

Modelo dinámico para el estudio del desempeño escolar

**Paulo César Manrique
Mirón**

Instituto Politécnico Nacional

pmanrique@ipn.mx

**Elizabeth Avila
Zamorano**

Colegio Carl Rogers

direcciongeneral@chr.educamos.com

Jesús López Estrada

Facultad de Ciencias, UNAM

jelpze@ciencias.unam.mx

**Juan Alberto Nader
Kawachi**

Medica Sur Fundación Clínica

Centro de Neurología y

Neurocirugía

juan.nader.k@gmail.com

A dynamic model for the study of school Performance

Abstrac

A new methodology is introduced to measure school performance based on a mathematical model of Ordinary Differential Equations (ODEs). Three indexes are proposed that describe long-term school performance. The ODEs model is applied to students of a generation of basic-level, the values of the model's parameters are estimated using the numerical scores of the considered students obtained at the time of their training. This describes the dynamics of long-term school performance, which allows to give a measure of the impact of some educational policy.

Key words: Mathematical Modeling; Differential Equations; Academic Performance Indices

Resumen

Se introduce una metodología para la medición del desempeño escolar basada en un modelo matemático de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs). Con el cual se proponen tres índices que describen a largo plazo el desempeño escolar. El modelo de EDOs se aplica a una generación escolar de estudiantes del nivel básico, esto es, se estiman los valores de los parámetros del modelo usando las evaluaciones numéricas de los estudiantes obtenidas en el tiempo de su formación. Con ello se describe la dinámica del desempeño escolar a largo plazo, lo que permite hacer una medida del impacto de una política educativa en la formación de los estudiantes.

Palabras clave: Modelación Matemática; Ecuaciones Diferenciales; Índices de Desempeño.

Submetido em: 18 de fevereiro de 2021 – Aceito em: 05 de maio de 2021

1 INTRODUCCIÓN

En toda institución educativa existen variaciones en la matrícula escolar y la población estudiantil a través del tiempo. Los alumnos que ingresan, los que egresan, cambios en los programas de estudio o políticas de educación, producen cambios en las interacciones que se dan en el alumnado que afectan su Desempeño Escolar (DE) y que a veces son imperceptibles.

El DE es el indicador fundamental en los sistemas educativos contemporáneos, ya que permite medir cuantitativamente el grado de aprendizaje alcanzado por los estudiantes. Este se define como el nivel de conocimiento el cual queda expresado en una nota numérica que obtiene un alumno, y la obtiene como resultado de la evaluación del proceso enseñanza-aprendizaje en el que participa [3], [7].

El DE depende primordialmente de las habilidades, actitud, inteligencia, personalidad y motivación del propio alumno, sin embargo, también depende de la observación y la imitación entre los pares [4]. En la teoría del aprendizaje social el proceso cognitivo necesariamente se considera en el contexto social en el que se da, es decir, las interacciones entre docentes, otros estudiantes, el entorno familiar, el ambiente escolar y los programas educativos [4], [7].

En esta investigación se considera importante identificar y comprender la dinámica del DE durante la formación de un estudiante y cuantificar a largo plazo su comportamiento para entender la *tradición escolar* de una institución educativa, es decir, entender numéricamente cómo la institución contribuye con el DE de sus estudiantes. En particular en este trabajo se enfoca en el análisis matemático de la población escolar del Colegio Carl Rogers que es un proyecto inspirado en un programa de desarrollo infantil creado en el año 2000 [1].

Los modelos matemáticos en términos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) son muy útiles para el estudio de fenómenos o sistemas que evolucionan con respecto al tiempo y donde ciertos objetos interactúan entre sí. Como lo que se observa en el desarrollo de una epidemia, donde los sujetos infectados, los recuperados y los susceptibles interactúan, cambiando el número de individuos en cada una de estas clases o compartimentos conforme pasa el tiempo. Inspirados en los modelos matemáticos clásicos de epidemiología, en el presente trabajo se desarrolla un modelo para describir la *dinámica* del DE y entender cómo cambia conforme el estudiante avanza en su formación.

En el presente trabajo se propone un modelo de EDOs para el estudio del DE en un centro académico de nivel básico y que en adelante llamaremos **modelo AMB**. En particular se analizan las notas escolares de estudiantes de nivel primaria a lo largo de una generación escolar. Del análisis de este modelo, se derivan indicadores (índices)

para valorar el DE de los alumnos que la institución ayuda a formar. Además, el modelo permite identificar áreas de oportunidad, que la institución puede aprovechar para crear estrategias que le permitan realizar acciones y hacer intervenciones tanto docentes como institucionales para mejorar su proyecto educativo. Estas estrategias se podrán evaluar de manera numérica mediante los índices propuestos, con lo que se podrá dar un estimación cuantitativa de su impacto a largo plazo.

2 MÉTODO

2.1 Objetivos

Introducir una nueva metodología para la creación de indicadores que describan el DE de los alumnos de un colegio a través del tiempo y a largo plazo. Además, de describir matemáticamente políticas educativas y establecer maneras de cuantificar las acciones para el mejoramiento del DE.

2.2 Población y Muestra

Fueron considerados los datos de 38 alumnos de la generación escolar 2014–2020 de la escuela primaria Colegio Carl Rogers, ubicada En Hacienda Ojo de Agua, Estado de México, México, que estudiaron desde el segundo grado (2015) hasta el sexto grado (2020). Los datos del primer grado escolar se excluyeron por no contar con la información de ese periodo.

Para fines del presente estudio se tomaron en cuenta dos subgrupos de estudiantes. En el primero se incluyeron 26 de los 38 alumnos que comenzaron su formación académica básica en la institución (en el segundo grado) y la concluyeron en la misma. En el segundo subgrupo, se incluyeron a los 38 alumnos que comenzaron (segundo grado) y concluyeron su formación académica en la institución o desertaron en algún momento.

Para cada subgrupo se consideran alumnos de *alto*, *medio* y *bajo* rendimiento. Las categorías de rendimiento se definen de acuerdo a su evaluación numérica (promedio) para cada cierto tiempo de evaluación. Para el presente trabajo se utilizan dos definiciones para realizar comparaciones. La primera definición, a la que se referirá como la definición 9.1–8.1, es: alto mayor a 9.1, medio entre 8.1 y 9.1 y bajo menor a 8.1. La segunda definición, que se referirá como la definición 8.4–7.1, es: alto mayor a 8.4, medio entre 8.4 y 7.1 y bajo menor a 7.1. Cabe aclarar, que la unidad de tiempo a la que se hace referencia es *bimestral*, pero por razones de política educativa de México, el periodo de tiempo bimestral no corresponde necesariamente a un tiempo de dos meses, si no al momento en que se realizó y registró la evaluación numérica.

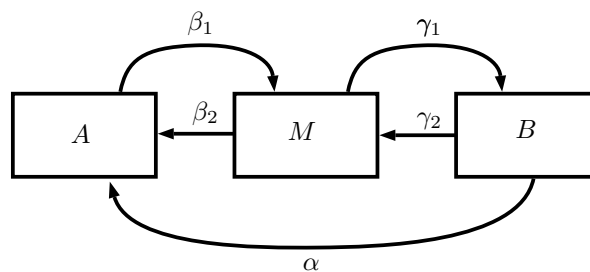
2.3 Instrumento

Se enfatiza que el modelo AMB, propuesto en este trabajo, es en sí un nuevo enfoque para el análisis cuantitativo del DE basado en EDOs.

Para el modelo AMB es necesario primeramente dividir a la población de alumnos de una generación escolar en tres compartimentos: $x(t)$ la población de los alumnos con alto rendimiento escolar en el tiempo t ; $y(t)$ la población de los alumnos de medio rendimiento escolar en el tiempo t ; y $z(t)$ la población de los alumnos de bajo rendimiento escolar en el tiempo t . Hay que recordar que la escala para el tiempo empleada es bimestral.

Se supondrá que una proporción β_1 (también llamado *coeficiente de transferencia*) de los alumnos de alto rendimiento escolar pasan a ser de medio rendimiento y que una proporción α de alumnos de bajo rendimiento pasan a ser de alto rendimiento. Que con una proporción β_2 de los alumnos de medio rendimiento se vuelven de alto rendimiento y que una proporción γ_2 de alumnos de bajo rendimiento se vuelven de medio rendimiento. Y que una proporción γ_1 de los alumnos de medio rendimiento pasan a ser de bajo rendimiento. En la Figura 1 se describe gráficamente el modelo AMB, los coeficientes de transferencia α , β_1 , β_2 , γ_1 y γ_2 entre las diferentes cajas se indica mediante flechas.

Figura 1: Transferencia entre las poblaciones de alto (A), medio (M) y bajo (B) rendimiento.



Fuente: Elaboración Propia

Así, bajo estos supuestos de modelación, se da lugar al siguiente sistema EDOs que es denominado *modelo AMB*:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\beta_1 x + \beta_2 y + \alpha z \\ \dot{y} &= \beta_1 x - (\beta_2 + \gamma_1) y + \gamma_2 z \\ \dot{z} &= \gamma_1 y - (\alpha + \gamma_2) z\end{aligned}\tag{1}$$

donde el punto sobre cada variable indica la primera derivada respecto al tiempo. Nótese que el modelo AMB consiste en determinar tres funciones $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ que

satisfagan el sistema (1). Es importante observar que

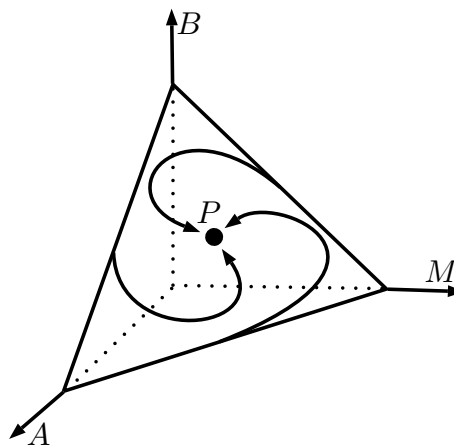
$$\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0,$$

lo cual indica

$$x + y + z = N, \quad \text{con } N > 0, \quad (2)$$

que es una condición importante para el análisis del modelo AMB. Es relevante determinar si el modelo AMB tiene un *punto de equilibrio*. Un punto de equilibrio da una descripción a largo plazo del comportamiento de las posibles soluciones del sistema (1). En particular, se establece que el modelo AMB tiene un único punto de equilibrio el cual es un *atractor* (para una explicación detallada de este hecho véase la Sección 5). Lo cual significa, que dado cualquier condición inicial admisible para el sistema (1), el comportamiento a largo plazo del sistema será el mismo. En la Figura 2 se aprecia que los valores que toman las funciones x, y, z está en octante positivo de \mathbb{R}^3 . El punto P en la figura ejemplifica un atractor. Sin importar cómo inician las soluciones x, y, z (flechas) al tiempo cero eventualmente terminarán en el punto P . En otras palabras, el modelo plantea que la escuela tiene una naturaleza propia, que se manifiesta a largo plazo y que se puede denominar como la *tradición académica de la escuela*. El punto

Figura 2: El punto P ejemplifica a un atractor.



Fuente: Elaboración Propia

de equilibrio E_e del modelo AMB, que es un atractor, es

$$E_e = (N\delta_A, N\delta_M, N\delta_B)$$

donde

$$\delta_B = \frac{\beta_1 \gamma_1}{\Delta} \quad (3)$$

$$\delta_M = \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2)}{\Delta} \quad (4)$$

$$\delta_A = \frac{\alpha(\beta_2 + \gamma_1) + \beta_2\gamma_2}{\Delta} \quad (5)$$

con $\Delta = \alpha(\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1) + \beta_1(\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_2\gamma_2$.

De (2) se sigue que $\delta_A + \delta_M + \delta_B = 1$ y observando que δ_A , δ_M y δ_B son números positivos, al multiplicarlos por 100 pueden entenderse como porcentajes. Los valores δ_A , δ_M y δ_B serán los índices del DE. Estos indican el porcentaje de estudiantes con alto, medio y bajo rendimiento a largo plazo. El objetivo es estimar los valores de los parámetros α , β_1 , β_2 , γ_1 y γ_2 en el modelo AMB, para a su vez estimar δ_A , δ_M y δ_B a partir de la información de las calificaciones.

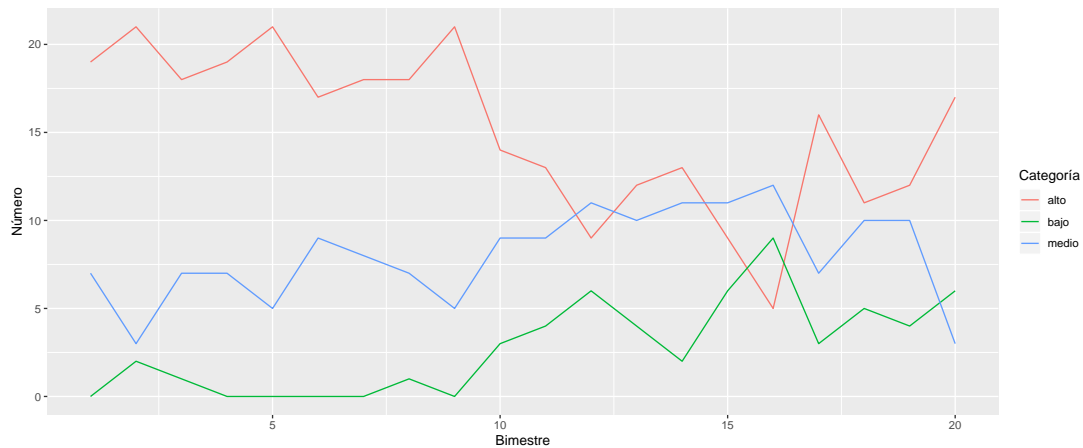
2.4 Procedimiento de recogida y análisis de datos

El número de bimestres registrados fue de 20. Para cada bimestre los subgrupos de alumnos fueron divididos en los tres compartimentos alto, medio y bajo rendimiento, de acuerdo a la definiciones mencionadas antes, en función de la calificación numérica del estudiante en cada bimestre. Estos datos se organizaron en el orden temporal del nivel académico cursado, con ellos se realizó la estimación de los parámetros en el modelo AMB y, a su vez, de los índices definidos para el DE.

En la Figura 3 y la Figura 4 se muestra la evolución de las poblaciones de alto, medio y bajo rendimiento para el primer grupo de 26 estudiantes. Como se puede apreciar, para la definición 9.1–8.1, se observa que al inicio del segundo año de su formación no hay alumnos de bajo y muy poco de medio rendimiento, lo cual es natural considerando que para estos periodos la exigencia y la complejidad de las cosas es menor. Un decremento en los alumnos de alto rendimiento se observa a partir del bimestre 10 y de manera proporcional al incremento de alumnos de medio rendimiento. Para la definición 8.4–7.1, las poblaciones de cada compartimento es casi constante en todo el lapso de tiempo considerado.

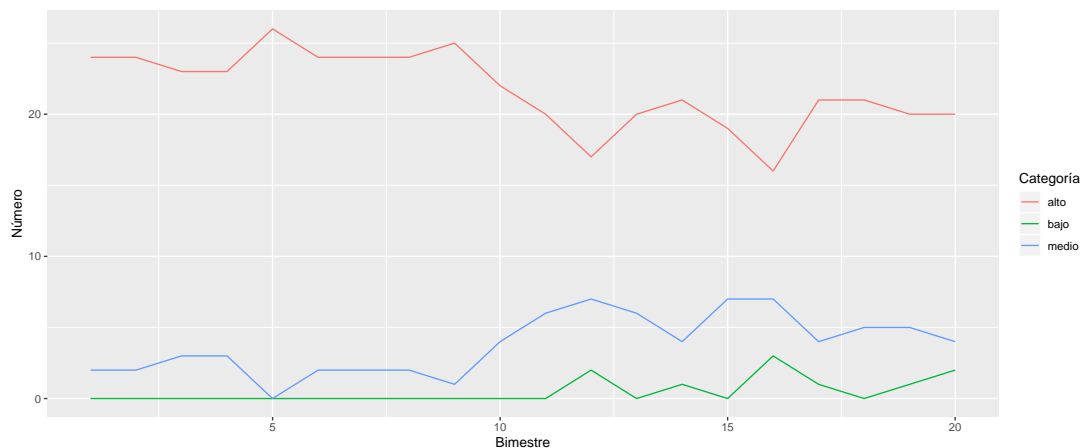
En la Figura 5 y la Figura 6 se considera la evolución de las poblaciones de alto, medio y bajo rendimiento para el segundo caso de los 38 alumnos que comenzaron el segundo grado en la misma institución. Hay que notar, de acuerdo con nuestras definiciones, existe una pérdida de alumnos, lo que contrasta con el buen DE que reflejan los alumnos que continuaron su formación en la misma institución. Lo cual implica que existen factores externos que causaron esta situación. De la definición 9.1–8.1 se observa que el número de alumnos de alto rendimiento es relativamente estable hasta el quinto bimestre, luego hay una caída (que se explica en parte por la aparición de un nuevo colegio de mayores dimensiones cercano a la institución escolar

Figura 3: Evolución de las poblaciones de alto, medio y bajo rendimiento de acuerdo a la definición 9.1–8.1 para el primer caso.



Fuente: Elaboración propia

Figura 4: Evolución de las poblaciones de alto, medio y bajo rendimiento de acuerdo a la definición 8.4–7.1 del primer caso.

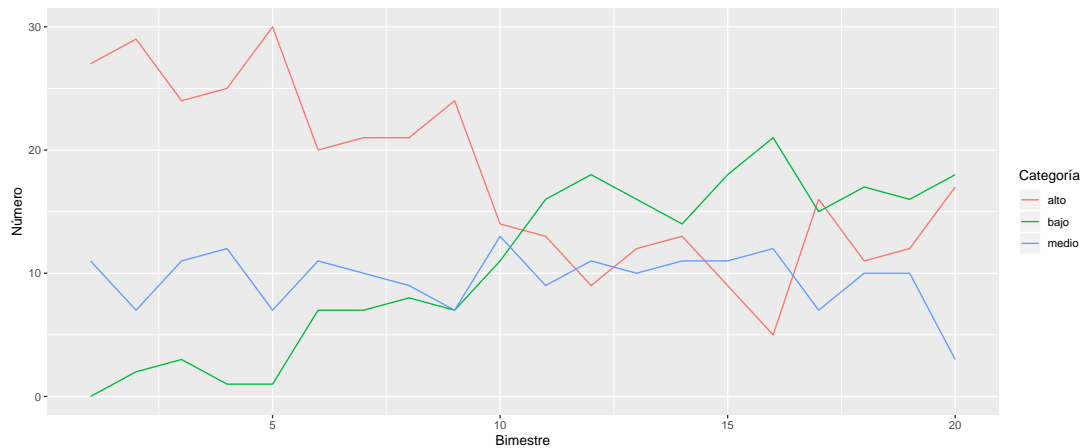


Fuente: Elaboración propia

bajo estudio). Los alumnos de bajo rendimiento se incrementan después del quinto bimestre mostrando una tendencia a la alta constante. Hay que aclarar que el alumno que deserta se le considera como un alumno de bajo rendimiento. Para la definición 8.4–7.1, las poblaciones se mantienen prácticamente estables hasta el bimestre 10, donde se presenta una caída. Luego, se mantienen casi constante.

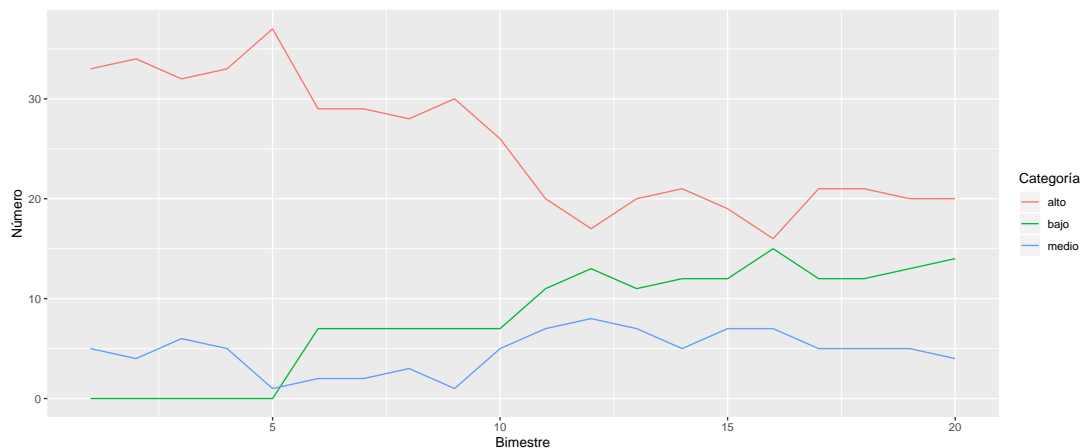
Los parámetros α , β_1 , β_2 , γ_1 y γ_2 del modelo AMB se estimaron mediante dos métodos diferentes utilizando MATLAB R2014a: criterio de Mínimo de Cuadrados (MinQs) y Máxima Verosimilitud Poisson. Para la estimación de MinQs, se usa una combinación de las funciones *fminsearch* y *lsqnonlin* de MATLAB R2014a. La función *fminsearch* es una implementación del método simplex de Nelder–Mead [5], que es un método de búsqueda y libre del cálculo de derivadas. La función *lsqnonlin* es una implementación del método cuasi–Newton de Levenberg–Marquardt [6] para la minimización de una

Figura 5: Evolución de las poblaciones de alto, medio y bajo rendimiento de acuerdo a la definición 9.1–8.1 para el segundo caso.



Fuente: Elaboración propia

Figura 6: Evolución de las poblaciones de alto, medio y bajo rendimiento de acuerdo a la definición 8.4–7.1 para el segundo caso.



Fuente: Elaboración propia

suma de cuadrados no lineales. Para la estimación Poisson se usa sólo la función `fminsearch`.

La evaluación de la solución numérica del modelo AMB se realiza usando la función `ode15s` de MATLAB R2014a, que es una implementación de un *método implícito BDF* con pasos de integración cuasi-constantes y de orden variable de a lo más 5 [8].

3 RESULTADOS

La estimación numérica de los parámetros coincidió para los dos métodos usados. En consecuencia, se obtiene un mismo valor para δ_A , δ_M y δ_B . Esto se resumen en las Tablas 1 y 2.

Los ajustes de las trayectorias de la solución del modelo AMB para los datos con-

Tabela 1: Resultados numéricos de la estimación de parámetros.

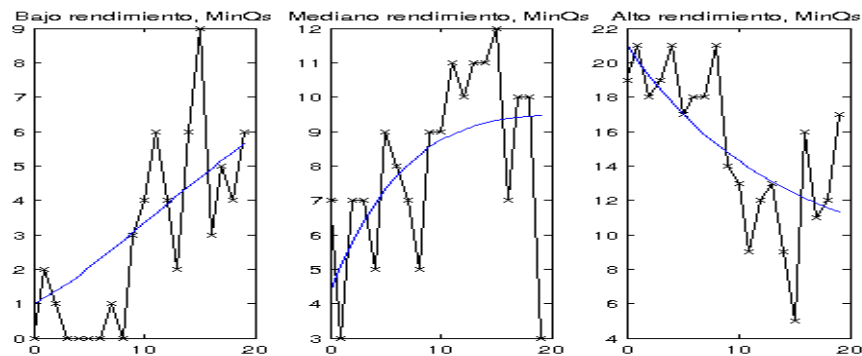
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\gamma}_1$	$\hat{\gamma}_2$
9.1–8.1 primer caso	0.01000	0.05412	0.03328	0.04215	0.02000
8.4–7.1 primer caso	0.01007	0.01465	0.01000	0.20340	0.99999
9.1–8.1 segundo caso	0.01761	0.07514	0.01000	0.14300	0.02000
8.4–7.1 segundo caso	0.01227	0.04302	0.01000	0.34432	0.09284

Tabela 2: Resultados numéricos en porcentaje de los índices δ_A , δ_M y δ_B .

	δ_A	δ_M	δ_B
9.1–8.1 primer caso	26.6661	30.4920	42.8419
8.4–7.1 primer caso	40.6043	49.4389	9.9568
9.1–8.1 segundo caso	17.5814	17.1642	65.2545
8.4–7.1 segundo caso	21.4429	18.3725	60.1846

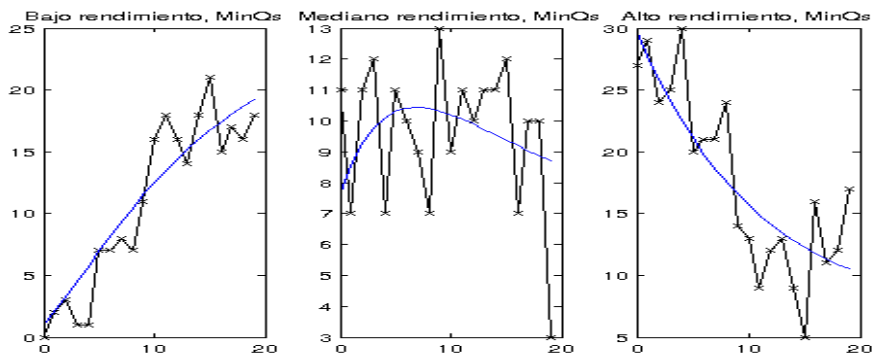
siderados se muestran en las Figuras 7 a la 10.

Figura 7: Ajuste del modelo para la definición 9.1–8.1 del primer caso.



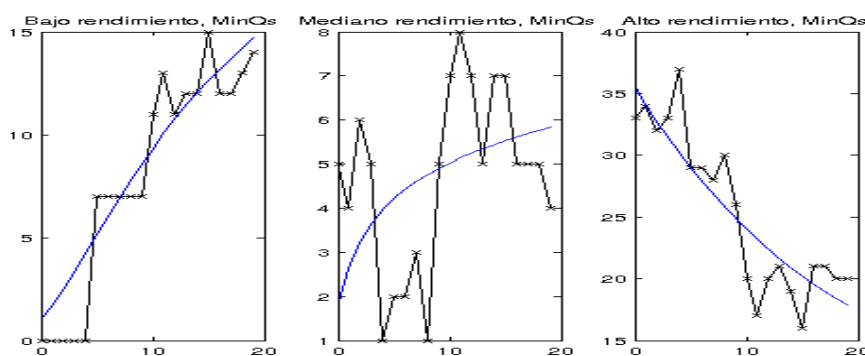
Fuente: Elaboración propia

Figura 8: Ajuste del modelo para la definición 9.1–8.1 del segundo caso.



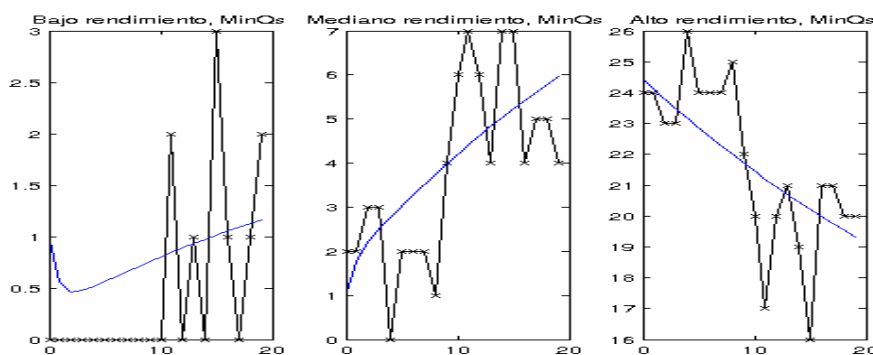
Fuente: Elaboración propia

Figura 9: Ajuste del modelo para la definición 8.4–7.1 del primer caso.



Fuente: Elaboración propia

Figura 10: Ajuste del modelo para la definición 8.4–7.1 del segundo caso.



Fuente: Elaboración propia

4 DISCUSIÓN

4.1 Aspectos analíticos de los índices δ_A , δ_M y δ_B

Sobre el modelo AMB propuesto en este trabajo, cabe mencionar que a partir de él se describen cómo se afectaría el DE en términos de las posibles estrategias para mejorarlo. Para ilustrar esto, se consideran las siguientes observaciones. El índice δ_B de los alumnos de bajo rendimiento escolar es

$$\delta_B = \frac{\beta_1 \gamma_1}{\alpha(\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1) + \beta_1(\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_2 \gamma_2}$$

Una disminución de δ_B se ve reflejado en una mejora del DE. Para reducir δ_B hay que reducir la tasa β_1 de transferencia de los alumnos de alto rendimiento a medio (que puede darse mediante reconocimientos, premios, becas, etc.). Esto también se logra, reduciendo la tasa de transferencia γ_1 de los alumnos de medio rendimiento a los de bajo (becas, clases de regularización escolar, etc.). Lo anterior sólo se puede hacer hasta cierto punto, ya que hay un efecto contraproducente debido a que también disminuye el valor del denominador de δ_B . Por otro lado, aumentar la tasa β_2 de trans-

ferencia de los alumnos de medio rendimiento a alto y/o la tasa γ_2 de bajo rendimiento a medio, contribuye a disminuir a δ_B .

El índice δ_M de los alumnos de medio rendimiento es

$$\delta_M = \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2)}{\alpha(\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1) + \beta_1(\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_2\gamma_2}.$$

Para reducir el valor de δ_M se requiere reducir el valor de las tasas de transferencia β_1 y aumentar β_2 , que está en concordancia con lo antes mencionado para el índice δ_B . Se observa que reducir el valor de las tasas α y γ_2 para disminuir el numerador de δ_M es contraproducente para incrementar el índice δ_A .

Finalmente, el índice δ_A de los alumnos de alto rendimiento es

$$\delta_A = \frac{\alpha(\beta_2 + \gamma_1) + \beta_2\gamma_2}{\alpha(\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1) + \beta_1(\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_2\gamma_2}.$$

Para aumentar el valor de δ_A es posible desarrollar políticas pedagógicas que lleven a incrementar el numerador de este índice. Lo que se logra al incrementar los valores de los parámetros α , β_2 , γ_1 y γ_2 hasta cierto punto, pues también incrementan el valor de su denominador. Lo que está en concordancia con lo antes ya dicho para los otros índices.

4.2 Valores numéricos de los parámetros del modelo AMB para el caso de estudio Colegio Carl Rogers

La estimación del parámetro α , nos indica que en promedio el 1% de los estudiantes de bajo rendimiento pasan a formar parte de los estudiantes de alto rendimiento (Tabla 1). Es decir, si hubiera 100 estudiantes que forman el grupo de bajo rendimiento, sólo uno pasaría directamente a formar parte del grupo de estudiantes de alto rendimiento. Esto muestra que el modelo captura adecuadamente esta situación que se observa empíricamente.

Con respecto a los estudiantes de alto rendimiento, se observa a partir de la definición 9.1–8.1, el parámetro estimado $\hat{\beta}_1$ es del 5% para el primer caso, indicando, por ejemplo, que de cada 100 estudiantes de alto rendimiento, cinco de ellos pasan a medio rendimiento. Para las otras estimaciones de $\hat{\beta}_1$, se obtienen interpretaciones similares, indicando que es relativamente más común que un estudiante de alto rendimiento baje de nivel.

Se observa que el factor de transferencia $\hat{\gamma}_2$ indica la dificultad que tienen los estudiantes de bajo rendimiento para subir de nivel de acuerdo con la definición 9.1–8.1 en el primer caso, pero es visible que el colegio enfoca sus esfuerzos en apoyar a estos estudiante, ya que considerar la definición 8.4–7.1 en el primer caso, el parámetro

estimado $\hat{\gamma}_2$ es prácticamente 1. En el caso de los estudiantes de medio rendimiento, se observa que los parámetros estimados asociados a ellos cumplen $\hat{\beta}_2 < \hat{\gamma}_1$, lo que indica que estos estudiantes son los más propensos a bajar de nivel que subir. En particular, para la definición 9.1–8.1 en el primer caso, se tiene que, si hubiera 100 estudiantes en este grupo, sólo tres pasarían a ser de alto rendimiento, mientras que cuatro pasarían a ser de bajo rendimiento. De esto, se puede afirmar que la población de mediano rendimiento es una población de gran relevancia para entender la dinámica del DE, ya que, al menos en el caso de estudio, ellos contribuyen a incrementar la población de los estudiantes de bajo rendimiento.

Con relación al comportamiento a largo plazo de las poblaciones para cada nivel de rendimiento se destaca lo siguiente. De los dos primeros renglones de la Tabla 2, para la definición 9.1–8.1 se observa que sólo el 26.6% de la población escolar se considera de alto rendimiento y el 42.8% de bajo, mientras que para la definición 8.4–7.1 el 40.6% es de alto rendimiento y el 9.9% de bajo. Así, la definición 9.1–8.1 es de mayor exigencia académica, aunque la diferencia entre ambas definiciones sea casi de un punto. Además, estos índices describen lo difícil que es para un estudiante en general ser de alto rendimiento. Por otro lado, para la definición 9.1–8.1 el 30.5% de la población es de medio rendimiento. En el caso de la definición 8.4–7.1, es de 49.4%. Por ello, dada cualquier definición, es necesario prestar atención a la población de medio rendimiento que es la que puede contribuir al crecimiento de la población de bajo rendimiento.

Para el segundo grupo de estudio se considera a los estudiantes que desertaron como estudiantes de bajo rendimiento. Los valores del δ_B en el Cuadro 2, para tal caso, son altos, pero hay que notar que de los 38 estudiantes en el segundo grupo pertenecen 26 al primero. Se puede inferir que existe un factor que influye para la salida de los estudiantes que no está directamente relacionado a la exigencia académica del colegio. Este punto es interesante porque plantea explicar qué tanto influyen los estudiantes entre sí. Algo que se deja para posteriores trabajos.

A lo largo de los años el Colegio Carl Rogers ha desarrollado actividades encaminadas a elevar el DE de los alumnos de bajo rendimiento con tutorías, actividades extra-clase y seguimiento parental. Los resultados con estos programas, aunque favorables en lo general, exponen áreas de oportunidad que merecen atención. Las estimaciones de los índices definidos a partir del modelo AMB para el primer grupo de estudio, con las definiciones 9.1–8.1 y 8.4–7.1, se plantea una nueva estrategia que consista en desarrollar un programa de actividades encaminados a mejorar los resultados académicos de los alumnos de medio rendimiento, ya que es una población que tiende a ser numerosa, y que puede convertirse en población de bajo rendimiento. Es importante dar un seguimiento a esta posible propuesta, registrando datos (evaluaci-

ones) que permitan entender su efectividad y que pueden ser evaluados nuevamente con modelo AMB mediante la estimación de los correspondientes índices.

4.3 Comentarios finales

De lo anterior concluimos que las principales aportaciones del presente trabajo son:

- Presentar una nueva metodología para medir el desempeño escolar basada en EDOs y que se le ha nombrado como modelo AMB. Ver el sistema (1).
- El modelo AMB tiene la propiedad analítica de poseer un único punto de equilibrio, el cual permite dar una proyección del DE a largo plazo, asumiendo que una política educativa se mantuviera. Además, sugiere medidas a tomar para modificar los valores de δ_A , δ_M y δ_B que están definidos en términos de los coeficientes de transferencia. Ver Figura 1 y apartado 4.1.
- Al aplicar el modelo AMB a una generación escolar de nivel básico del Colegio Carl Rogers, se pudo cuantificar el programa educativo que el colegio promueve para formar estudiantes de alto rendimiento. Ver el valor estimado $\hat{\beta}_2$ en la Tabla 1 para los diferentes escenarios.
- Se muestra cuantitativamente que el Colegio Carl Rogers tiene su interés en aumentar el nivel de los estudiantes de bajo rendimiento. Ver el valor estimado de $\hat{\gamma}_2$ en la Tabla 1 para los diferentes escenarios.
- Se cuantificó (Tabla 2) el peso de los factores externos que afecta a la retención de estudiantes del Colegio Carl Rogers a partir del modelo AMB, al comparar diferentes escenarios.
- Mediante la estimación de los parámetros del modelo AMB, se logró entender de manera cuantitativa que existe una área de oportunidad para mejorar la política educativa del Colegio Carl Roger, al respecto de crear un programa que ayude a mejorar el nivel de los alumnos de medio rendimiento. Ver las relación $\hat{\beta}_2 < \hat{\gamma}_1$ de los parámetros estimados para está población.

Para el presente trabajo el modelo AMB considera la transferencia entre los diferentes compartimentos (alto, medio y bajo rendimiento) pero el aprendizaje es un proceso entre pares y la interacción de los estudiantes, entre ellos puede modificar el tamaño de cada compartimento a lo largo del tiempo, en el momento actual estamos desarrollando una extensión del modelo AMB que considere también estas interacciones entre alumnos y así proponer nuevos índices del DE.

5 ANÁLISIS DEL MODELO AMB

En esta sección se presenta el análisis cualitativo de las soluciones del sistema de EDOs que definen al modelo AMB y que son:

$$\dot{x} = -\beta_1 x + \beta_2 y + \alpha z$$

$$\dot{y} = \beta_1 x - (\beta_2 + \gamma_1)y + \gamma_2 z$$

$$\dot{z} = \gamma_1 y - (\alpha + \gamma_2)z$$

Es directo ver que $\frac{d}{dt}(x + y + z) = 0$, que indica que la dinámica de este sistema está restringida al plano $x + y + z = N$, con $N > 0$. De hecho, sólo sobre el simplejo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x + y + z = N > 0\},$$

donde \mathbb{R}_+^3 es el octante positivo con entradas no-negativas.

Estudio cualitativo del modelo. Para el estudio geométrico de la conducta de las soluciones del sistema (1), se empieza por hallar sus estados de equilibrio. Esto es, resolver el sistema de ecuaciones:

$$0 = -\beta_1 x + \beta_2 y + \alpha z \quad (6)$$

$$0 = \beta_1 x - (\beta_2 + \gamma_1)y + \gamma_2 z \quad (7)$$

$$0 = \gamma_1 y - (\alpha + \gamma_2)z \quad (8)$$

junto con la ecuación (2).

Despejando z de la ecuación (2) y sustituyendo en las ecuaciones (6)–(7) se obtiene el sistema:

$$(\alpha + \beta_1)x + (\alpha - \beta_2)y = \alpha N$$

$$(\gamma_2 - \beta_1)x - (\beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2)y = \gamma_2 N$$

cuya solución viene dada por

$$x_e = \frac{\alpha(\beta_2 + \gamma_1) + \beta_2 \gamma_2}{\Delta} N \quad (9)$$

$$y_e = \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2)}{\Delta} N \quad (10)$$

donde $\Delta = \alpha(\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1) + \beta_1(\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_2 \gamma_2$. Y de la tercera ecuación del sistema 1 se sigue que

$$z_e = \frac{\beta_1 \gamma_1}{\Delta} N \quad (11)$$

Así, el estado de equilibrio es admisible y viene dado por

$$E = N(\delta_A, \delta_M, \delta_B) \quad (12)$$

donde

$$\delta_A = \frac{\alpha(\beta_2 + \gamma_1) + \beta_2\gamma_2}{\Delta}, \quad \delta_M = \frac{\beta_1(\alpha + \gamma_2)}{\Delta} \quad \text{y} \quad \delta_B = \frac{\beta_1\gamma_1}{\Delta}$$

son los indicadores del rendimiento académico que se han denominado *índices* de DE.

Estabilidad del punto de equilibrio. Como el sistema **1** es lineal, para su análisis de su estabilidad basta con estudiar las raíces del polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -\beta_1 & \beta_2 & \alpha \\ \beta_1 & -(\beta_2 + \gamma) & \gamma_2 \\ 0 & \gamma_1 & -(\alpha + \gamma_2) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Al desarrollar por menores sobre el último renglón del determinante de la matriz $\lambda I - A$, se obtiene que éste viene dado por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\lambda I - A| \\ &= \lambda^3 + (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2)\lambda^2 + (\alpha(\gamma_1 + \beta_1 + \beta_2) + \gamma_2(\beta_1 + \beta_2) + \gamma_1\beta_1)\lambda, \end{aligned}$$

o bien $p(\lambda) = \lambda q(\lambda)$, donde

$$q(\lambda) = \lambda^2 + (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2)\lambda + \alpha(\gamma_1 + \beta_1 + \beta_2) + \gamma_2(\beta_1 + \beta_2) + \gamma_1\beta_1,$$

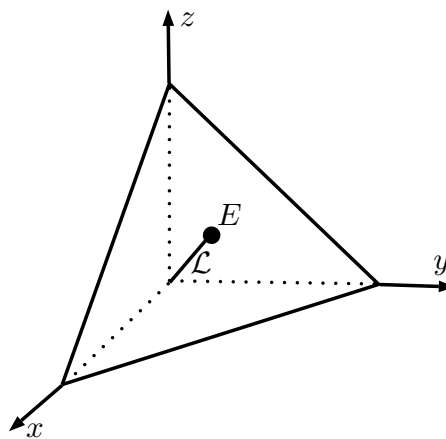
y como $q(\lambda)$ tiene sus coeficientes positivos es un polinomio estable (i.e., con raíces negativas o parte real negativa). Que una de las raíces características sea nula, su quiere la existencia de un continuo de puntos de equilibrio $\mathcal{L} : E_\tau = \tau \mathbf{u}$, $\tau \in \mathbb{R}$ del sistema **(1)**. Ya que existe un vector no nulo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\mathbf{u} = 0$. En efecto, es directo verificar que

$$N(A) = \langle \mathbf{u} \rangle \quad \text{donde} \quad \mathbf{u} = (\alpha(\beta_2 + \gamma_1) + \beta_2\gamma_2, \beta_1(\alpha + \gamma_2), \beta_1\gamma_1)$$

En particular, se tiene que $E \in \mathcal{L} \cap S$, ya que $E = \tau_0 \mathbf{u}$ con $\tau_0 = \frac{N}{\Delta}$. En la Figura **11**, la recta \mathcal{L} representa un continuo de puntos de equilibrio del sistema **(1)** y el punto E es el punto de equilibrio del modelo AMB con la restricción $x + y + z = N$ con $N > 0$. Por otro lado, observando $\mathbf{n}A = \mathbf{0}^T$, donde $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, es el vector normal a S , se puede ver que si $\lambda < 0$ es un autovalor de la matriz A con su correspondiente autovector $\mathbf{u} \neq 0$, entonces \mathbf{u} es paralelo al simplejo S (i.e., $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$). En efecto, se tiene que

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot A\mathbf{u} = A^T \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$$

Figura 11: El punto de equilibrio E .

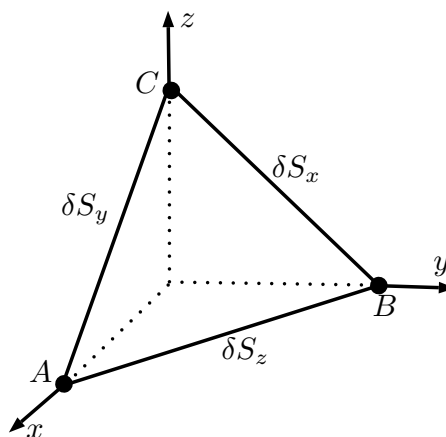


Fuente: Elaboración Propia

y como $\lambda < 0$ se sigue que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$, como se quería demostrar. Para el caso complejo $\lambda = a + ib$, con autovector asociado $\mathbf{u} = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$ también se puede probar que los autovectores reales \mathbf{v} y \mathbf{w} asociados a λ y su conjugada son paralelos al simplejo S . Esto dice que el punto de equilibrio E dado por (12) es un atractor global sobre el simplejo S .

Para continuar con el estudio geométrico del comportamiento de las trayectorias solución del sistema (1), se considera el campo vectorial ξ definido por $\xi = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, y se pasa a estudiar cómo se comporta este campo a lo largo de la frontera ∂S del simplejo S . En particular, se mostrará que este campo ξ no apunta hacia fuera del simplejo S a lo largo de su frontera. Para ello, sean A, B y C los vértices del simplejo

Figura 12: Descripción de la frontera del simplejo S .



Fuente: Elaboración Propia

S sobre los ejes x, y y z , respectivamente; y denótese por $\partial S_x, \partial S_y$ y ∂S_z las fronteras de S sobre los planos yz, zx y xy , respectivamente (ver Figura 12). Claramente, ∂S_x

es la intersección de los planos $x + y + z = N$ y $x = 0$ en el octante positivo \mathbb{R}_+^3 , o sea

$$\partial S_x : y + z = N, x = 0 \text{ con } y, z \geq 0.$$

O bien,

$$\partial S_x = \{\eta_x \mid \eta_x = N(0, \theta, 1 - \theta), \theta \in [0, 1]\}.$$

El vector $\mathbf{u}_x = (-2, 1, 1)$ es paralelo al simplejo S , pues $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_x = 0$. Y es normal a ∂S_x , pues $\vec{BC} \cdot \mathbf{u}_x = 0$ dado que \vec{BC} es paralelo al vector $\mathbf{a} = (0, -1, 1)$. Así se tiene que la componente del campo vectorial ξ en dirección normal a ∂S_x viene dada por

$$\xi \cdot \mathbf{u}_x = 3\beta_2 y - 3\alpha z$$

que evaluando $\eta_x \in \partial S_x$, se tiene que

$$\xi \cdot \mathbf{u}_x = -3(\beta_2 \theta + \alpha(1 - \theta))N < 0, \text{ para toda } \theta \in [0, 1].$$

Consecuentemente, el campo vectorial ξ apunta hacia dentro de S sobre su frontera ∂S_x .

De manera análoga se demuestra que el campo vectorial ξ apunta hacia adentro del simplejo S a lo largo de su frontera ∂S_y salvo en su vértice C , y también que apunta hacia dentro de S a lo largo de su frontera ∂S_z , salvo en su vértice A .

En conclusión, toda trayectoria solución $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t \geq 0$ del sistema (1) que inicia en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ está destinada a permanecer para siempre en S .

En resumen, se ha demostrado el siguiente teorema: Dado que el polinomio cuadrático $q(\lambda)$ es estable se tiene que el punto de equilibrio $E \in \text{int}(S)$ dado por (12) del sistema (1) es un atractor global en el simplejo S . Dicho en otras palabras, dada cualquier trayectoria solución $\Gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t \geq 0$ con estado inicial $(x_0, y_0, z_0) \in S$ vive para siempre en S y eventualmente terminará convergiendo al único estado de equilibrio $E \in S$ cuando $t \rightarrow \infty$.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Avila, "La actividad del psicólogo en el diseño, planeación y desarrollo de un centro de desarrollo infantil", tesis de licenciatura, U.N.A.M. México, 2004.
- [2] Y. Bard, *Nonlinear parameter estimation*, Academic Press, 1974.
- [3] O. Retana, "Psicoinforma Definición de rendimiento escolar. Disponible" en: www.psicopedagogia.com/definicion/rendimiento%20escolar (2012) (Consultado en 28 noviembre 2020).
- [4] M. P. Garrido, "Red social educativa Teoría del aprendizaje social de Bandura" en: [https://redsocial.rededuca.net/teor-del-aprendizaje-social-de-bandura#:~:text=Albert%20Bandura%20es%](https://redsocial.rededuca.net/teor-del-aprendizaje-social-de-bandura#:~:text=Albert%20Bandura%20es%20)

20un%20psic%C3%B3logo,conocida%20como%20Teor%C3%ADa%20Cognoscitiva%20Social (2015) (Consultado en 28 noviembre 2020).

- [5] C. T. Kelley, *Direct Search Algorithms*, Chapter 8 in *Iterative Methods for Optimization*, SIAM, 1999. <https://doi/book/10.1137/1.9781611970920>
- [6] J. J. Moré, "The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and Theory", in Watson, G.A. (ed.), *Numerical Analysis, Proc. Biennial Dundee Conf. 1977*, Springer, pp. 105-116, 1978. <https://doi.org/10.1007/BFb0067700>
- [7] P. Narvaez, S. Oyola, S., "Influencia del contexto social en el rendimiento académico de los estudiantes de grado 7-1 en la institución técnica Antonio Nariño Fe y la alegría de la ciudad Ibagué", tesis de maestría, Ibagué–Tolima, Universidad de Tolima, Bogotá, 2015.
- [8] L. F. Shampine, M. W. Reichelt, "The Matlab ODE Suite", *SIAM J. Sci. Comput.*, vol 18, no. 1, pp. 1–22, 1997. <http://doi.org/10.1137/s1064827594276424>

BREVE BIOGRAFIA

Paulo César Manrique Mirón  <https://orcid.org/0000-0002-4908-5514>

Obtuvo el título de Doctor en Probabilidad y Estadística en el Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., Guanajuato, México. Su área de principal interés son la aplicación de las Matemáticas y el análisis matemático de objetos y estructuras aleatorias.

Elizabeth Avila Zamorano  <https://orcid.org/0000-0003-4738-5465>

Obtuvo el título de licenciatura de la Universidad Nacional Autónoma de México. El título de Licenciatura en educación preescolar de la Secretaría de Educación Pública. Posgrado en Valoración Infantil por la Universidad de las Américas. Es Socia Fundadora del Colegio Happy-Rogers, actualmente a cargo de la Dirección General del mismo.

Jesús López Estrada  <https://orcid.org/0000-0002-0837-0888>

Realizó, en la Universidad Nacional Autónoma de México, (UNAM), sus estudios de licenciatura (1974), maestría (1976) y doctorado (1988) en Matemáticas. Actualmente, el Prof. López es Profesor Titular de Tiempo Completo en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Su área de principal interés es el Cómputo Científico para la Resolución de Problemas Mal-planteados, en particular aquellos tienen lugar en Medicina.

Juan Alberto Nader Kawachi  <https://orcid.org/0000-0002-6800-7415>

Obtuvo el título de Médico Cirujano de la Universidad Nacional Autónoma de México, el título de Médico Neurólogo en el Instituto Nacional de Neurología y Neurocirugía, Manuel Velasco Suarez y fue Asistent Boursier en el Centre Hospitalier Universitaire Vaudois en Lausana, Suiza. Actualmente es Neurólogo adscrito al Servicio de Neurología y Director Académico de la Clínica de EVC, Hospital Médica Sur, México, y Profesor del curso de Alta Especialidad en EVC UNAM / Médica Sur. También es director de la rama de investigación de Servicios al Enfermo Neurológico SC.