INTERMATHS, VOL. 5, NO. 2 (2024), **106–116** Artigos Gerais
https://doi.org/10.22481/intermaths.v5i2.15436

Notas sobre os Quadrados Mágicos Generalizados de Ordem 4×4

Notes on the Generalized Magic Squares of Order 4×4

Judith de Paula Araújo [a,*], **Caroline Rodrigues Loiola** [a], **Mariana Petermann Martins** [a]

[a] Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais: Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil

* Autor Correspondente: judith.araujo@ifsudestemg.edu.br

Resumo: Problemas envolvendo quadrados mágicos de ordem par desafiam a lógica matemática há séculos, alguns problemas ainda permanecem em aberto. Neste artigo, os quadrados mágicos generalizados de ordem 4×4 serão objeto de estudo. Considerando que a soma dos elementos de qualquer linha, coluna ou diagonal do quadrado devem ser iguais, apresentaremos detalhadamente como obter todas as possíveis 24 equações relacionando tais elementos entre si. Para obtermos as soluções do quadrado mágico, utilizaremos ferramentas básicas da Álgebra Linear. Serão consideradas não apenas as soluções envolvendo números naturais, mas também todas as soluções reais e complexas.

Palavras-chave: Constante mágica; Quadrados mágicos de ordem par; Matrizes; Álgebra Linear; Soluções Complexas.

Abstract: Problems involving even-order magic squares have challenged mathematical logic for centuries, and some problems still remain open. In this article, generalized magic squares of order 4×4 will be the object of study. Considering that the sum of the elements of any row, column or diagonal of the square must be equal, we will present in detail how to obtain all 24 possible equations relating such elements to each other. To obtain the solutions of the magic square, we will use basic tools from Linear Algebra. Not only solutions involving natural numbers will be considered, but also all real and complex solutions.

keywords: Magic constant; Even-order magic squares; Matrix; Linear Algebra; Complex solutions.

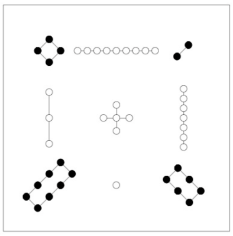
1 Introdução

Um quadrado mágico é uma tabela composta por n linhas e n colunas, sendo n um número natural. Os quadrados mágicos possuem características matemáticas particulares que fascinam pesquisadores no mundo todo há séculos. A mais antiga referência que se tem registro data de 2200 a.C. na China, onde o primeiro quadrado mágico, conhecido como lo-shu, foi visto pelo imperador Yu decorando o casco de uma tartaruga às margens do rio Amarelo [1]. A gravura no casco da tartaruga foi posteriormente expresso como um arranjo quadrado de numerais expressos por nós em cordas, sendo os nós pretos prepresentando os números pares, e os nós

Submetido em: 15 de Outubro de 2024 Aprovado em: 26 de Dezembro de 2024 Publicado em: 31 de Dezembro de 2024
ISSN 2675-8318

brancos os números ímpares. Em seguida, esse arranjo de numerais passou a ser escrito como um quadrado 3×3, como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1. Diagrama correspondente à gravura lo-shu e o respectivo quadrado mágico [1].



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Esse diagrama ficou conhecido como o primeiro quadrado mágico de ordem 3, após serem observadas certos padrões matemáticos notáveis desse arranjo, onde a soma de qualquer linha, coluna ou diagonal sempre resultava em 15. Impressionado como as propriedades matemáticas do quadrado, o imperador Yu passou a acreditar que a gravura avistada no casco da tartaruga possuía poderes realemente mágicos. Na China, os quadrados mágicos chegaram a ser utilizados em práticas culturais e rituais, refletindo crenças antigas de ordem cósmica [2].

Cerca de 1000-1100 d.C., foi encontrada em uma inscrição em Khajuraho, na Índia, o primeiro quadrado mágico de ordem 4×4. Desde então, os quadrados mágicos têm sido uma fonte de fascínio tanto na matemática quanto na cultura, e as teorias envolvendo tais objetos se espalharam da Índia para países árabes, Europa e Japão [3].

Um dos exemplos mais notáveis é o quadrado mágico presente na gravura Melancolia I (1514) de Albrecht Dürer [4, 5]. Dürer integrou simbolismo, matemática e filosofia nesta obra renascentista, incluindo um quadrado mágico de ordem 4, onde a soma dos números em qualquer linha, coluna ou diagonal é 34. A obra buscava refletir o desejo de harmonia e ordem através da arte [6].

Durante o século XVII, o estudo dos quadrados mágicos ganhou ainda mais importância. Antoine de la Loubere, um aristocrata francês, explorou a teoria matemática da construção de quadrados mágicos, e Adamas Kochansky expandiu o conceito para três dimensões em 1686, analisando também os cubos mágicos. Assim, os quadrados mágicos foram se tornando objetos de intensa investigação matemática, deixando de ser apenas figuras místicas [7].

Atualmente, os quadrados mágicos estão presentes em aplicações das mais diversas áreas. Além da matemática e das artes, temos estes diagramas presentes na computação, na física e nas engenharias. Na matemática, eles são utilizados para ilustrar permutações em problemas complexos [7]. Na física, quadrados mágicos são usados para estudar simetrias e conservação de energia. Na engenharia, eles são usados para modelar sistemas quânticos e resolver problemas de otimização, tais como em algoritmos de telecomunicações [8]. Na computação, quadrados mágicos ajudam a gerar números aleatórios e a criptografar dados. A estrutura previsível desses quadrados é útil para criar sequências de números específicas, usadas em segurança de dados e simulações [9].

Os quadrados mágicos são muito populares também em jogos e quebra-cabeças, como o Sudoku. Tais jogos são conhecidos por auxiliar no desenvolvimento do pensamento lógico e das habilidades para resolver problemas, tornando o aprendizado divertido e desafiador [10].

Neste artigo trataremos dos quadrados mágicos generalizados de ordem 4×4, isto é, os números que compõem o quadrado, podem assumir qualquer valor real. Na seção 2 demonstramos como os elementos do quadrado mágico se relacionam, obtendo todas as possíveis relações. Na seção 3, mostraremos como as soluções reais podem ser obtidas utilizando recursos básicos da Álgebra Linear. Por fim, consideraremos também o caso em que a constante mágica e os elementos que compõem o quadrado são números complexos.

2 Quadrados Mágicos de Ordem 4×4

O menor quadrado mágico de ordem par é aquele que possui 16 elementos, com ordem 4×4. Este é considerado um caso menos trivial do que o quadrado de ordem 3×3, não apenas por possuir mais variáveis a serem manipuladas, mas por não possuir um elemento central, chamado número mágico. O número mágico em quadrados de ordem ímpar é o pivô para obtenção do número de possíveis soluções de tais quadrados, pois sendo um elemento central, toda e qualquer soma dos elementos de uma mesma linha, coluna ou diagonal conterá esse elemento, sendo assim uma variável comum a todas as equações. Embora, quadrados mágicos de ordem par não possuam o número mágico, é possível manipular suas equações de modo a obter relações entre os elementos que os compõem.

Considere a seguir um quadrado mágico de ordem 4×4 generalizado,

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

onde $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O$ e P são números reais.

Suponha que a soma dos quatro elementos de qualquer linha, coluna ou diagonal do diagrama acima tenha valor S. Este número S é chamado constante mágica. No caso em que os primeiros números naturais de 1 a n são utilizados para preencher o quadrado, sem repetições, a constante mágica pode ser obtida pela expressão $S = n(n^2 + 1)/2$, e particularmente, se $n = 4$ então $S = 34$. Entretanto, como neste artigo serão considerados quaisquer números reais para preencher tais quadrados, não utilizaremos esta expressão.

As somas dos elementos das linhas do quadrado nos fornecem as equações:

$$A + B + C + D = S \tag{2.1}$$

$$E + F + G + H = S \tag{2.2}$$

$$I + J + K + L = S \tag{2.3}$$

$$M + N + O + P = S \tag{2.4}$$

Do mesmo modo, as soma dos elementos das colunas nos fornecem:

$$A + E + I + M = S \tag{2.5}$$

$$B + F + J + N = S \tag{2.6}$$

$$C + G + K + O = S \tag{2.7}$$

$$D + H + L + P = S \tag{2.8}$$

E por fim, as somas dos elementos das duas diagonais, principal e secundária resultam na equações:

$$A + F + K + P = S \tag{2.9}$$

$$D + G + J + M = S \tag{2.10}$$

Uma vez que o quadrado de ordem 4×4 não possui um número mágico central, para obtermos as primeiras relações entre os elementos desse quadrado, vamos somar 6 equações que contenham pelo menos 2 dos elementos que formam o quadrado central $FGJK$. Assim, somando as Equações 2.2, 2.3, 2.6, 2.7, 2.9 e 2.10, temos:

$$\begin{aligned}(E+F+G+H)+(I+J+K+L)+(B+F+J+N)+(C+G+K+O)\\ +(A+F+K+P)+(D+G+J+M)=6S\end{aligned} \tag{2.11}$$

Rearranjando esta soma, podemos escrever:

$$\begin{aligned}(A+B+C+D)+(E+F+G+H)+(I+J+K+L)+(M+N+O+P)\\ +2F+2G+2J+2K=6S\end{aligned} \tag{2.12}$$

Note que as quatro somas que aparecem entre parênteses na Equação 2.12 correspondem as somas das Equações 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, respectivamente, e cada uma delas vale S. Assim, a Equação 2.12 pode ser reescrita como

$$4S + 2F + 2G + 2J + 2K = 6S \Rightarrow 2F + 2G + 2J + 2K = 2S, \tag{2.13}$$

e assim, obtemos mais uma relação entre os elementos do quadrado 4×4:

$$F + G + J + K = S, \tag{2.14}$$

onde vemos que a soma dos elementos do quadrado central $FGJK$ também satisfaz a constante mágica S:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

Agora, somando-se as Equações 2.2 e 2.3, teremos:

$$(E+F+G+H)+(I+J+K+L)=2S \Rightarrow (F+G+J+K)+(E+H+I+L)=2S \tag{2.15}$$

e como $F + G + J + K = S$, temos:

$$E + H + I + L = S \tag{2.16}$$

Assim, obtemos uma nova relação entre os elementos do quadrado:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

Considere agora a soma das Equações 2.5 e 2.8

$$(A+E+I+M)+(D+H+L+P)=2S. \tag{2.17}$$

Note que podemos rearrajar essa soma da seguinte forma:

$$(E+H+I+L)+(A+D+M+P)=2S, \tag{2.18}$$

e usando o fato que $E+H+I+L=S$, temos:

$$A+D+M+P=S, \tag{2.19}$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

Agora, somando as duas colunas do meio do quadrado, isto é, as Equaçãoes 2.6 e 2.7, temos:

$$(B+F+J+N)+(C+G+K+O)=2S, \tag{2.20}$$

que poder ser reescrita como:

$$(F+J+G+K)+(B+C+N+O)=2S. \tag{2.21}$$

e segue da Equação 2.14 que

$$B+C+N+O=S. \tag{2.22}$$

Assim, temos a 14ª equação que também possui soma equivalente a constante mágica S.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

Apresentamos até o momento como obter todas as 14 possíveis relações distintas, que podem ser obtidas via soma dos elementos de linhas, colunas e/ou diagonais de um quadrado mágico de ordem 4×4.

Entretanto, é possível estabelecer ainda outras 10 relações envovendo apenas os 16 elementos que compõem o quadrado, isto é, sem envolver a constante mágica S.

Igualando as equações 2.1 e 2.19, temos:

$$A+B+C+D=A+D+M+P \Rightarrow B+C=M+P \tag{2.23}$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

De modo análogo, igualando as equações 2.3 e 2.14, obtemos:

$$I + J + K + L = F + G + J + K \Rightarrow I + L = F + G \tag{2.24}$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

Fazendo o mesmo com as equações 2.2 e 2.14, temos:

$$E + F + G + H = F + G + J + K \Rightarrow E + H = J + K \tag{2.25}$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

A quarta relação pode ser obtida igualando as equações 2.4 e 2.19:

$$M + N + O + P = A + D + M + P \Rightarrow N + O = A + D \tag{2.26}$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

Para obter a quinta relação, igualamos as equações 2.5 e 2.19:

$$A + E + I + M = A + D + M + P \Rightarrow E + I = D + P \tag{2.27}$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

De modo análogo, através das equações 2.8 e 2.19, obtem-se:

$$D + H + L + P = A + D + M + P \Rightarrow H + L = A + M \tag{2.28}$$

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{array}$$

As quatro demais relações incluem os elemento do quadrado interior F, G, J e K. Igualando equações 2.9 e 2.19, temos:

$$A + F + K + P = A + D + M + P \Rightarrow F + K = D + M \tag{2.29}$$

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{matrix}$$

Fazendo o mesmo com as equações 2.10 e 2.19, temos:

$$D + G + J + M = A + D + M + P \Rightarrow G + J = A + P \tag{2.30}$$

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{matrix}$$

Para obter as duas últimas relações, será necessário mais alguns passos além de igualar duas equações.

Primeiramente, igualamos as equações 2.9 e 2.6:

$$A + F + K + P = B + F + J + N \Rightarrow A + K + P = B + J + N \tag{2.31}$$

Agora, usando a equação 2.30 onde $J + G = A + P$, podemos isolar J, ficando com $J = A + P - G$. Daí, substituindo J na equação 2.31, temos:

$$A + K + P = B + A + P - G + N \Rightarrow K + G = B + N \tag{2.32}$$

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{matrix}$$

Por último, igualando as equações 2.9 e 2.7, temos:

$$A + F + K + P = C + G + K + O \Rightarrow A + F + P = C + G + O \tag{2.33}$$

Agora, usando novamente a equação 2.30, onde $G = A + P - J$, e substituindo na equação anterior 2.33, teremos:

$$A + F + P = C + A + P - J + O \Rightarrow F + J = C + O \tag{2.34}$$

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{matrix}$$

3 Soluções reais para o quadrado mágico generalizado de ordem 4×4

Na seção anterior, obtivemos ao todo 24 equações relacionando os elementos do quadrado mágico de ordem 4×4. Entretanto, das 24 equações, apenas possivelmente as 10 primeiras são linearmente independentes, pois as outras 14 foram evidentemente obtidas através de combinações lineares das preexistentes, conforme demonstrado.

Uma vez escolhida a constante mágica S, com $S \in \mathbb{R}$, resolver um quadrado mágico generalizado de ordem 4×4 consiste em resolver o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A + B + C + D = S \\ E + F + G + H = S \\ I + J + K + L = S \\ M + N + O + P = S \\ A + E + I + M = S \\ B + F + J + N = S \\ C + G + K + O = S \\ D + H + L + P = S \\ A + F + K + P = S \\ D + G + J + M = S \end{cases} \tag{3.1}$$

Temos um sistema linear com 16 variáveis e apenas 10 equações, que são supostamente linearmente independentes (LI). Assim, se tais equações forem de fato LI, teremos um sistema linear com grau de liberdade 6. A matriz ampliada do sistema 3.1 é dada por:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & S \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & S \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & S \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & S \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & S \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & S \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & S
\end{array}\right)$$

No entanto, ao escalonarmos esta matriz utilizando o método da Eliminação de Gauss, obtivemos:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S \\
0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & S \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -S \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

que possui uma linha nula, isto é, o posto desta matriz corresponde a 9. Assim, o sistema 3.1 é um sistema possível indeterminado com grau de liberdade 7, e não 6 como aparentava inicialmente. A solução geral deste sistema é dada por:

$$\begin{cases} A = -S + H + L + N + O + P \\ B = -S + H - J + K + L + O + 2P \\ C = 2S - H + J - K - L - N - 2O - 2P \\ D = S - H - L - P \\ E = -H + J + K \\ F = 2S - H - K - L - N - O - 2P \\ G = -S + H - J + L + N + O + 2P \\ I = S - J - K - L \\ M = S - N - O - P \\ H, J, K, L, N, O, P \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.2}$$

Desse modo, uma vez escolhida a costante mágica S, e 7 dos 16 elementos do quadrado mágico, os outros 9 sempre poderão ser determinados facilmente utilizando as Equações 3.2.

4 Soluções complexas para o quadrado mágico generalizado de ordem 4×4

Na seção anterior, consideramos apenas soluções reais para o sistema 3.2, uma vez que S foi escolhido como um número real qualquer. Nesta seção vamos analisar também a existência das soluções complexas do quadrado mágico generalizado de ordem 4×4.

Considere, a constante mágica $S \in \mathbb{C}$. Assim, podemos definir $S = S_0 + S_1 i$, onde $S_0, S_1 \in \mathbb{R}$. Desse modo, devemos considerar também todos os elementos do quadrado mágico em $\mathbb{C}$, isto é $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P \in \mathbb{C}$. Então, definimos

$$\begin{cases} A = A_0 + A_1 i \\ B = B_0 + B_1 i \\ C = C_0 + C_1 i \\ D = D_0 + D_1 i \\ E = E_0 + E_1 i \\ F = F_0 + F_1 i \\ G = G_0 + G_1 i \\ H = H_0 + H_1 i \\ I = I_0 + I_1 i \\ J = J_0 + J_1 i \\ L = L_0 + L_1 i \\ M = M_0 + M_1 i \\ N = N_0 + N_1 i \\ O = O_0 + O_1 i \\ P = P_0 + P_1 i \end{cases} , \quad \text{onde} \quad A_0, A_1, B_0, B_1, \cdots, P_0, P_1 \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Agora, o sistema 3.1 assumirá a seguinte forma, já colocando i em evidência:

$$\begin{cases} (A_0 + B_0 + C_0 + D_0) + (A_1 + B_1 + C_1 + D_1)i = S_0 + S_1 i \\ (E_0 + F_0 + G_0 + H_0) + (E_1 + F_1 + G_1 + H_1)i = S_0 + S_1 i \\ (I_0 + J_0 + K_0 + L_0) + (I_1 + J_1 + K_1 + L_1)i = S_0 + S_1 i \\ (M_0 + N_0 + O_0 + P_0) + (M_1 + N_1 + O_1 + P_1)i = S_0 + S_1 i \\ (A_0 + E_0 + I_0 + M_0) + (A_1 + E_1 + I_1 + M_1)i = S_0 + S_1 i \\ (B_0 + F_0 + J_0 + N_0) + (B_1 + F_1 + J_1 + N_1)i = S_0 + S_1 i \\ (C_0 + G_0 + K_0 + O_0) + (C_1 + G_1 + K_1 + O_1)i = S_0 + S_1 i \\ (D_0 + H_0 + L_0 + P_0) + (D_1 + H_1 + L_1 + P_1)i = S_0 + S_1 i \\ (A_0 + F_0 + K_0 + P_0) + (A_1 + F_1 + K_1 + P_1)i = S_0 + S_1 i \\ (D_0 + G_0 + J_0 + M_0) + (D_1 + G_1 + J_1 + M_1)i = S_0 + S_1 i \end{cases} \tag{4.2}$$

Ao igualarmos os termos semelhantes no sistema 4.2, obteremos dois sistemas similares ao primeiro 3.1:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 + C_0 + D_0 = S_0 \\ E_0 + F_0 + G_0 + H_0 = S_0 \\ I_0 + J_0 + K_0 + L_0 = S_0 \\ M_0 + N_0 + O_0 + P_0 = S_0 \\ A_0 + E_0 + I_0 + M_0 = S_0 \\ B_0 + F_0 + J_0 + N_0 = S_0 \\ C_0 + G_0 + K_0 + O_0 = S_0 \\ D_0 + H_0 + L_0 + P_0 = S_0 \\ A_0 + F_0 + K_0 + P_0 = S_0 \\ D_0 + G_0 + J_0 + M_0 = S_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (A_1 + B_1 + C_1 + D_1)i = S_1 i \\ (E_1 + F_1 + G_1 + H_1)i = S_1 i \\ (I_1 + J_1 + K_1 + L_1)i = S_1 i \\ (M_1 + N_1 + O_1 + P_1)i = S_1 i \\ (A_1 + E_1 + I_1 + M_1)i = S_1 i \\ (B_1 + F_1 + J_1 + N_1)i = S_1 i \\ (C_1 + G_1 + K_1 + O_1)i = S_1 i \\ (D_1 + H_1 + L_1 + P_1)i = S_1 i \\ (A_1 + F_1 + K_1 + P_1)i = S_1 i \\ (D_1 + G_1 + J_1 + M_1)i = S_1 i \end{cases} \tag{4.3}$$

onde o segundo sistema em 4.3, pode ser reescrito de forma simplificada como:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = S_1 \\ E_1 + F_1 + G_1 + H_1 = S_1 \\ I_1 + J_1 + K_1 + L_1 = S_1 \\ M_1 + N_1 + O_1 + P_1 = S_1 \\ A_1 + E_1 + I_1 + M_1 = S_1 \\ B_1 + F_1 + J_1 + N_1 = S_1 \\ C_1 + G_1 + K_1 + O_1 = S_1 \\ D_1 + H_1 + L_1 + P_1 = S_1 \\ A_1 + F_1 + K_1 + P_1 = S_1 \\ D_1 + G_1 + J_1 + M_1 = S_1 \end{cases} \tag{4.4}$$

Agora, embora nosso quadrado mágico seja preenchido com números complexos, a solução dos sistemas 4.3 será real, e similar a solução do sistema 3.1, tendo em vista que as matrizes ampliadas desses sistemas em nada diferem da matriz ampliada do primeiro sistema. Desse modo, teremos as soluções:

$$\begin{cases} A_0 = -S_0 + H_0 + L_0 + N_0 + O_0 + P_0 \\ B_0 = -S_0 + H_0 - J_0 + K_0 + L_0 + O_0 + 2P_0 \\ C_0 = 2S_0 - H_0 + J_0 - K_0 - L_0 - N_0 - 2O_0 - 2P_0 \\ D_0 = S_0 - H_0 - L_0 - P_0 \\ E_0 = -H_0 + J_0 + K_0 \\ F_0 = 2S_0 - H_0 - K_0 - L_0 - N_0 - O_0 - 2P_0 \\ G_0 = -S_0 + H_0 - J_0 + L_0 + N_0 + O_0 + 2P_0 \\ I_0 = S_0 - J_0 - K_0 - L_0 \\ M_0 = S_0 - N_0 - O_0 - P_0 \\ H_0, J_0, K_0, L_0, N_0, O_0, P_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.5}$$

e

$$\begin{cases} A_1 = -S_1 + H_1 + L_1 + N_1 + O_1 + P_1 \\ B_1 = -S_1 + H_1 - J_1 + K_1 + L_1 + O_1 + 2P_1 \\ C_1 = 2S_1 - H_1 + J_1 - K_1 - L_1 - N_1 - 2O_1 - 2P_1 \\ D_1 = S_1 - H_1 - L_1 - P_1 \\ E_1 = -H_1 + J_1 + K_1 \\ F_1 = 2S_1 - H_1 - K_1 - L_1 - N_1 - O_1 - 2P_1 \\ G_1 = -S_1 + H_1 - J_1 + L_1 + N_1 + O_1 + 2P_1 \\ I_1 = S_1 - J_1 - K_1 - L_1 \\ M_1 = S_1 - N_1 - O_1 - P_1 \\ H_1, J_1, K_1, L_1, N_1, O_1, P_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.6}$$

5 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos as demonstrações formais de como obter todas as possíveis relações entre os elementos de um quadrado mágico generalizado de ordem 4×4. Obedecendo a regra em que a soma dos elementos de qualquer linha, coluna ou diagonal de um quadrado mágico deve resultar sempre no mesmo valor, verificamos que ao escolhermos os elementos do quadrado como números reais ou complexos, o quadrado pode ser resolvido sem grandes dificuldades, utilizando apenas conceitos básicos de Álgebra Linear. Ao resolvermos os sistemas, foi possível verificar que para o quadrado mágico composto por números reais, o sistema possui grau de liberdade 7, enquanto que para o quadrado composto por números complexos, o grau de liberdade será 14.

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao IF Sudeste MG, Campus Juiz de Fora, Brasil, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Orcid

Judith de Paula Araújo https://orcid.org/0009-0008-5335-460X
Caroline Rodrigues Loiola https://orcid.org/0009-0007-8056-2642
Mariana Petermann Martins https://orcid.org/0009-0004-5340-0689

Referências

1. H. Eves, *Introdução à história da matemática*, 5ª ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.
2. T. Xie and L. Kang, "An evolutionary algorithm for magic squares", apresentado em *The 2003 Congress on Evolutionary Computation*, Austrália, 2003.
3. I. J. Taneja, Bordered Magic Squares With Order Square Magic Sums, Zenodo, 2020, pp. 1-26.
4. Albrecht Durer's Renaissance: Humanism, Reformation, and the Art of Faith David Hotchkiss Price. Disponível em: https://press.umich.edu/pdf/0472113437-fm.pdf.
5. C. A., Pickover, *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars: An Exhibition of Surprising Structures across Dimensions*, Princeton University Press, 2002.
6. A. Eves, *The fascination of magic squares.* Disponível em: https://www.rigb.org/explore-science/explore/blog/fascination-magic-squares.
7. W. S., Andrews, *Magic Squares and Cubes*, Chicago, IL, USA: Open Court Publishing, 1917.
8. T. Koshy, *Elementary Number Theory with Applications.*, 2ª ed. San Diego, California, USA: Academic Press, 2007.
9. E. R., Berlekamp, J. H., Conway and R. K., Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 2ª ed. Wellesley, Massachussets, A K Peters/CRC Press, 2001.
10. M. Gardner and D. A., Klarner, *Mathematical Recreations: A Collection in Honor of Martin Gardner*, Dover Publications, 1998.