores; sendo autores ou colaboradores das apostilas. Segundo Prodanov e Freitas [2, pp. 52](2013, p. 52), “as entrevistas com pessoas que tiveram envolvimento prático com problema”, contribuem para analisar os dados sob outros ângulos. Os professores entrevistados serão aqui nomeados por *Prof₁* e *Prof₂*.

2 Cálculo Diferencial e Integral: História, Ensino e Aprendizagem

O Cálculo Diferencial e Integral é uma parte fundamental do conhecimento matemático com aplicações nas diversas áreas do conhecimento. Está presente, como disciplina, nos currículos de cursos de graduação como nos de Engenharia, Física, Economia dentre outros e em alguns cursos da em alguns na Educação Profissional Técnica de Nível Médio (EPTNM).

O Cálculo¹ foi desenvolvido através do estudo de curvas, e seu desenvolvimento histórico está apoiado em dois problemas: um que trata do cálculo de áreas (quadratura) e outro que trata do traçado de tangentes em um determinado ponto de uma curva. Entretanto, a ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certas áreas, volumes e comprimentos, e a diferenciação, por sua vez, apareceu mais tarde e resultou dos problemas sobre tangentes a curvas. Esses dois problemas foram trabalhados no século XVII pelos trabalhos desenvolvidos independentemente por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried

¹ Quando utilizamos a palavra Cálculo, estamos nos referindo ao Cálculo Diferencial e Integral

Wilhelm Leibniz (1646-1716), [3] ainda destaca que os dois se basearam em problemas reais.

Newton e Leibniz partiram de pontos diferentes e percorreram caminhos distintos, mas os estudos de ambos culminaram com o Teorema Fundamental do Cálculo [4] (ZUIN, 2001). Esse teorema estabelece que

[...] a integração e a derivação são operações inversas uma da outra, de que se pode concluir que os problemas de áreas limitadas sob o gráfico de uma função em um intervalo e o problema da determinação da inclinação da reta tangente em um ponto dessa função podem ser resolvidos juntos pois, solucionando um problema, o outro também passa a ser esclarecido [5, p. 20].

Nosso interesse sobre o ensino de Cálculo no CEFET-MG, particularmente na EPTNM, nos levou a questionar as dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem desses conteúdos, de maneira geral. Essas dificuldades são inúmeras e já foram e continuam sendo objeto de interesse de pesquisadores brasileiros e internacionais [6], [7], [8] e constituem um grande desafio para a comunidade de Educadores Matemáticos. São alvo de pesquisas que propõem novas estratégias e metodologias de ensino e de aprendizagem desses conteúdos (limites, derivadas e integrais) tanto no âmbito do Ensino Superior [9] ABDELMALACK, 2011, [10], [11] quanto no Ensino Médio [12], [13]. No âmbito do Ensino Médio, a presença desses conteúdos, atualmente, é bastante limitada, presente, na maioria das vezes, apenas nos currículos de alguns cursos técnicos, sendo questionada a presença do Cálculo no Ensino Médio restrito aos cursos técnicos ou estendidos ao ensino regular [14]. Apesar disso, [15], defende que ideias básicas do Cálculo devem ser trabalhadas no Ensino Médio, a fim de amenizar as dificuldades na transição desse nível de ensino para o nível Superior e observa, em sua tese, que

[...] a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contra-senso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo [15, p. 402].

Os estudos realizados indicam que as discussões acerca dos conteúdos de Cálculo no Ensino Médio ainda merecem atenção. Essa necessidade justifica nossa investigação sobre os materiais utilizados para o ensino desses conteúdos no CEFET-MG ao longo dos últimos cinquenta anos.

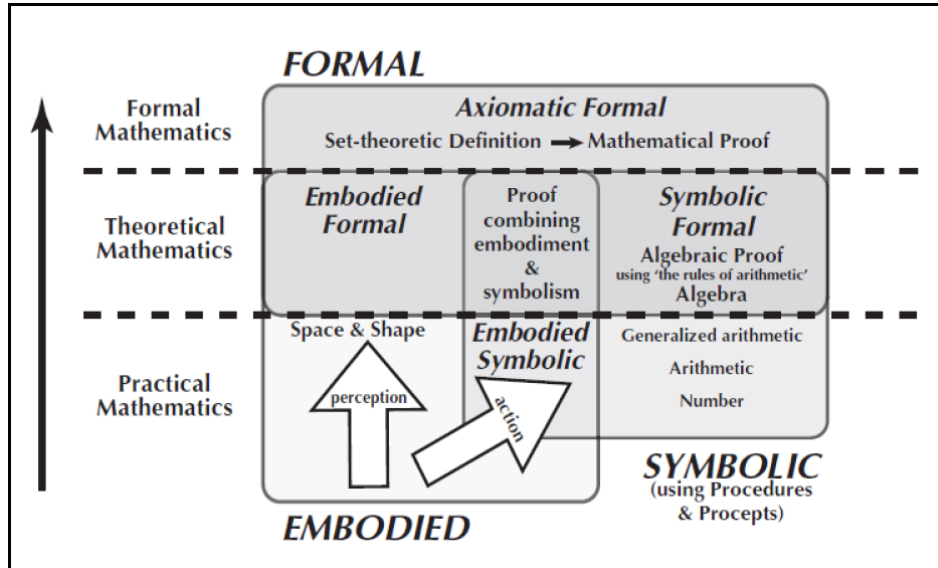
A pesquisa de [3] apresenta um estudo sobre o conteúdo de limites em alguns livros de Cálculo destinados ao Ensino Médio produzidos no período de 1940 a 1970. A pesquisadora utiliza-se dos Três Mundos da Matemática, teoria desenvolvida por Tall [1], [16] para concluir que os autores analisados não abordam o conteúdo de limites de uma forma corpórea pura. Apenas um dos autores utiliza uma abordagem formal pura que, de acordo com [1], [16] é uma abordagem mais acadêmica, normalmente específica para cursos superiores e não para ser ensinada e discutida no âmbito escolar. Em nosso, nosso foco é analisar um conteúdo específico de indeterminações em materiais produzidos e utilizados no CEFET-MG, não analisados por [3], a partir dessa teoria.

3 Os Três Mundos da Matemática

A Teoria dos Três Mundos da Matemática foi desenvolvida por David Tall [1], [16] e está apoiada na ideia de que o conhecimento matemático e o desenvolvimento cognitivo estão ancorados em três mundos: o Conceitual Corporificado, o Operacional Simbólico e o Formal Axiomático. Dessa forma, o pensamento matemático que se inicia em uma matemática prática,

evolui passando pela teórica até atingir a Matemática formal. Vale destacar que esses mundos não são disjuntos e, nesse sentido, um conceito pode pertencer a dois ou mais mundos, como ilustra a figura 01.

Figura 1. Ilustração dos Três Mundos



Fonte: [1, p. 19]

O Mundo Conceitual Corporificado (*conceptual embodiment*) é construído a partir de situações do mundo real que permitem a criação de imagens mentais. Abrangem as percepções no espaço e na forma que, inicialmente, podem iniciar a partir do contato físico até que se desenvolva imagens estritamente mentais.

No Mundo Operacional Simbólico (*operational symbolism*) o pensamento matemático é caracterizado a partir de ações que, por meio de procedimentos, se tornam símbolos, por exemplo, os utilizados para generalizações de aritmética e mesmo no Cálculo. Destaca-se que o número também é um símbolo e a manipulação dele pode ser caracterizado como pertencente ao mundo simbólico.

Já no Mundo Formal Axiomático (*axiomatic formalism*), como o próprio nome indica, estão os conhecimentos a partir do formal acadêmico. São demonstrações realizadas de modo lógico partindo de axiomas. Portanto, eles refletem um conjunto de ações mentais mais abstratas.

O pesquisador ainda afirma que especificamente na matemática escolar o mundo corpóreo (*conceptual embodiment*) e o simbólico (*operational symbolism*) se desenvolvem em paralelo. Pelo esquema anterior (figura 01), percebemos que [1] utiliza-se de uma seta para indicar que é a partir de ações no mundo corpóreo que se pode chegar ao simbólico, o que ele denominou de corpóreo simbólico. Além disso, é por meio de abstrações e manipulação de símbolos em demonstrações de aritmética e álgebra que se evolui para o mundo simbólico formal. Este, segundo o autor, é o ápice do pensamento matemático na Matemática escolar e o começo da Matemática acadêmica, em outros termos, do pensamento matemático em nível avançado.

Nesse sentido, ao utilizarmos em nossas análises dos materiais didáticos o termo mundo simbólico formal para caracterizar a abordagem dos temas estamos restritos a um nível de pensamento matemático dentro da Matemática Escolar, visto que os materiais foram produzidos com o objetivo de serem utilizados com estudantes da Educação Profissional, nas antigas

escolas técnicas, inseridos na Educação Profissional Técnica de Nível Médio (EPTNM).

Na seção seguinte, apresentamos e analisamos os materiais didáticos desenvolvidos e utilizados por professores da instituição desde a década de 1973 até o ano de 2022 e que são considerados o corpus de análise deste trabalho.

4 Os Materiais Didáticos Analisados

Os materiais didáticos selecionados para nossa pesquisa são três apostilas impressas e o material de Cálculo do site do GTMAT. As apostilas foram encontradas no acervo do Departamento de Matemática da instituição e o material do GTMAT está disponível em <https://sites.google.com/site/matematicacefetmg>. No Quadro 01 estão listados os títulos, autores e data de publicação de cada material. Vale observar que o ponto de interrogação no segundo trabalho indica que não foi possível determinar a data exata de produção do mesmo.

Quadro 1: materiais didáticos analisados

Título	Autores	Data de publicação
Matemática Segunda Série 2º Grau	Arnaldo Stochiero e João Bosco Laudares	1973
C.C.P. DO LIVRO TEXTO DE MATEMÁTICA - Cálculo Diferencial e suas aplicações	Silvimar Fábio Ferreira; João Bosco Laudares; Luiz de Gonzaga Vieira; Pedro Cesar Rocha Coimbra e Valdemar Pereira Lopes	198?
Limites e Derivadas: Cálculo Diferencial e suas aplicações	Silvimar Fábio Ferreira; João Bosco Laudares; Luiz de Gonzaga Vieira; Pedro Cesar Rocha Coimbra e Valdemar Pereira Lopes	1991
Site do GTMAT	Érica Marlúcia Leite Pagani (coordenadora); Alexandre Pereira de Vasconcellos; Amanda da Costa Vasconcelos de Moura; Christiano Otávio de Rezende Sena; Cláudia Pires Ferreira; Guilherme Barbosa de Almeida; José Jozelmo Grangeiro Vieira; Sarah Faria Monteiro Mazzini eYara Patrícia Barral de Queiroz Guimarães	2020

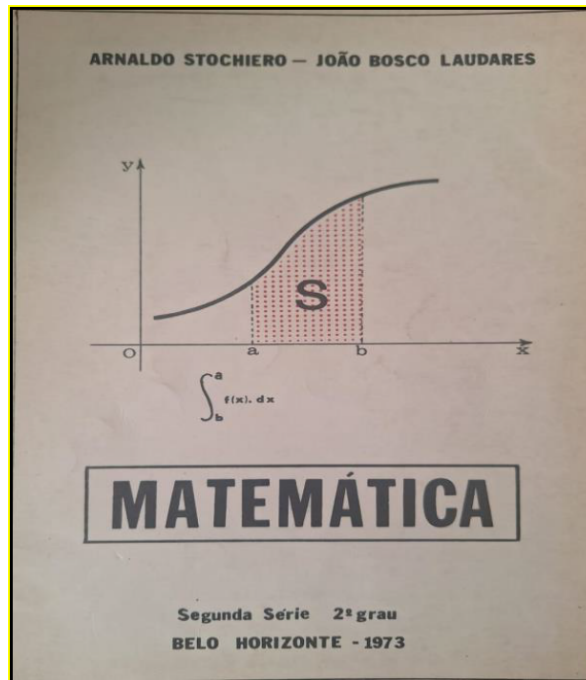
Fonte: elaborados pelos autores.

4.1 Matemática Segunda Série 2º Grau

Esta apostila (figura 02) foi produzida pelos professores Arnaldo Stochiero e João Bosco Laudares em 1973, ambos professores da Escola Técnica Federal de Minas Gerais, com o objetivo de ser um material que auxiliasse outros professores a ministrarem aulas nos cursos técnicos para a Segunda Série do 2º Grau (atualmente denominado de Ensino Médio). É um

dos 3 volumes que foram desenvolvidos com o mesmo foco para cada uma das séries deste nível de ensino. O material contém o conteúdo programático da Matemática completo da segunda série da época, a saber: Determinantes, Números Complexos, Funções Numéricas e Gráficos, Limite de uma Função, Funções Contínuas e Descontínuas, Derivadas, Cálculo Diferencial e Integral: Integral Indefinida e Integral Definida. De acordo com [17], esta apostila não apresenta aplicações em cursos técnicos sendo restrita à Matemática e utilização de técnicas de resolução de limites.

Figura 2. Foto da capa da apostila Matemática Segunda Série 2º Grau



Fonte: dados dos autores.

Há de se notar que a apostila apresenta muitos exemplos e exercícios dentro da própria Matemática, o que corrobora com o estilo de ensino da década de 70 nas escolas técnicas, conforme fala em entrevista realizada com o *Prof1* quando ele descreve o ensino técnico da época como “calculista”. Entretanto, quando o assunto é indeterminações, o livro vem com uma proposta bem pouco aprofundada. Há um tópico na Unidade IV em que é citado alguns tipos de indeterminação ($\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, ∞^0 , $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ e 0^0), e como isso afeta no traquejo algébrico dos limites, instruindo também que se deve “levantar as indeterminações”, isto é, utilizar as propriedades e os artifícios algébricos para determinar/calcular o limite da função dada, se existir. Desta maneira os autores desenvolvem exemplos teóricos de maneiras de como “fugir” dessas indeterminações utilizando exercícios e, logo depois, propondo alguns exercícios para que o estudante possa por em prática essas técnicas. Essa abordagem é distinta da proposta por [1] sobre a evolução do pensamento matemático que vai do prático, a partir de situações do mundo real, para o teórico e axiomático formal.

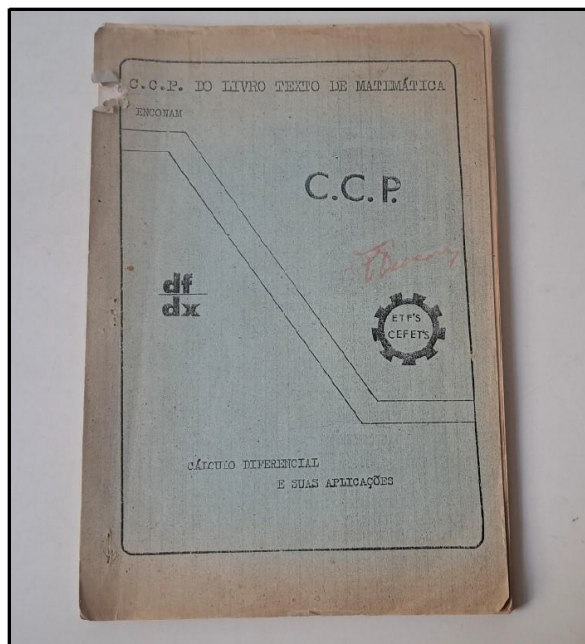
No final desta Unidade são demonstrados os Limites Notáveis e também o Teorema Trigonométrico Fundamental utilizando o Teorema do Confronto. Embora sejam demonstrações não podemos afirmar que é uma abordagem axiomática formal, sendo restrita ao mundo simbólico formal que é conceituado como sendo um mundo no qual há utilização de manipulações algébricas. Os autores também informam sobre o Número de Euler e uma observação de que

iriam omitir a demonstração desta igualdade. Essa observação nos sugere que não era objetivo dessa apostila aprofundar o estudo e a compreensão desses conteúdos e sim apresentar técnicas ou algoritmos que favoreçam a busca de soluções dos exercícios.

4.2 C.C.P. do Livro Texto de Matemática: Cálculo Diferencial e suas Aplicações

Alguns anos depois da apostila de 1973, foi produzido o material didático intitulado "C.C.P. do Livro Texto de Matemática: Cálculo Diferencial e suas Aplicações"(figura 03).

Figura 3. Foto da capa da apostila C.C.P



Fonte: dados dos autores.

Essa primeira apostila, bem como a primeira produzida, tinha um autor em comum: o professor João Bosco Laudares. O documento mais recente foi encontrado no Arquivo do CEFET-MG e, nele, não consta a data de produção ou de publicação da mesma. Entretanto, a partir da menção do Encontro Nacional de Professores de Matemática das Escolas Técnicas Federais e Cefet's - ENCONAM e da Comissão Central Permanente - C.C.P. na capa do material, pudemos concluir que ele foi produzido durante a década de 1980; muito provavelmente, durante ou após o ENCONAM de 1983. Afinal, a C.C.P. só foi instaurada a partir desse encontro.

Vale destacar que o ENCONAM eram encontros que ocorriam anualmente no formato de seminários e que o professor *Prof*₁, a quem entrevistamos, teve participação ativa nesses eventos e na C.C.P.

Ao pesquisar sobre o assunto, [18] Pinto e Santos (2018) também entrevistaram o *Prof*₁ que destacou durante a entrevista cedida a sua história como educador e sua participação nos ENCONAM. Segundo o professor, esses encontros eram realizados por professores de matemática das escolas técnicas, a fim de compartilharem experiências e melhorarem as estratégias e materiais de ensino. Esses encontros ocorreram nas décadas de 1980 e 1990 e, considerando

[...] os novos rumos e movidos pelos ares democráticos desse período, professores de matemática de diversas Instituições Federais de Ensino dos diferentes estados da Federação começaram a organizar encontros anuais com o intuito de debater e elaborar propostas para a melhoria do ensino de matemática. Desse modo, promoveu-se a troca de experiências e a reflexão sobre questões teóricas e metodológicas pertinentes às especificidades do ensino de matemática na escola profissionalizante [18, p. 84].

De acordo com [19], os ENCONAMs foram sediados no Paraná (1980), Ceará (1981), Minas Gerais (1982), Bahia (1983), Rio de Janeiro (1985), Rio Grande do Sul (1986), Amazonas (1987), Espírito Santo (1989), Pernambuco (1995) e Santa Catarina (1996). Na entrevista que realizamos, o *Prof₁* relata que no primeiro encontro, no CEFET-Paraná, foi instituída a periodização anual do evento e que, nos seguintes, os professores resolveram, então, “escrever alguma coisa”; ou seja, decidiram produzir materiais didáticos voltados ao ensino de matemática nessas instituições.

Segundo [18], no II ENCONAM, “Ficou acordado que cada grupo trabalharia no decorrer do ano de 1981 e a produção de cada um seria apresentada no encontro anual seguinte, que se realizaria em Belo Horizonte, em 1982”. Assim, ao final do encontro na capital mineira, foi aprovada a formação de uma Comissão, liderada pelos professores do CEFET-MG sob coordenação de João Bosco Laudares, com o objetivo de revisar e sistematizar os trabalhos produzidos pelos grupos. A preocupação desse grupo, de acordo com a fala do *Prof₁* em entrevista era: “*Como garantir que aquela produção realmente atenderia ao ensino de matemática requerido pelas diversas áreas da educação profissional?*”.

O *Prof₁* relata que eles decidiram realizar uma pesquisa sobre o ensino de Matemática voltado para as escolas técnicas, o que revelou uma distinção clara entre o método de ensino deles e a educação praticada nas escolas regulares. Isso porque, lecionando para alunos de cursos técnicos, seria possível propor novos exemplos e formas de aplicação dos conteúdos, de maneira a associar o conteúdo de sala de aula às práticas profissionais e desenvolvidas em disciplinas técnicas. Na pesquisa desenvolvida por eles foi realizado um levantamento dos conteúdos da matemática que se relacionavam com a área técnica, por meio de questionários e entrevistas com professores da educação profissional de todo o país. Vale ressaltar que ainda não tivemos acesso aos resultados desta pesquisa.

Outra entrevista que realizamos e que nos auxiliou a entender o movimento de criação deste material em análise foi com o professor *Prof₂*, um dos colaboradores do documento e que também era professor do CEFET-MG naquele período. Ao ser questionado sobre o material e as páginas faltantes, ele diz:

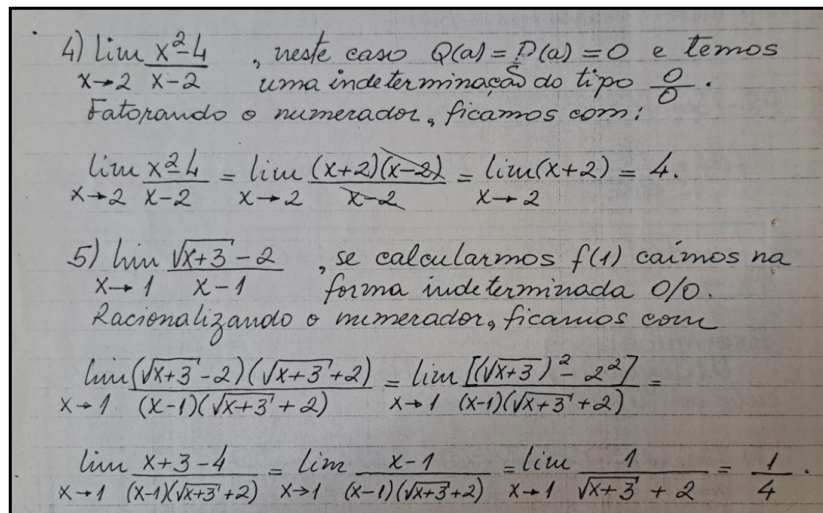
“a gente escrevia à mão, né, e tirava a cópia, tanto que eu tenho o original do meu [...]. Ia pra reunião, pegava naquilo [o manuscrito] e em cima dele é que se discutia, aí fazia as modificações. Depois saía impresso. Foi isso que aconteceu. Isso aqui [Parte manuscrita do documento] não faz parte desse livro aqui não. Isso foi exatamente o livro que levaram para a reunião para discutir. [...] É um rascunho. Isso aqui é um rascunho.”

Portanto, um dos resultados dessas reuniões e da CCP foi a criação de material didático destinado ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral sendo uma das primeiras versões essa segunda apostila encontrada no arquivo do Departamento de Matemática CEFET-MG e é um dos documentos de nosso corpus de análise. Destacamos que este material é, em parte,

manuscrito e, em parte, datilografado. Além disso, ele não está completo, faltando algumas páginas.

Adentrando ao conteúdo desta apostila com o foco no artigo atual, vale destacar que as indeterminações são apresentadas apenas na página 13, sendo uma na resolução do exercício 04 e outra na resolução do exercício 05, como mostra a figura 04 a seguir.

Figura 4. Foto de uma página da apostila



Fonte: dados dos autores.

Essas são as únicas menções ao conceito de “indeterminação” ao longo de todo o documento no qual podemos identificar um pensamento matemático pertencente ao **Mundo Simbólico Formal**. Diferentemente da apostila anterior, esse documento não possui um tópico ou seção dedicada a indeterminações.

No entanto, em exercícios anteriores aos apresentados na figura 04, a apostila traz exercícios que contêm Indeterminações, mas nesses é solicitado que os alunos encontrem os limites com a ajuda dos gráficos. Essa abordagem se enquadra no **Mundo Conceitual Corporificado**, como definido por [1], e permite que os exercícios sejam resolvidos sem que se recorra a uma matemática axiomática e sem definir formalmente o que é uma indeterminação.

Após abordar as propriedades dos limites, o material apresenta exercícios que devem ser solucionados de maneira algébrica. Nesse momento, a abordagem do material é **Operacional Simbólica**, e é nessa parte do material que as Indeterminações são mencionadas. Posteriormente, quando aparecem indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ durante a resolução de um exercício, os autores apenas citam que determinada função tem valor $\frac{0}{0}$ para tal valor de x e concluem a resolução utilizando recursos algébricos para levantar a indeterminação. Verificamos que essa estratégia não é explicada ou explicitada. Em seguida, o material apresenta os limites no infinito e algumas propriedades deles. Nota-se que o texto estabelece que, para um polinômio $P(x)$ tal que $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$; $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_0x^n$, mas essa propriedade também não é explicada ou demonstrada e, portanto, nessa parte o material, também, apresenta uma abordagem **Operacional Simbólica** a partir dos mundos definidos por [1].

Ressaltamos que o texto não menciona a existência de indeterminações do tipo $\infty - \infty$ mas que apresentada alguns Limites Notáveis. O número de Euler (e) é apenas mencionado, não se recorre aos mundos corpóreo ou simbólico para demonstrações e o texto apenas

menciona que essa demonstração por meio do limite exponencial fundamental ocorre em cursos mais avançados, ou seja, os autores deixam explícito que não pretendem, neste momento, avançar para o **mundo formal**. Por outro lado, o material apresenta a demonstração do Limite Trigonométrico Fundamental a partir do Teorema do Sanduíche, mas o teorema não é mencionado na resolução. Apenas se constroem as desigualdades $\cos x < \frac{\text{sen}(x)}{x} < 1$ e o livro explica que, como $\cos(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$. Desse modo, a abordagem do material nesse momento é **corpórea simbólica**, como destacado por [1] para conteúdos da matemática escolar.

Além disso, também foi possível perceber que, diferentemente da apostila de 1973, esse material trata unicamente de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$. Indeterminações de tipo $\infty - \infty$, ∞^0 , $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0 não são abordadas em nenhum momento do texto.

4.3 A Apostila Limites e Derivadas: Cálculo Diferencial e suas Aplicações.

Essa obra também foi produzida pela C.C.P. (Comissão Central Permanente) livro-texto, composta por professores dos CEFETs Paraná e Minas Gerais, e pelas Escolas Técnicas do Ceará, Mato Grosso e Goiás. O livro foi publicado no ano de 1991, e representa uma atualização do material analisado anteriormente tendo, inclusive, os mesmos autores e colaboradores. É um dos fascículos de uma coleção de onze volumes, que contém todo o conteúdo do programa oficial de Matemática do 2º grau ministrado nas Escolas Técnicas Industriais e Centros de Educação Tecnológica do sistema federal de ensino na época [19]. Os livros dessa coleção tinham o objetivo de apresentar um material didático que desse suporte ao ensino profissionalizante, no contexto das escolas técnicas federais da época. De acordo com *Prof*₂, o objetivo principal da coleção era de "levar o estudante a raciocinar". Para os autores isso poderia ser feito a partir da redução da memorização e ênfase à interpretação gráfica das funções, procurando-se dar soluções geométricas aos problemas. Eles estavam interessados em apresentar uma abordagem que se baseasse no **mundo corpóreo** (conceitual corporificado), e que por meio de ações atingissem o **mundo simbólico** (operacional simbólico). Em outras palavras, eles pretendiam salientar o estudo da Geometria ao apresentar problemas de aplicação dos conceitos matemáticos relativos à Física e às disciplinas técnicas. Em relação ao material de 1973, há de se notar uma especificidade maior em relação aos exemplos e exercícios. Neste livro são utilizadas situações-problema e contextos presentes nos cursos técnicos, como por exemplo resistência elétrica, óptica, geometria, cinemática e outros. Podemos observar, então, que há uma busca pelo mundo corpóreo simbólico no ensino de matemática.

Um ponto interessante é que este livro se distancia da maneira como a Matemática era ensinada na época na qual a formalidade e o rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra (mundo formal axiomático) era requerido, como sugeria o Movimento da Matemática Moderna. Os autores buscaram uma abordagem corpórea simbólica ao agregar ao ensino do Cálculo imagens, formas, gráficos e situações contextualizadas para a realidade do aluno, neste caso, alunos de cursos técnicos profissionalizantes.

Ressaltamos que esse livro e a apostila apresentada na seção anterior são bastante semelhantes. Exemplos, gráficos, exercícios e mesmo as palavras utilizadas nas explicações são exatamente iguais para a maior parte de ambos os documentos. A principal diferença entre os materiais é o capítulo de Cálculo dos Limites Laterais, que está colocado no começo do livro de 1991 e no meio do manuscrito da década de 1980. As outras sessões de ambos os livros estão na mesma ordem.

Em relação às indeterminações, esse material difere do manuscrito em apenas um ponto: nele, é realizada a demonstração da propriedade de que, para um polinômio $P(x)$ tal que $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$; $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_0x^n$. A demonstração

apresentada é o único momento em que podemos identificar um conteúdo pertencente à interseção dos três mundos de [1] como sendo uma demonstração axiomática formal na qual foram utilizados os mundos corpóreo e simbólico. Todas as outras características relacionadas à abordagem de Indeterminações são comuns a ambos os materiais.

4.4 O Material de Cálculo no Site do GTMAT ²

Quando o CEFET-MG aderiu à modalidade do ensino remoto emergencial, em 2020, os professores se depararam com um enorme desafio: viabilizar para os estudantes nessa nova perspectiva de ensino materiais didáticos que fossem gratuitos e de qualidade, com um prazo de produção bastante reduzido. Nesse contexto, surgiu o GTMAT – Grupo de Trabalho de Professores de Matemática no CEFET-MG. Formado a partir da união de professores de Matemática que atuam na EPTNM de todas as unidades da instituição. Esse grupo desenvolveu uma dinâmica de trabalho que permitiu, ao longo de quase dois anos, a produção de cerca de 1400 vídeo aulas, além de centenas de arquivos de texto contendo milhares de exercícios, resoluções e teoria sobre os conteúdos de Matemática presentes no currículo do Ensino Médio da instituição.

Um dos trabalhos desse grupo de professores foi a produção de materiais didáticos disponibilizados no site. Essa plataforma foi criada com o objetivo de facilitar o acesso dos alunos da EPTNM a vídeos, textos e exercícios de qualidade, desenvolvidos e selecionados por educadores do Ensino Médio Técnico. No site, há vários tipos de arquivos, cujos significados são assim descritos: [CONT] Arquivo de texto contendo a teoria correspondente ao conteúdo, [VAC] Vídeo aula contendo a teoria correspondente ao conteúdo, [EXE] Arquivo de texto contendo exercícios correspondentes ao conteúdo, [EXGAB] Arquivo de texto contendo os gabaritos dos exercícios, [EXRES] – Arquivo de texto contendo as resoluções dos exercícios, [VRES] – Vídeo aula contendo as resoluções dos exercícios.

Como parte desse material, há uma unidade dedicada ao ensino de Cálculo. Ela se chama “Noções de Cálculo para o Ensino Médio” e é a unidade 9 da aba “2ª Série”. Participaram da elaboração dessa unidade nove professores de diversos campi do CEFET-MG e, nela há uma seção dedicada exclusivamente a indeterminações. Ao analisar o conteúdo presente no site do GTMAT, é possível perceber que a explicação das Indeterminações ocorre, nos materiais disponibilizados, por meio de uma abordagem que mescla o **Mundo Formal Axiomático com o Mundo Operacional Simbólico**, como definidos pelo pesquisador David Tall [1].

Inicialmente, tanto no texto do arquivo [CONT] quanto no [VAC], é introduzida a frase cotidiana “não existe divisão por 0” e essa ideia começa a ser questionada. A partir disso, é apresentado o algoritmo de Euclides e uma explicação de que a divisão $\frac{a}{0}$; $a \neq 0$ é impossível, mas que $\frac{0}{0}$ é indeterminado. Posteriormente, são apresentadas outras cinco indeterminações: $\infty - \infty$, ∞^0 , $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0 . Mostra-se que podem ser encontrados diversos valores para o limite de cada uma delas, a depender do contexto em que aparecem, e explica-se que, por isso, essas expressões têm valor indeterminado. Por fim, são reunidos os seis tipos de indeterminação trabalhados e explica-se que, quando algum deles aparece durante a resolução de um limite, é necessário utilizar artifícios matemáticos para resolvê-lo.

Os exercícios propostos no arquivo [EXE] apenas solicitam que o aluno identifique, para cada um dos 7 limites propostos, o tipo de indeterminação apresentado. Nesse contexto, percebe-se claramente a dominância do mundo **Operacional Simbólico** como definido por [1]. Não há, nesses exercícios, incentivo para que os alunos apliquem os conhecimentos na resolução de problemas ou tentem compreendê-los de forma gráfica, e tampouco são trabalhadas definições

² <https://sites.google.com/site/matematicacefetmg>.

rígidas e formais. Os exercícios são práticos e colaboram para que os alunos fixem o conteúdo aprendido, trabalhando-o por meio de operações e algoritmos.

Já os arquivos [EXRES] e [VRES] são um pouco mais completos: cada um dos 7 limites propostos é trabalhado, parte a parte, até que se chegue a uma das indeterminações. Essas resoluções também são bastante simbólicas, e são realizadas de forma simples, de modo simbólico operacional.

Os artifícios que devem ser utilizados na resolução de limites, quando aparecem indeterminações, são trabalhados na seção seguinte à de Indeterminações: “II.9.1.g Aplicações da fatoração algébrica no cálculo de limites”.

No arquivo [CONT], temos uma explicação sucinta sobre como a fatoração algébrica pode ser utilizada para solucionar indeterminações no cálculo de limites. O texto explica como a fatoração pode ser utilizada para simplificar quocientes, eliminando a indeterminação e possibilitando, assim, a resolução do limite. Em seguida, são apresentados alguns exemplos de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$ que podem ser resolvidos dessa forma. Ao longo do conteúdo, os tópicos são abordados sem recorrer ao recurso de gráficos ou aplicações e tampouco definições formais. Nesse sentido, fica bastante claro que, nesse arquivo, o conteúdo é trabalhado a partir de uma abordagem essencialmente **Operacional Simbólica**.

O [VAC] apresenta um conteúdo bastante similar ao do arquivo [CONT], apresentando os mesmos exemplos, com uma abordagem semelhante. A principal diferença entre eles é que, no vídeo, a professora faz uma introdução, revisando o conteúdo de fatoração algébrica para os estudantes. Ela explica como isso pode ser realizado e apresenta algumas técnicas: colocar um fator comum em evidência e a fatoração em binômios a partir das raízes de uma equação. Considerando o contexto educacional do CEFET-MG e a realidade de muitos dos discentes da instituição, essa revisão de conteúdos que serve como suporte para a matéria ensinada pode exercer um papel fundamental em garantir que os estudantes tenham a oportunidade de compreender e aplicar corretamente o que aprendem. Essa revisão também é feita sem a presença de contextualizações ou definições formais o que as torna mais um exemplo de aplicação a partir de abordagens Operacionais simbólicas no acervo do GTMAT.

De maneira geral, a abordagem do tópico de indeterminações é predominantemente Operacional Simbólica e em nenhum momento dessa seção ou de toda a unidade 9 é explicado como o aluno deve proceder quando se deparar com outros tipos de indeterminação.

Considerações Finais

A análise de diversos materiais didáticos produzidos ao longo de cinquenta anos nos proporcionou um novo olhar sobre a história do ensino de Cálculo no CEFET-MG, especialmente em relação às indeterminações. De acordo com as nossas análises, a apresentação do conceito de Indeterminação nos materiais didáticos utilizados e desenvolvidos pela instituição durante essas décadas mudou consideravelmente. Se por um lado em todos os livros foram abordadas indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e foram ensinadas técnicas para solucionar limites mesmo quando elas aparecem. Por outro, outros tipos de indeterminações, como $\infty - \infty$, ∞^0 , $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0 são abordados apenas na apostila de 1973 e no site do GTMAT, e não são mencionadas nas outras obras.

[20] Stochiero e Laudares (1973) apresentam indeterminações por meio de uma abordagem operacional simbólica. Eles citam os tipos de indeterminação e apresentam artifícios para resolver alguns deles. Já no manuscrito, bem como no livro de 1991, os autores elaboram exercícios que incentivam os alunos a pensar a partir dos gráficos, numa abordagem Conceitual Corporificada, e ensinam técnicas para resolver limites indeterminados de maneira algébrica,

sem apresentar demonstrações ou definições formais. Eles não mencionam nenhum tipo de indeterminação, além de $\frac{0}{0}$, e apesar de proporem que os estudantes resolvessem limites indeterminados, eles não justificam formalmente os procedimentos apresentados. Isso caracteriza a maior parte da abordagem do livro como Operacional Simbólica. Já o Site do GTMAT, que é o mais recente material didático produzido por professores da instituição, também aparenta ser o mais completo em relação ao tema de Indeterminações. Nos arquivos do site, são mencionados seis tipos de indeterminações e é explicado matematicamente o porquê de a forma $\frac{0}{0}$ ser indeterminada. Essa é a única manifestação Formal Axiomática percebida em qualquer um dos materiais didáticos da instituição. Além disso, os materiais criados pelo GTMAT apresentam um número pequeno de exercícios, quando comparados aos seus antecessores. Por outro lado, todos os exercícios são resolvidos pelos professores e explicados de maneira completa, diferentemente do que acontece nos outros materiais. Nesse ponto, os materiais do GTMAT também manifestam uma abordagem bastante Operacional Simbólica.

A partir desta análise, percebemos que mesmo as estratégias utilizadas nos materiais mais antigos ainda possuem um lugar no ensino de Indeterminações, especialmente para alunos do Ensino Técnico. Abordando os conceitos do Cálculo por meio de estratégia Conceitual Corporificada, é possível que os alunos aprendam lembrando conceitos aprendidos anteriormente. Mais ainda, apresentando aplicações para o Cálculo no contexto das disciplinas técnicas, é possível incentivar o aluno a aprender aquele conteúdo, mostrando-o que ele será utilizado também em outras áreas, além da Matemática. Nesse sentido, aproximar aluno, professor e disciplina pode ser fundamental para garantir um bom ensino da disciplina importantíssima que é o Cálculo.

Fontes de Financiamento

Agradecemos ao CEFET-MG pelo apoio ao financiar a pesquisa por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Júnior (PIBIC Jr).

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Orcid

Davidson Paulo Azevedo Oliveira  <https://orcid.org/0000-0003-2794-8515>

Érica Marlúcia Leite Pagani  <https://orcid.org/0000-0001-9025-3420>

Otávio Gabriel Alves Lara  <https://orcid.org/0009-0005-4744-0526>

Nina Leão Fonseca  <https://orcid.org/0009-0008-6916-3111>

Referências

1. D. O. Tall, *How humans learn to think mathematically: exploring the three worlds of mathematics*, New York, USA: Cambridge University Press, 2013.
2. C. C. Prodanov e E. C. Freitas, "Metodologia do trabalho científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico", Novo Hamburgo, RS, BR: Editora Feevale, 2013.
3. M. C. S. Silva, "Limites: uma breve passagem nos livros brasileiros no Ensino Secundário", *ACERVO - Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP*, vol. 05, pp. 1-23, 2023.
4. E. S. L. Zuin, Cálculo: uma abordagem histórica. In: LACHINI, J.; LAUDARES, J. B. (Orgs.). *A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo*. Belo Horizonte, FUMARC, 2001.

5. A. L. Grande, "Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino", Ph.D Dissertation (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2013.
6. B. Cornu, "Limits", in D. O. Tall (org.), *Advanced Mathematical Thinking*, Boston, USA: Kluwer Academic Publishers, 1991, pp. 53–166.
7. M. C. R. Frota, "Sintetizar idéias e atribuir sentido às fórmulas para aprender cálculo", XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - COBENGE, Anais, 2007a. [Online]. Available: <http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2007/artigos/83-Maria%20Clara%20Rezende%20Frota.pdf>.
8. L. Nasser, "Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos", in M. C. R. Frota e L. Nasser (orgs.), *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e debates*, SBEM, 2009, pp. 43-58.
9. A. Abdelmalack e N. S. G. Allevato, O ensino-aprendizagem-avaliação da derivada para o curso de engenharia através da resolução de problemas. 175 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.
10. M. C. R. Frota, "Teoria e Prática na Aprendizagem de Cálculo", *Bolema*, vol. 20, no. 28, pp. 21-38, 2007b. [Online]. Available: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221871003>.
11. M. I. Rossi, "A aprendizagem das aplicações das integrais indefinidas em equações diferenciadas através da resolução de problemas", M.S. thesis (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, Brasil, 2012.
12. E. M. L. Pagani, "O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de derivadas no curso técnico integrado ao médio através da resolução de problemas", Ph.D Dissertation (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, Brasil, 2016.
13. V. M. C. Pereira, "Cálculo no ensino médio: uma proposta para o problema da variabilidade", M.S. thesis (Mestrado em Ensino de Matemática), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2009.
14. E. P. Silva e G. Schubring, "Cálculo em matemática: um assunto para o ensino em geral ou específico para o ensino técnico", *Revista História da Educação*, vol. 20, no. 49, pp. 65-82, 2016.
15. W. M. Rezende, "O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica", Ph.D Dissertation (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2003.
16. D. O. Tall, "The Psychology of Advanced Mathematical Thinking", in D. O. Tall (org.), *Advanced Mathematical Thinking*, New York, USA: Cambridge University Press, 1995, pp. 3-20.
17. D. P. A. Oliveira, E. M. L. Pagani and A. C. Teixeira, "O ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas Prescrições Curriculares para o Ensino Médio Técnico no CEFET MG", XVI CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACION MATEMATICA, Actas, Lima, Peru, 2023, pp. 86-93.
18. A. H. Pinto e M. G. Soares, O movimento ENCONAM e o protagonismo dos professores de matemática das escolas tecnicas federais. In: KRUGER, A. (org). Relatos de experiências de Professores de Matemática. Vitória: Edifes, 2018.
19. A. R. B. Maciel e L. C. Sá, "Uma análise de materiais didáticos produzidos por professores de Matemática da Educação Profissional entre 1980 e 1996", *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, vol. 3, n. 4, pp. 114–133, 2020.[Online]. Available: <https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/12635>.
20. A. Stochiero e J. B. Laudares, *Matematica segunda serie, 2º grau*. Sem editora. 1973.

