

Aplicao da programaco geomtrica na gesto de qualidade da gua

Application of geometric programming on water quality management

Pedro Henrique Amorim Alves ^{a,*}, Rbia Mara de Oliveira Santos ^a

^a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul: Campo Grande/MS, Brasil

* Autor Correspondente: phamorim182@gmail.com

Resumo: A Programaco Geomtrica  uma tcnica usada para resolver problemas algbricos de otimizao no linear. Problemas de Programaco Geomtrica no so convexas em sua forma padro, mas admitem uma reformulao convexa equivalente a partir de uma mudana de variveis. Os algoritmos para resolver problemas geomtricos tm sido melhorados e atualmente so ferramentas poderosas para resolver problemas importantes na engenharia. O objetivo deste trabalho consiste em aplicar a Programaco Geomtrica a um modelo que possibilita avaliar a contribuo de tcnicas de reduo da poluio em sistemas de tratamento de gua, usando um mtodo computacional para encontrar soluos timas.

Palavras-chave: Programaco Geomtrica; Anlise Convexa; Otimizao No Linear; Qualidade da gua.

Abstract: Geometric programming is a technique used to solve nonlinear programming algebraic problems. Geometric programming problems do not present as convex in their standard form, but they can be reformulated to a convex form by applying a change of variables. Algorithms used to solve geometric problems have been improved and are powerful tools to solve important problems in engineering. The objective of this work is to apply geometric programming to a model that makes it possible to evaluate the contribution of pollution reduction techniques in water treatment stations using a computational method to find optimal solutions.

keywords: Geometric Programming; Convex Analysis; Nonlinear Programming; Water Quality.

1 Introduo

Modelos de otimizao tm sido amplamente utilizados em diferentes reas da Engenharia por conta da sua capacidade de facilitar a tomada de deciso em contextos complexos. Porm, muitos problemas de otimizao originrios de aplicaos industriais ou da pesquisa cientfica exibem no convexidades nas funoes envolvidas. Como consequncia, no  possvel assegurar timos globais nestes casos, uma vez que os mtodos tradicionais de otimizao fornecem apenas timos locais para problemas que possuem funoes no convexas. A Otimizao Global  a especializao da otimizao com foco em caracterizar e obter mnimos (ou mximos)

globais de problemas não lineares. Uma exposição detalhada sobre condições de otimalidade, métodos e aplicações da Otimização Global pode ser encontrada em [1].

A Programação Geométrica (PG) surgiu com o objetivo de solucionar problemas algébricos não lineares de otimização nos quais as funções envolvidas apresentam-se na forma posinomial. Um posinômio é uma soma de monômios com coeficientes positivos. Cada monômio é um produto de variáveis positivas, cada uma delas elevada a uma constante real, multiplicado por um coeficiente. Problemas de Programação Geométrica Generalizada, também conhecida como Programação Geométrica Signomial (PGS), são caracterizados por funções objetivos e restrições descritas como a diferença de dois posinômios. Os problemas signomiais contêm pelo menos um monômio com coeficiente negativo [1].

A Programação Geométrica tem se destacado como uma valiosa ferramenta para modelar situações do mundo real, encontrando aplicações em diversas áreas do conhecimento. Neste trabalho, mostramos a fundamentação teórica básica da Programação Geométrica e utilizamos ferramentas computacionais para resolver problemas geométricos. Em seguida, apresentamos uma aplicação da Programação Geométrica no controle de sistemas de tratamento de cursos hídricos por meio do modelo de McNamara [2], que avalia a qualidade da água e as técnicas de redução da poluição aplicadas.

O artigo está estruturado da seguinte forma¹: a Seção 2 apresenta os conceitos fundamentais da Programação Geométrica, incluindo a formulação matemática dos problemas posinomiais e signomiais. A Seção 3 aborda a Otimização Convexa e discute a importância da convexidade para a resolução eficiente de problemas. Na Seção 4, são apresentados exemplos computacionais clássicos, incluindo comparações de resultados com a literatura. A Seção 5 aplica a PG ao modelo de gestão de qualidade da água, detalhando o problema proposto, as restrições do sistema e os custos envolvidos. Por fim, a Seção 6 conclui o estudo, destacando as configurações mais eficientes para o sistema de tratamento e as implicações dos resultados obtidos.

2 Programação Geométrica Posinomial e Signomial

Problemas de Programação Geométrica (PG) apresentam a seguinte forma geral:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{s.a} & g_i(x) \leq 1, i = 1, 2, \dots, p, \\ & x_j > 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

A função $f(x)$ é chamada de função objetivo do problema, e as funções $g_i(x)$ são suas restrições. Na PG Posinomial, esses elementos do problema são posinômios e podem, portanto, ser reescritos como

$$f(x) = \sum_{k \in J_0} T_k = \sum_{k \in J_0} \alpha_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kj}}$$

$$g_i(x) = \sum_{k \in J_i} T_k = \sum_{k \in J_i} \alpha_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kj}}.$$

Cada função T_k é um monômio e um posinômio consiste em uma soma de monômios com coeficientes α_k reais positivos. As variáveis que compõem o problema constituem a n -upla de números reais $x = (x_1, \dots, x_n)$ e podem estar elevadas a uma constante real a_{kj} em cada termo. J_0 é o conjunto de índices dos monômios da função objetivo e J_i descreve os termos de cada restrição. Estes conjuntos são mutuamente disjuntos e $J_0 \cup J_1 \cup \dots \cup J_p = \{1, 2, \dots, P\}$, em que P é o número total de termos [1].

¹Partes deste trabalho foram apresentadas no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional em 2023 (XLII CNMAC) [12], no Integra UFMS 2023 (p. 414 nos anais do evento) e no Workshop de Verão 2024 do ICMC (n. 22, p. 24 do caderno de resumos).

O problema de Programação Geométrica Signomial (PGS) é caracterizado por uma função objetivo e/ou restrições que são diferenças de dois posinômios; o problema geométrico signomial contém um ou mais termos com coeficientes negativos, enquanto problemas posinomiais possuem apenas monômios com coeficientes positivos. Ao agrupar termos de mesmo sinal, as funções do PGS tornam-se diferenças entre dois posinômios $g_i(x)^+$ e $g_i(x)^-$ e podemos formulá-lo do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & g_0(x) = g_0(x)^+ - g_0(x)^- \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) = g_i(x)^+ - g_i(x)^- \leq 0, i = 1, 2, \dots, p, \\ & x_j^L \leq x_j \leq x_j^U, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

sendo

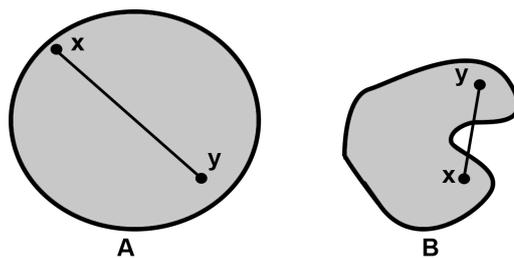
$$\begin{aligned} g_i(x)^+ &= \sum_{k \in J_i^+} \alpha_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{jki}} \\ g_i(x)^- &= \sum_{k \in J_i^-} \alpha_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{jki}}, i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

$g_i(x)^+$ e $g_i(x)^-$ são funções posinomiais em $x = (x_1, \dots, x_n)$; a_{jki} são constantes reais arbitrárias e α_k são constantes reais positivas. Os conjuntos J_i^+ e J_i^- indicam os monômios que formam os posinômios, separando os positivos e os negativos; x_j^L e x_j^U representam, respectivamente, um limitante inferior e um superior para as variáveis positivas.

3 Otimização Convexa

Um conjunto D é dito convexo quando $x, y \in D$ e $\alpha \in [0, 1]$ implica que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in D$. Em outras palavras, dados dois pontos quaisquer de um conjunto convexo, o segmento que os liga está inteiramente contido no conjunto. Na Figura 1, A é um conjunto convexo, enquanto B não é convexo.

Figura 1. Conjunto convexo e não convexo

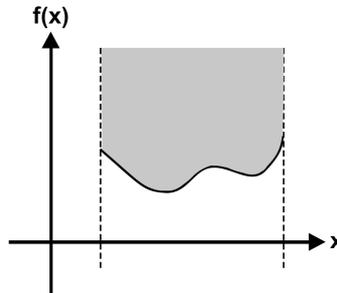


Fonte: Elaboração Própria

Esse conceito pode ser estendido para funções: uma função $f : D \rightarrow R$, sendo D conjunto convexo, é dita convexa quando, para quaisquer $x, y \in D$ e $\alpha \in [0, 1]$, temos que $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$. A convexidade de funções está diretamente associada à convexidade de conjuntos a partir do conceito de epígrafo, definido como $E_f = \{(x, c) \in D \times R | f(x) \leq c\}$. Geometricamente, o epígrafo de uma função é o conjunto de pontos localizados acima do gráfico de f no domínio D . A região sombreada na Figura 2 ilustra o epígrafo da função representada e as linhas pontilhadas representam os limites do domínio. A utilidade deste conceito reside no fato de que uma função é convexa se, e somente

se, seu epígrafo é um conjunto convexo [3]. Para um estudo detalhado das propriedades de conjuntos e funções convexas, veja [4] e [5].

Figura 2. Epígrafo de uma função



Fonte: Elaboração Própria

O estudo da convexidade é considerado importante para a otimização, pois suas propriedades frequentemente permitem resolver problemas eficientemente. Problemas convexas consistem em minimizar uma função convexa $f(x)$, sujeita a $x \in D$, em que D é um subconjunto convexo do R^n . Assim, a função objetivo e as restrições de desigualdades devem ser funções convexas. Além disso, as restrições dadas por igualdades devem ser funções afins, da forma $h_i = a_i^T x - b_i$ [6].

Em um problema convexo de otimização, todo minimizador local do problema é também global, o conjunto de minimizadores é convexo e se a função objetivo for estritamente convexa, então não pode haver mais de um minimizador. Esse fato está demonstrado em [3].

Exemplo 3.1. A função posinomial $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^{1/2}$ não é convexa.

De fato,

$$\begin{aligned} f((1 - \alpha)x + \alpha y) &\leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \\ \iff ((1 - \alpha)x + \alpha y)^{1/2} &\leq (1 - \alpha)x^{1/2} + \alpha y^{1/2} \end{aligned}$$

Tome $\alpha = 1/2$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+y}{2}} &\leq \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{2} \\ \frac{x+y}{2} &\leq \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{xy}}{2} + \frac{y}{4} \\ 2x + 2y &\leq x + 2\sqrt{xy} + y \\ x - 2\sqrt{xy} + y &\leq 0 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\leq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para qualquer caso em que $x \neq y$, com $x, y \geq 0$, a Inequação (3.1) não é válida, portanto o posinômio $f(x) = x^{1/2}$ não é uma função convexa.

De acordo com Oliveira [1], todo Problema Geométrico Posinomial admite uma reformulação convexa. Podemos observar esse fato aplicando a mudança de variável $y_j = \ln(x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, em um monômio $T_k = \alpha_k \prod_{j=1}^n x_j^{a_{kj}}$. Considerando que $x_j = \exp(y_j)$, obtemos

$$\tau_k = \alpha_k \prod_{j=1}^n \exp(y_j)^{a_{kj}} = \alpha_k \exp\left(a_k^T y\right)$$

Com isso, podemos formular o seguinte problema, denominado Problema Geométrico Equivalente (PGE):

$$\begin{aligned} \text{PGE: } & \text{minimizar } \ln [F(y)] \\ & \text{s.a } \ln [G_i(y)] \leq 1, i = 1, 2, \dots, p, \\ & y \in \mathbb{R}^n \\ F(y) & := \sum_{k \in J_0} \tau_k \\ G_i(y) & := \sum_{k \in J_i} \tau_k, i = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

Repare que se trata de um problema de minimização convexa, pois sua função objetivo e suas restrições são todas funções convexas. De fato, definimos

$$f_1(y) = \ln \left[\sum_{k \in J_0} \alpha_k \exp(a_k^T y) \right] \quad (3.2)$$

e dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in [0, 1]$, temos que:

$$f_1(\beta x + (1 - \beta)y) = \ln \left[\sum_{k \in J_0} \alpha_k \exp(a_k^T [\beta x + (1 - \beta)y]) \right]$$

Podemos tomar $u_k = \exp(a_k^T x)$ e $v_k = \exp(a_k^T y)$ e reescrever a equação 3.2 como

$$f_1(\beta x + (1 - \beta)y) = \ln \left[\sum_{k \in J} \alpha_k u_k^\beta v_k^{1-\beta} \right]$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder [7],

$$\begin{aligned} \ln \left[\sum_{k \in J} \alpha_k u_k^\beta v_k^{1-\beta} \right] & \leq \ln \left[\left(\sum_{k \in J} (\alpha_k u_k)^{\beta \cdot \frac{1}{\beta}} \right)^\beta \cdot \left(\sum_{k \in J} (\alpha_k v_k)^{1-\beta \cdot \frac{1}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \right] \\ & = \beta \ln \left[\sum_{k \in J} \alpha_k u_k \right] + (1 - \beta) \ln \left[\sum_{k \in J} \alpha_k v_k \right] \\ & = \beta \ln \left[\sum_{k \in J} \alpha_k \exp(a_k^T x) \right] + (1 - \beta) \ln \left[\sum_{k \in J} \alpha_k \exp(a_k^T y) \right] \\ & = \beta f_1(x) + (1 - \beta) f_1(y) \end{aligned}$$

Portanto, $f_1(\beta x + (1 - \beta)y) \leq \beta f_1(x) + (1 - \beta) f_1(y)$, o que prova que as funções com a forma (3.2) são convexas, permitindo a conclusão de que o PGE é um problema de otimização convexo.

4 Resultados Computacionais

Nesta seção, apresentamos alguns problemas clássicos da literatura de Programação Geométrica Signomial (PGS). Os Problemas 4.1 a 4.5 estão descritos em [8].

Problema 4.1

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -x_1 + 0,4x_1^{0,67}x_3^{-0,67} \\ \text{s.a} \quad & 0,05882x_3x_4 + 0,1x_1 \leq 1, \\ & 4x_2x_4^{-1} + 2x_2^{-0,71}x_4^{-1} + 0,05882x_2^{-1,3}x_3 \leq 1 \end{aligned}$$

Problema 4.2

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -x_1 - x_5 + 0,4x_1^{0,67}x_3^{-0,67} + 0,4x_5^{0,67}x_7^{-0,67} \\ \text{s.a} \quad & 0,05882x_3x_4 + 0,1x_1 \leq 1, \\ & 0,05882x_7x_8 + 0,1x_1 + 0,1x_5 \leq 1, \\ & 4x_2x_4^{-1} + 2x_2^{-0,71}x_4^{-1} + 0,05882x_2^{-1,3}x_3 \leq 1, \\ & 4x_6x_8^{-1} + 2x_6^{-0,71}x_8^{-1} + 0,05882x_6^{-1,3}x_7 \leq 1 \end{aligned}$$

Problema 4.3

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_6 + 0,4x_4^{0,67} + 0,4x_9^{0,67} \\ \text{s.a} \quad & x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_4^{-1}x_5^{-1} + 5x_1^{-1}x_2^{-1}x_3x_5^{-1} \leq 1, \\ & 0,05x_3 + 0,005x_2 \leq 1, \\ & 10x_3^{-1} - x_1x_3^{-1} \leq 1, \\ & x_6^{-1}x_7^{-1,5}x_8x_9^{-1} + 5x_6^{-1}x_7^{-1}x_8x_{10}^{1,2} \leq 1, \\ & x_2^{-1}x_7 + x_2^{-1}x_8 \leq 1, \\ & x_1x_8^{-1} - x_6x_8^{-1} \leq 1, \\ & x_{10} \leq 1 \end{aligned}$$

Problema 4.4

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 0,05x_1 + 0,05x_2 + 0,05x_3 + x_9 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_9x_{10}^{-1} + 0,25x_{10}^{-1} \leq 1, \\ & x_7^{-1}x_{10} - 0,5x_1x_4x_7^{-1} \leq 1, \\ & x_7x_8^{-1} - 0,5x_2x_5x_8^{-1} \leq 1, \\ & x_8x_9^{-1} - 0,5x_3x_6x_9^{-1} \leq 1, \\ & 0,700329x_4x_7^{-1} + 0,307795x_7 \leq 1, \\ & 0,700329x_5x_8^{-1} + 0,307795x_8 \leq 1, \\ & 0,79681x_6x_9^{-1} + 0,307795x_9 \leq 1. \end{aligned}$$

Problema 4.5

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & 5,3578x_3^2 + 0,8357x_1x_5 + 37,2392x_1 \\ \text{s.a} \quad & 0,00002584x_3x_5 - 0,00006663x_2x_5 - 0,0000734x_1x_4 \leq 1, \\ & 0,00853007x_2x_5 + 0,00009395x_1x_4 - 0,00033085x_3x_5 \leq 1, \\ & 1330,3294x_2^{-1}x_5^{-1} - 0,42x_1x_5^{-1} - 0,30586x_2^{-1}x_3^2x_5^{-1} \leq 1, \\ & 0,00024186x_2x_5 + 0,00010159x_1x_2 + 0,00007379x_3^2 \leq 1 \\ & 2275,1327x_3^{-1}x_5^{-1} - 0,2668x_1x_5^{-1} - 0,40583x_4x_5^{-1} \leq 1, \\ & 0,00029955x_3x_5 + 0,00007992x_1x_3 + 0,00012157x_3x_4 \leq 1, \\ & 78 \leq x_1 \leq 102, \\ & 33 \leq x_2 \leq 45, \\ & 27 \leq x_3 \leq 45, \\ & 27 \leq x_4 \leq 45, \\ & 27 \leq x_5 \leq 45. \end{aligned}$$

Usando a técnica proposta em [9], foram encontradas as soluções ótimas dos respectivos problemas, disponíveis na Tabela em comparação com os resultados originais. O código foi implementado na linguagem Fortran e permite resolver problemas de Programação Geométrica eficientemente. Usando a técnica proposta em [9], foram encontradas as soluções ótimas dos respectivos problemas, disponíveis na Tabela 1 em comparação com os resultados originais. O código foi implementado na linguagem Fortran e permite resolver problemas de Programação Geométrica eficientemente.

Tabela 1. Soluções dos problemas 4.1 a 4.5

Problema	Variável	Resultado Obtido	Rijckaert e Martens (1978)
4.1	$f(x)$	-5,7437	-5,7398
	x_1	8,1328	8,1301
	x_2	0,6100	0,6154
	x_3	0,5646	0,5640
	x_4	5,6218	0,56362
4.2	$f(x)$	-6,0482	-6,0482
	x_1	6,4627	6,4650
	x_2	0,6675	0,6674
	x_3	1,0136	1,0130
	x_4	5,9331	5,9327
	x_5	2,2347	2,2326
	x_6	0,5958	0,5958
	x_7	0,4006	0,4006
	x_8	5,5273	5,5273
4.3	$f(x)$	0,4196	1,1436
	x_1	1,3931	2,0953
	x_2	18,6069	12,0953
	x_3	8,6069	7,9047
	x_4	0,4153	0,4594
	x_5	0,3398	0,3579
	x_6	0,2532	0,4548
	x_7	17,4669	10,4548
	x_8	1,1399	1,6405
	x_9	0,2695	1,975
	x_{10}	0,4196	0,1000
4.4	$f(x)$	0,2007	0,1966
	x_1	0,8076	0,7295
	x_2	0,7890	0,7133
	x_3	0,5772	0,7030
	x_4	0,2578	0,2653
	x_5	0,1709	0,1821
	x_6	0,1123	0,1241
	x_7	0,1918	0,1979
	x_8	0,1244	0,1329
	x_9	0,0920	0,0893
	x_{10}	0,2960	0,2947
4.5	$f(x)$	10122,4931	10127,13
	x_1	78	78
	x_2	33	33
	x_3	29,9957	29,998
	x_4	45	45
	x_5	36,7753	36,7673

Fonte: Elaboração própria

5 Gestão de Qualidade da Água

É fundamental que a gestão dos recursos ambientais seja realizada de modo eficiente. Afinal, ela se relaciona com demandas imprescindíveis à população, como o acesso à água, alimentação e qualidade do ar. São empregados recursos públicos ligados a esse tema, o que torna necessário otimizar os processos para garantir que os investimentos tragam o resultado esperado. Em 1962, Lynn, Logan e Charnes criaram um modelo de Programação Linear analisando o design de estações de tratamento de esgoto [10]. Desde então, surgiram novos modelos, que se baseiam em planejar operações de modo a minimizar os custos, considerando as restrições impostas por padrões de qualidade ou que permitem descrever os impactos de diferentes medidas adotadas. O uso da Programação Linear e da Programação Dinâmica foram úteis na obtenção de soluções para esse tipo de problema. Todavia, esses métodos de otimização impõem restrições nas técnicas de redução de poluição que podem ser consideradas em um dado modelo [2].

McNamara [2] desenvolve um modelo de gestão de qualidade da água capaz de avaliar as contribuições de uma variedade de técnicas de redução de poluição e ilustra sua aplicação com o caso do Rio Hudson, em Nova York (EUA). A função objetivo representa o custo anual do sistema de tratamento de água avaliado, permitindo comparar a eficiência de diferentes configurações desse sistema. O modelo é composto por restrições ligadas tanto a limitações práticas aos valores das variáveis consideradas quanto a padrões estabelecidos para a qualidade da água.

O rio é dividido em n partes e m processos de tratamento podem ser usados. Foram consideradas as variáveis x_{ij} , que representam a fração de carga de resíduo restante no trecho i após o término do processo de tratamento j . A fração de carga restante após uma série de m processos é o produto $x_{i1}x_{i2} \dots x_{im}$. A variável z indica em quantas vezes deve ser aumentado o fluxo do rio de modo a minimizar a função objetivo.

A fim de garantir que o curso d'água seja mantido em boas condições, é necessário que seja definido um parâmetro para avaliar sua qualidade. Nesse caso, usamos a concentração de oxigênio dissolvido na água. Um conceito relacionado é o de Demanda Bioquímica de Oxigênio (DBO), que determina indiretamente a concentração de matéria orgânica biodegradável a partir da demanda de oxigênio exercida por microrganismos através da respiração [11].

É possível descrever os efeitos das técnicas de redução da poluição nas concentrações de DBO com a equação (5.1):

$$L_i = \frac{E_i F_i x_{i1} \dots x_{im} + L_{i-1} V_{i-1} e^{-kt}}{V_i} \quad (5.1)$$

onde L_i é a concentração de DBO (mg/l) no início do trecho i do rio; E_i é a concentração de DBO (mg/l) da descarga de resíduos liberada no local i , F_i o fluxo dessa descarga (mgd) e V_i o volume de fluxo (mgd) do rio após a descarga; k é o coeficiente de desoxigenação na parte i ; t é o tempo (dias) de viagem da água pelo local i ; e é o número de Euler (base do logaritmo natural). É importante notar a natureza recursiva dessa definição: necessita-se de L_{i-1} para calcular L_i . Por isso, serão necessários dados físicos iniciais sobre o rio para modelá-lo. O fluxo inicial V_0 do rio pode ser aumentado por um múltiplo z através de mudanças na estrutura do rio, como a construção ou modificação de reservas. Considerando este fator e sendo V o fluxo médio do rio na região de interesse, podemos obter a seguinte aproximação:

$$L_i = \frac{E_i F_i x_{i1} \dots x_{im} + L_{i-1} (Vz) e^{-kt}}{Vz} \quad (5.2)$$

É possível construir restrições para o sistema fixando um valor máximo de DBO permitida \bar{L}_i e desenvolvendo a inequação $L_i \leq \bar{L}_i$. No entanto, é mais comum o uso do déficit de oxigênio como parâmetro, o qual pode ser avaliado pela equação (5.3), chamada de Equação de Streeter-Phelps (McNamara, 1976).

$$D_{i+1} = \frac{k}{r-k} L_i (e^{-kt} - e^{-rt}) + D_i e^{-rt} \quad (5.3)$$

D_i é o déficit de oxigênio no início da parte i do rio (ou no fim da parte $i-1$) e r é o coeficiente de reaeração considerado. Sendo \bar{D}_i o déficit máximo permitido, espera-se que:

$$D_i \leq \bar{D}_i, i = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Assim, obtemos restrições de desigualdade aplicando (5.2) em (5.3) e usando o resultado na inequação (5.4). Tais restrições possuem uma forma compatível com problemas de Programação Geométrica. É possível considerar outros fatores, como o uso da aeração artificial, o impacto da fotossíntese e outros requisitos técnicos do sistema. Os custos dos processos de tratamento feitos são dados por:

$$C_{ij} = c_{ij} x_{ij}^{b_{ij}}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

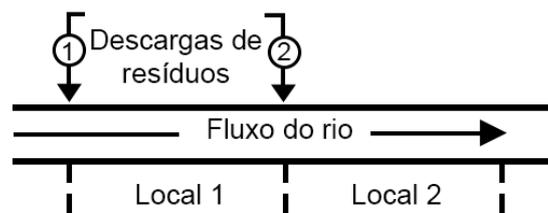
em que $c_{ij} > 0$, $b_{ij} < 0$ são constantes conhecidas. Observe que se $x_{ij} = 1$ (100% dos resíduos foram tratados), então $C_{ij} = c_{ij}$, logo c_{ij} é o custo fixo do processo; $b_{ij} = \frac{\ln(C_{ij}) - \ln(c_{ij})}{x_{ij}}$, o que significa que se tivermos dados sobre o custo de um tratamento em um dos locais, removendo uma determinada fração de resíduo da água, conseguimos obter o expoente b_{ij} e descrever o custo para a remoção de uma fração de resíduo arbitrária. Já o custo do aumento de fluxo do rio é dado por

$$C_r = c_r z^{b_r}$$

tal que c_r e b_r são constantes positivas conhecidas. De modo análogo ao c_{ij} , temos que c_r é o custo fixo gasto com a regulação de fluxo com o propósito de manutenção da qualidade da água, enquanto b_r pode ser encontrado a partir de dados sobre o custo para um valor específico do aumento de fluxo (z).

Foi considerado um rio que recebe descargas de resíduos em dois pontos e foi, então, dividido em duas partes ($n = 2$). Nele, é feito o tratamento primário da água em ambas as partes e deseja-se avaliar o uso do tratamento secundário, assim haveriam dois processos de tratamento ($m = 2$). Tais informações estão ilustradas na Figura 3, e a Tabela 2 mostra as relações de custo em cada parte do sistema.

Figura 3. Rio analisado na aplicação



Fonte: Elaboração Própria

Tabela 2. Custos anuais totais (em milhares de dólares)

Local	Tratamento Primário	Tratamento Secundário
1	$200x_{11}^{-0,36}$	$270x_{12}^{-0,21}$
2	$180x_{21}^{-0,32}$	$215x_{22}^{-0,19}$

Fonte: [2, p. 130]

A partir disso, a função objetivo (5.5) foi obtida pela soma dos custos mostrados na tabela com o custo da regulação de fluxo, que é igual a $30z^{2,2}$.

$$C = 30z^{2,2} + 200x_{11}^{-0,36} + 270x_{12}^{-0,21} + 180x_{21}^{-0,32} + 215x_{22}^{-0,19} \quad (5.5)$$

Para encontrar as restrições referentes a este problema são dadas algumas informações sobre o rio, descritas a seguir na Tabela 3.

Tabela 3. Dados físicos do rio

Descrição	Dado
Déficit de oxigênio	$D_1 = 2,5mg/l$
Déficits de oxigênio máximos	$\bar{D}_2 = 2,5mg/l, \bar{D}_3 = 2,5mg/l$
Concentração de DBO nas descargas de resíduos	$E_1 = 500mg/l, E_2 = 620mg/l$
Fluxo das descargas de resíduos	$F_1 = 30mgd, F_2 = 25mgd$
Tempos de viagem da água	$t_1 = 2 \text{ dias}, t_2 = 1,5 \text{ dias}$
Coefficientes de reaeração	$k_1 = 0,11, k_2 = 0,12$
Fluxo inicial do rio	$V_0 = 700mgd$
Concentração de DBO	$L_0 = 3,75mg/l$

Fonte: [2, p. 130]

Para cada trecho do rio, é possível encontrar uma restrição a partir do déficit de oxigênio, considerando que ele não pode exceder o valor limite estabelecido. Como nesta situação o rio foi dividido em duas partes, devemos avaliar D_2 e D_3 , que indicam os déficits de oxigênio ao fim dos trechos 1 e 2, para então aplicar os valores na Inequação (5.4). Usando a Equação (5.3):

$$D_2 = \left(\frac{0,11}{0,18 - 0,11} \right) L_1 \left(e^{-0,11(2)} - e^{-0,18(2)} \right) + D_1 e^{-0,18(2)}$$

D_1 é dado pela tabela 2 e, da equação (5.2), temos

$$L_1 = \frac{500(30)x_{11}x_{12} + 700z(3,75)e^{-0,1(2,2)}}{700z}$$

Logo

$$D_2 = 3,53x_{11}x_{12}z^{-1} + 2,238 \leq 2,5 = \bar{D}_2 \quad (5.6)$$

Em seguida, podemos reescrever a expressão (5.6) como uma desigualdade da forma $g(x) \leq 1$, de modo que $g(x)$ seja posinomial. Assim, obtemos

$$13,47x_{11}x_{12}z^{-1} \leq 1 \quad (5.7)$$

Analogamente,

$$D_3 = \left(\frac{0,12}{0,2 - 0,12} \right) L_2 \left(e^{-0,12(1,5)} - e^{-0,2(1,5)} \right) + D_2 e^{-0,18(2)} \quad (5.8)$$

Calculando o valor de L_2 e aplicando o resultado em (5.8) para calcular D_3 , podemos usar a inequação (5.4) para obter

$$10,1x_{11}x_{12}z^{-1} + 6,26x_{21}x_{22}z^{-1} \leq 1 \quad (5.9)$$

Entretanto, as variáveis também precisam seguir requisitos que satisfaçam as limitações técnicas do projeto. Nesse caso, McNamara (1976), define que o processo de tratamento primário ($j = 1$) consegue remover até 40% dos resíduos, sobrando pelo menos 60%. Essa informação foi usada para obter as restrições (5.10) e (5.11):

$$0,6x_{11}^{-1} \leq 1 \quad (5.10)$$

$$0,6x_{21}^{-1} \leq 1 \quad (5.11)$$

Desse modo, o problema de Programação Geométrica Posinomial 5.1 resume-se a minimizar a expressão (5.5), sujeito às inequações (5.7), (5.9), (5.10) e (5.11).

Problema 5.1

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & C = 30z^{2,2} + 200x_{11}^{-0,36} + 270x_{12}^{-0,21} + 180x_{21}^{-0,32} + 215x_{22}^{-0,19} \\ \text{s.a} \quad & 13,47x_{11}x_{12}z^{-1} \leq 1, \\ & 10,1x_{11}x_{12}z^{-1} + 6,26x_{21}x_{22}z^{-1} \leq 1, \\ & 0,6x_{11}^{-1} \leq 1, \\ & 0,6x_{21}^{-1} \leq 1. \end{aligned}$$

A solução do Problema 5.1 está descrita na Tabela 4, que exhibe os resultados obtidos por McNamara [2] e os que obtemos através do método descrito em [9]. O custo anual do sistema é descrito pela função objetivo (5.5). Aplicando as soluções de [2], temos que o custo ótimo para o sistema de tratamento é de 1.231.096 dólares, enquanto o resultado que obtemos nos dá um custo igual a 1.231.227 dólares.

Tabela 4. Valores ótimos Problema 5.1

Variável	Resultado (McNamara, 1976)	Resultado obtido
z	1,44	1,441
x_{11}	0,605	0,6086
x_{12}	0,135	0,1369
x_{21}	0,828	0,8188
x_{22}	0,119	0,1171

Fonte: Elaboração própria

Podemos considerar outras configurações do sistema de tratamento, a fim de compará-las e descobrir qual é mais eficiente. Se temos interesse no estudo do problema sem que o processo de tratamento j seja realizado no local i , podemos considerar que 100% dos resíduos não são tratados ao passar por esse processo, logo $x_{ij} = 1$. Então, a partir do Problema 1, podemos formular outros problemas de modo que o uso dos processos de tratamento seja alocado de modo distinto.

O Problema 5.2 refere-se à situação em que no local 1 são realizados os tratamentos primário e secundário, enquanto no segundo trecho é feito apenas o primário, sendo formulado considerando que $x_{22} = 1$. O problema 5.3 pressupõe o uso exclusivo do tratamento primário no primeiro local e somente o secundário no segundo local. Já o Problema 5.4 representa o caso em que apenas o tratamento primário é feito em ambos os locais. A Tabela 5 descreve as soluções obtidas em cada caso.

Problema 5.2

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & C = 30z^{2,2} + 200x_{11}^{-0,36} + 270x_{12}^{-0,21} + 180x_{21}^{-0,32} + 215 \\ \text{s.a} \quad & 13,47x_{11}x_{12}z^{-1} \leq 1, \\ & 10,1x_{11}x_{12}z^{-1} + 6,26x_{21}z^{-1} \leq 1, \\ & 0,6x_{11}^{-1} \leq 1, \\ & 0,6x_{21}^{-1} \leq 1. \end{aligned}$$

Problema 5.3

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & C = 30z^{2,2} + 200x_{11}^{-0,36} + 215x_{22}^{-0,19} + 450 \\ \text{s.a} \quad & 13,47x_{11}z^{-1} \leq 1, \\ & 10,1x_{11}z^{-1} + 6,26x_{22}z^{-1} \leq 1, \\ & 0,6x_{11}^{-1} \leq 1. \end{aligned}$$

Problema 5.4

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & C = 30z^{2,2} + 200x_{11}^{-0,36} + 180x_{21}^{-0,32} + 485 \\ \text{s.a} \quad & 13,47x_{11}z^{-1} \leq 1, \\ & 10,1x_{11}z^{-1} + 6,26x_{21}z^{-1} \leq 1, \\ & 0,6x_{11}^{-1} \leq 1, \\ & 0,6x_{21}^{-1} \leq 1. \end{aligned}$$

Tabela 5. Valores ótimos obtidos para os Problemas 5.1 a 5.4

Variável	5.1	5.2	5.3	5.4
z	1,441	4,056	8,082	9,816
x_{11}	0,6086	0,600	0,600	0,600
x_{12}	0,1369	0,049	1	1
x_{21}	0,8188	0,600	1	0,600
x_{22}	0,1171	1	0,323	1

Fonte: Elaboração própria

Tabela 6. Custos dos sistemas considerados (dólares por ano)

Problema	5.1	5.2	5.3	5.4
Custo	1.231.227	1.827.938	3.933.077	5.501.675

Fonte: Elaboração própria

A Tabela 6 exhibe os custos dos sistemas associados a cada um dos problemas. Podemos notar que os Problemas 5.3 e 5.4 consideraram a utilização de menos métodos de tratamento, porém tiveram custos extremamente elevados. O resultado pode ser explicado pelo fato de que foi necessário um aumento expressivo do fluxo médio do rio para que a qualidade da água se

mantivesse no patamar desejado (observe a variável z). Analisando separadamente a regulação de fluxo, observamos que há, no Problema 5.2, um custo de 653.035 dólares com esta finalidade, enquanto no Problema 5.3 esse custo é de 2.976.204 dólares.

No entanto, o fenômeno descrito ocorreu apenas porque os únicos métodos de controle da concentração de oxigênio considerados foram o tratamento primário, o secundário e o ajuste no fluxo. Assim, foi levantada a hipótese de que se houvesse maior capacidade de tratamento nos processos, não haveria necessidade de elevar tão expressivamente o fluxo do rio e o custo cairia. Para verificar a ideia, reelaboramos os Problemas 5.3 e 5.4 considerando que o tratamento primário consiga remover até 80% dos resíduos, ao invés de apenas 40%.

Problema 5.3A

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & C = 30z^{2,2} + 200x_{11}^{-0,36} + 215x_{22}^{-0,19} + 450 \\ \text{s.a} \quad & 13,47x_{11}z^{-1} \leq 1, \\ & 10,1x_{11}z^{-1} + 6,26x_{22}z^{-1} \leq 1, \\ & 0,2x_{11}^{-1} \leq 1. \end{aligned}$$

Problema 5.4A

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & C = 30z^{2,2} + 200x_{11}^{-0,36} + 180x_{21}^{-0,32} + 485 \\ \text{s.a} \quad & 13,47x_{11}z^{-1} \leq 1, \\ & 10,1x_{11}z^{-1} + 6,26x_{21}z^{-1} \leq 1, \\ & 0,2x_{11}^{-1} \leq 1, \\ & 0,2x_{21}^{-1} \leq 1. \end{aligned}$$

A Tabela 7 exhibe as soluções encontradas para os Problemas 5.3A e 5.4A, com os respectivos custos.

Tabela 7. Valores ótimos e custos (anuais) obtidos para os Problemas 5.3A e 5.4A

Problema	z	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	Custo
5.3A	2,694	0,200	1	1	0,107	950.804
5.4A	3,272	0,200	1	0,200	1	1.065.362

Fonte: Elaboração própria

6 Conclusão

A Programação Geométrica demonstrou-se eficiente na resolução de problemas clássicos. A técnica [9] testada encontrou todas as soluções para os problemas geométricos propostos, aproximando-se dos resultados encontrados na literatura.

Em particular, o problema de gestão de qualidade da água pode ser modelado na forma padrão dos problemas geométricos [2]. A partir disso, aplicamos a técnica [9] para avaliar os custos e valores ótimos do sistema e realizar a comparação de diferentes casos da situação apresentada, abordagem não contemplada no trabalho de McNamara [2]. Assim, foi possível identificar melhorias e encontrar a configuração ideal para sistema de tratamento, minimizando os custos e mantendo a água com a qualidade desejada. Na situação avaliada, concluímos que a opção mais eficiente consiste em utilizar o tratamento primário e secundário em ambos os locais. Porém, se for possível considerar o uso de outras técnicas de controle de qualidade mais eficientes, podemos encontrar soluções com menor custo.

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq e ao INCTMat pelo apoio financeiro durante a realização do trabalho e, por fim, à UFMS pela oportunidade de trilhar o caminho da pesquisa científica.

Orcid

Pedro Henrique Amorim Alves  <https://orcid.org/0009-0004-9120-1736>

Rúbia Mara de Oliveira Santos  <https://orcid.org/0000-0003-4765-6536>

Referências

1. OLIVEIRA, R. M. “Algoritmos de busca global para problemas de otimização geométricos e multiplicativos”. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 2005. <https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2005.360663>
2. MCNAMARA, J. R. “An optimization model for regional water quality management”. *Water Resources Research*, v. 12, n.2, p. 125-134, 1976. DOI: <https://doi.org/10.1029/WR012i002p00125>.
3. IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. *Otimização - volume 1: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
4. GARCIA, R. F. “Funções convexas no \mathbb{R}^2 e introdução à otimização biobjetivo”. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande, MS, 2019. Disponível em: <https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/7037>.
5. LIMA, E. L. *Análise real*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. v. 2.
6. BOYD, S.; VANDERBERGHE, L. *Convex optimization*. 1. ed. Nova York: Cambridge University Press, 2004. Disponível em: <https://web.stanford.edu/boyd/cvxbook/>.
7. BECKENBACH, E. F.; BELLMAN, R. *Inequalities*. 1. ed. Berlim: Springer, 1961.
8. RIJCKAERT, M. J.; MARTENS, X. M. “Comparison of generalized geometric programming algorithms”. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 26, p. 205-242, 1978. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00933404>.
9. NASCIMENTO, R. Q.; OLIVEIRA SANTOS, R. M.; MACULAN, N. “A global interior point method for nonconvex geometric programming”. *Optimization and Engineering*, p. 1-31, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11081-023-09815-x>.
10. GREENBERG, Harvey J. “Mathematical programming models for environmental quality control”. *Operations Research*, v. 43, n. 4, p. 578-622, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.43.4.578>.
11. VALENTE, J. P. S.; PADILHA, P. M.; SILVA, A. M. M. “Oxigênio dissolvido (OD), demanda bioquímica de oxigênio (DBO) e demanda química de oxigênio (DQO) como parâmetros de poluição no ribeirão Lavapés/Botucatu-SP”. *Eclética Química*, v. 22, p. 39-66, 1997. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0100-46701997000100005>.
12. ALVES, Pedro H. A.; SANTOS, Rúbia M. O. “Programação Geométrica na Gestão de Qualidade da Água”. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 10, n. 1, 2023.