

## Equação da onda imagem na análise sísmica do subsolo

**Cassinara Gomes  
Teixeira** 

Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul

[✉ cassinara.gomes@ufrgs.br](mailto:cassinara.gomes@ufrgs.br)

**Álvaro Luiz De Bortoli**

Universidade Federal do Rio Grande  
do Sul

[✉ dbortoli@mat.ufrgs.br](mailto:dbortoli@mat.ufrgs.br)

### Image Wave Equation in underground seismic analysis

#### Abstrac

In this work, we study the image wave equation and its use for the depth remigration problem through numerical methods. The problem is to reconstruct an image of the underground geological layers from an initial image migrated with a velocity model. The main objective is the investigation of possible numerical methods for the solution of the image wave equation and, for that, theoretical investigation and numerical analysis were performed. Numerical tests show that the finite difference method with centered approximations is the most efficient. In addition, the implementations show physical and analytical similarity to the classical wave equation. Such similarity is useful because we can consider known and extensively studied methods for the classical wave equation, and apply them to investigations of the image wave equation for in-depth remigration problems.

Key words: Remigration; Image Wave; Finite Difference; Numerical Analysis.

#### Resumo

Neste trabalho, estuda-se a equação da onda imagem e sua utilização para o problema de remigração na profundidade através de métodos numéricos. O problema consiste na reconstrução de uma imagem das camadas geológicas do subsolo a partir de uma imagem previamente migrada com um modelo de velocidade. O principal objetivo é a investigação de métodos numéricos para solução da equação da onda imagem, e para isso realizou-se investigação teórica e análise numérica. Os testes numéricos mostram que o método de diferenças finitas com aproximações centradas é o mais eficiente. Além disso, as implementações mostram a similaridade, tanto do aspecto físico como analítico, com a equação da onda clássica. Esta semelhança é útil, pois podemos considerar métodos já conhecidos e extensivamente estudados para a equação da onda clássica, e aplicá-los às investigações da equação da onda imagem para o problema de remigração na profundidade.

Palavras-chave: Remigração; Onda Imagem; Diferenças Finitas; Análise Numérica.

Submetido em: 30 de abril de 2021 – Aceito em: 28 de junho de 2021

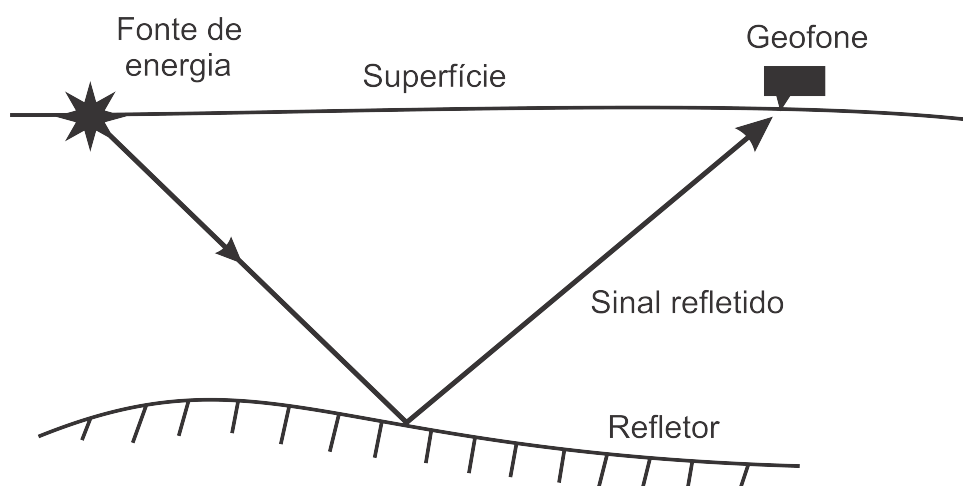
## 1 INTRODUÇÃO

A reflexão sísmica é um processo baseado na reflexão de ondas sísmicas, assim a análise de dados sísmicos envolve a criação de ondas e imagens sísmicas que são usadas para delinear estruturas geológicas abaixo da superfície. A migração de dados sísmicos é um processo que objetiva construir uma imagem do interior da Terra a partir de dados de campo gravados, reposicionando estes dados em sua “real” posição geológica, usando várias aproximações numéricas dadas pela teoria de ondas ou teoria de raios que descrevem a propagação de ondas no subsolo [1].

Desta forma, a migração é o processo de reconstruir uma imagem das camadas geológicas a partir da imagem obtida no tempo. Esta imagem é obtida pela geração de ondas no subsolo e o registro do movimento resultante das partículas da superfície da Terra. Para isso é necessário conhecer o modelo das velocidades de propagação das ondas no subsolo em consideração, chamada velocidade de migração [2].

A metodologia de um levantamento sísmico consiste em registrar na superfície o tempo de trânsito e amplitude da onda refletida nas interfaces de camadas em subsuperfície. A duração deste registro é da ordem de 4-10 segundos, do momento da detonação de uma fonte de energia sísmica controlada, até atingir o receptor geralmente localizado na superfície. As ondas são afetadas pelo contraste das características físicas da subsuperfície e carregam informações do meio que podem ser recuperadas por algum processo de inversão. Assim, estima-se a estrutura que gerou a reflexão [3].

**Figura 1:** Exemplo de reflexão simples com apenas uma camada



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

Observe a figura 1, a fonte gera uma frente de onda na superfície que se propaga nas camadas inferiores, ao encontrar uma interface parte da onda reflete e parte refrata. A onda refletida retorna à superfície e os receptores capturam sua chegada, a seguir o conjunto fonte-receptores é transladado sobre uma curva, e então o expe-

rimento é realizado novamente nesta nova posição. De posse dos dados obtidos no levantamento sísmico, são efetuadas várias etapas de processamento de sinais, com a finalidade de adquirir elementos da refletividade e referências qualitativa e quantitativa a respeito de outras propriedades.

Nesse sentido, é estimada a distribuição de refletividades em que há contraste de impedância, ou seja, diferença no produto da velocidade do meio e densidade da rocha, entre camadas de subsuperfície. A velocidade de propagação das ondas nas rochas pode variar de acordo com a densidade e as constantes elásticas do meio, que por sua vez são dadas em função de características intrínsecas da rocha, tais como porosidade, temperatura, pressão, entre outros [3]. A análise de velocidade é uma ferramenta importante usada para determinar as velocidades sísmicas das camadas geológicas em subsuperfície.

Um bom modelo de velocidade é necessário para muitas técnicas habituais de imagem sísmica [4]. Contudo, quando se utilizam dados reais, praticamente nunca se conhece a velocidade correta na subsuperfície [5]. Portanto, é importante entender os efeitos da velocidade nas técnicas de migração. A continuação da velocidade descreve como uma imagem sísmica é alterada, devido a uma mudança na velocidade de migração. Essa descrição é um processo de propagação de ondas, no qual as imagens mudam ao longo do eixo de velocidade [6].

O problema da remigração consiste na construção de uma nova imagem do subsolo a partir de uma imagem obtida anteriormente, através de variações na velocidade de migração [7]. Para evitar múltiplas migrações com velocidades diferentes, a equação da onda imagem é aplicada. Esta equação, deduzida para meios homogêneos e isotrópicos, é dada por [8, 9]:

$$p_{xx} + p_{zz} + \frac{v}{z}p_{vz} = 0 \quad (1)$$

onde  $x$  e  $z$  são as variáveis espaciais e  $v$  a velocidade de migração, que no caso das ondas imagens é a variável de propagação. Os subscritos  $x$ ,  $z$  e  $v$  denotam a derivada parcial de  $p(x, z, v)$  em relação a correspondente variável. A equação (1) descreve os eventos (reflexões) em função da velocidade de migração na profundidade. A condição inicial é dada por  $p(x, z, v_0) = p_0(x, z)$ , que é uma seção (frente de onda imagem) migrada com velocidade incorreta  $v_0$ . Associada à equação (1) temos a equação iconal da onda imagem [8]:

$$V_x^2 + V_z^2 - \frac{V}{z}V_z = 0 \quad (2)$$

A equação (2) descreve a posição da onda imagem, estabelecendo uma relação

entre a parte cinemática da propagação da onda imagem e a correspondente equação diferencial parcial (1), cuja solução tem a forma  $p(x, z, v) = p_0(x, z)f[v - V(x, z)]$ . Portanto, a equação iconal da onda imagem (2) descreve as propriedades cinemáticas da propagação das ondas imagem para qualquer conjunto arbitrário de condições iniciais em função da velocidade de migração.

## 2 MÉTODO NUMÉRICO

O principal objetivo é a elaboração de um esquema numérico consistente e estável, tal que sua implementação possibilite determinar imagens do subsolo correspondentes às diferentes velocidades de migração. Após análise dos principais métodos utilizados para o problema de remigração em profundidade encontrados na literatura, optou-se pelo método de aproximações por diferenças finitas (DF). Embora o processamento no domínio do tempo seja utilizado amplamente, a remigração no domínio da profundidade é preferida, pois evita múltiplas migrações, reduzindo tempo e custo operacional [7]. A escolha deste método foi feita por permitir implementações práticas [10], apresentando custo computacional menor que o método de elementos finitos.

Constatou-se em Munerato et al. [11] que o método de volumes finitos aplicado para o problema de remigração na profundidade para a equação da onda imagem, apesar da convergência, apresenta dispersão maior do que os esquemas em diferenças finitas, e acréscimo no tempo computacional.

Para solução da equação da onda imagem, os esquemas foram implementados usando métodos explícitos com aproximações centradas para as derivadas espaciais para  $x$  e  $z$ , e para a derivada mista, aproximações centradas e avançadas. No caso de migração em profundidade a imagem refletida migrada é propagada no domínio de profundidade, ou seja, o espaço  $(x, z)$  e a variável de propagação é a velocidade de migração  $v$  e não o tempo como na onda física [8]. Sob estas condições, elaborou-se os seguintes esquemas para solução da equação da onda imagem:

$$p_{m,n+1}^{l+1} = p_{m,n+1}^{l-1} + p_{m,n-1}^{l+1} - p_{m,n-1}^{l-1} - \frac{4z\Delta z\Delta v}{v} \left( \frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} + \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} \right) \quad (3)$$

$$p_{m,n+1}^{l+1} = p_{m,n}^{l+1} + p_{m,n+1}^l - p_{m,n}^l - \frac{z\Delta z\Delta v}{v} \left( \frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{12(\Delta x)^2} + \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{12(\Delta z)^2} \right) \quad (4)$$

onde os esquemas (3) e (4) apresentam, respectivamente, aproximações centradas e avançadas para derivada mista. Contudo, todos os esquemas foram elaborados utilizando aproximações centradas para as derivadas espaciais nas variáveis  $x$  e  $z$ . Os termos  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  e  $\Delta v$  representam os incrementos nas direções  $x$ ,  $z$  e no passo de velocidade, respectivamente.

Além da investigação teórica e análise numérica, elaborou-se o seguinte esquema para a equação da onda clássica, visando comparar o comportamento das equações.

$$p_{m,n}^{l+1} = 2p_{m,n}^l - p_{m,n}^{l-1} - v^2 \Delta t \left( \frac{(\delta_{xx}p)_{m,n}^l}{(\Delta x)^2} + \frac{(\delta_{zz}p)_{m,n}^l}{(\Delta z)^2} \right) \quad (5)$$

o esquema (5) foi elaborado com aproximações centradas para as derivadas espaciais e para a variável  $t$ . Mais que averiguar a convergência dos esquemas formulados, objetivou-se comparar os resultados obtidos com as conclusões apresentadas em [7], [11], [12].

Para a discussão da convergência dos esquemas implementados, considera-se que um esquema de diferenças finitas pode ser usado para a determinação de uma solução aproximada de uma equação diferencial parcial, se a sua solução converge para a solução exata. Pelo *Teorema de Equivalência de Lax* [13], um esquema é convergente se for consistente com a equação diferencial e estável. A seguir, apresenta-se as observações em relação à consistência e estabilidade dos esquemas propostos.

## 2.1 Análise de estabilidade

Um esquema de diferenças finitas é consistente com a correspondente equação diferencial parcial, se para qualquer função suave  $\phi(x, z, v)$ , a diferença entre o operador diferencial,  $D$ , e o operador discretizado em um ponto  $(x_m, z_n, v_l)$ , aplicados na função  $\phi$  tende a zero quando  $\Delta x$ ,  $\Delta z$ , e  $\Delta v$  tendem a zero [13].

Para o operador discretizado  $D^\Delta \phi = D_{xx}^\Delta \phi + D_{zz}^\Delta \phi + D_{zv}^\Delta \phi$  e o operador diferencial  $D = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{v}{z} \frac{\partial}{\partial z \partial v}$  nos esquemas (3) e (4), obtém-se que

$$D\phi - D^\Delta \phi \rightarrow 0 \quad (6)$$

quando  $\Delta x, \Delta z, \Delta v \rightarrow 0$ . Portanto os esquemas são incondicionalmente consistentes com a equação diferencial da onda imagem.

Baseado no critério de estabilidade de Von Neumann [14], [15], para verificar a estabilidade dos esquemas propostos, substituímos nas equações discretizadas (3) e (4) a expressão:

$$p_{m,n}^l = \xi^l e^{imk_x \Delta x} e^{ink_z \Delta z}$$

onde  $k_x$  e  $k_z$  são os números de onda, ou seja, as frequências espaciais em  $x$  e  $z$ , respectivamente, e  $\xi$  é chamado de fator de amplificação. Desta forma, investigou-se para quais valores a condição

$$|\xi| \leq 1$$

é satisfeita. Assim, verificou-se que o esquema (3), com aproximações centradas para derivada mista, é incondicionalmente estável, permitindo flexibilidade na escolha do passo para a velocidade de migração. O esquema (4), em que as aproximações para a derivada mista são avançadas, é condicionalmente estável sob  $\Delta v < \frac{3v_{min}}{8z_{max}} \Delta z$  quando  $k_x \approx k_z$  e  $v = \frac{3v_{min}}{4z_{max}}$  quando  $k_x \ll k_z$ .

Logo, os esquemas desenvolvidos para solução da equação da onda imagem são estáveis, consistentes e portanto convergentes, conforme *Teorema de Equivalência de Lax* [13].

### 3 RESULTADOS

---

A seguir, destaca-se alguns resultados observados das implementações. Considerando meio homogêneo, o modelo foi simplificado para uma camada, iniciando com velocidade zero até atingir a velocidade de migração da respectiva profundidade escolhida. Para as simulações, optou-se por 1600m para profundidade máxima, conforme os esquemas apresentados e as condições de estabilidade determinadas na Seção 2.

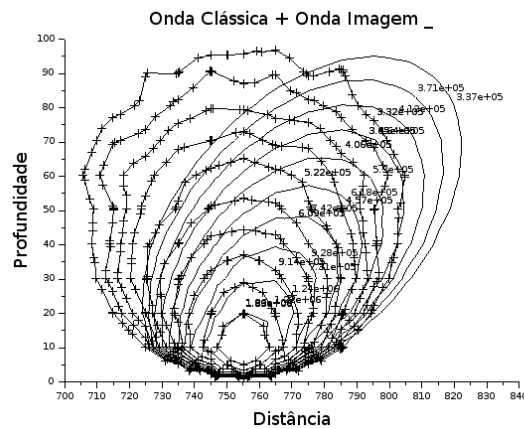
As condições iniciais para o problema de remigração são os dados obtidos de um processo de migração inicial para  $p(x_0, z_0, v_0)$ , onde a velocidade inicial  $v_0$  é geralmente incorreta. Portanto, o objetivo principal é corrigir tal velocidade usando a remigração.

Dessa forma, os esquemas foram implementados considerando condições usuais aplicadas em experimentos reais da migração sísmica, tais como:

- Condições de contorno nulas como em [7];
- Espaçamentos de 10m nas direções  $x$  e  $z$ , pois são os menores utilizados na prática em problemas sísmicos [7];
- Passo de velocidade de 2m/s, 8m/s e 0.04m/s, que estão de acordo com as condições de estabilidade obtidas.

A figura 2 mostra a propagação da onda clássica após 0,6s e da onda imagem com passo de velocidade 2m/s, e espaçamentos de 10m nas direções  $x$  e  $z$ .

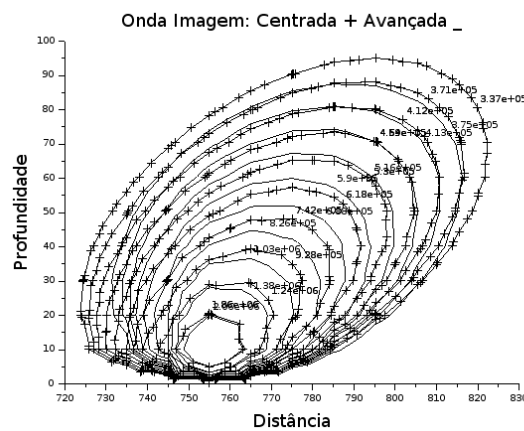
**Figura 2:** Propagação das ondas para DF centrais



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

A solução da equação da onda imagem para os esquemas em aproximações centrada e avançada para derivada mista, é apresentada na figura 3. Ambos iniciados com velocidade zero, mantendo passo de velocidade em  $2m/s$ .

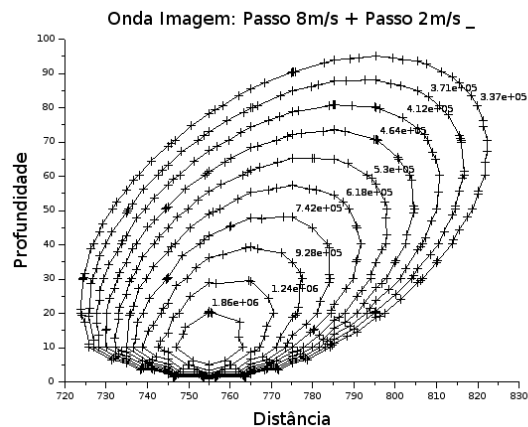
**Figura 3:** Solução da equação da onda imagem para esquema centrado e avançado



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

A figura 4 apresenta o comparativo entre os incrementos de velocidade determinados pelas condições de estabilidade calculadas para aproximações centradas [13]. A propagação de ondas com  $\Delta v = 2m/s$  está representada em linha contínua e  $\Delta v = 8m/s$  em cruz.

**Figura 4:** Solução da equação da onda imagem com incremento de velocidade 2m/s e 8m/s



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

No que diz respeito à implementação, diferentemente dos procedimentos adotados em testes numéricos no campo da geofísica, os quais utilizam pacotes e programas específicos para métodos de migração e remigração sísmica [16, 17, 18, 19], os esquemas foram implementados em FORTRAN, usando uma máquina de processador Intel Dual Core, e mesmo para uma malha bem refinada, onde se fez necessário grande número de iterações, o programa se mostrou eficiente com execução veloz.

Verificou-se dos testes numéricos que os esquemas para onda imagem apresentaram tempo computacional menor. Considerando 6 mil iterações:

- Aproximações centradas - 14,227 segundos;
- Aproximações avançadas - 16,626 segundos;
- Aproximações centradas para onda clássica - 36,453 segundos.

Nota-se uma redução no tempo computacional de pelo menos 50% em ambos esquemas para equação da onda imagem. Além da semelhança na propagação do campo de ondas observou-se que variações no incremento de velocidade não provoca alterações, como previsto teoricamente pela análise de estabilidade.

## 4 CONCLUSÃO

Os testes numéricos confirmam as previsões quanto à consistência e estabilidade, mostrando-se em conformidade com os apontados na literatura. O tempo computacional foi reduzido com os esquemas elaborados para equação da onda imagem, sendo o método de diferenças finitas com aproximações centrais mais eficiente.

Comparando com a onda clássica, o comportamento da equação da onda imagem, em relação ao aspecto físico, mostra que a propagação é semelhante a um conjunto



de corpo de ondas, e que o deslocamento depende da velocidade de migração e da profundidade.

No aspecto analítico, difere da equação da onda clássica por variar a velocidade de migração, descrevendo a propagação das ondas imagens na subsuperfície para diferentes instantes de velocidade de migração. Desta forma, contribui-se para facilitar o processo de análise de velocidade.

A similaridade verificada no comportamento das equações permite considerar métodos conhecidos e utilizados para a equação da onda, e aplicá-los à equação da onda imagem para meios de geometrias mais realistas e complexas do subsolo, como meios anisotrópicos e não-homogêneos.

Assim, entre as possibilidades futuras, pretende-se verificar e estender as derivações para meios anisotrópicos. O fenômeno da anisotropia pode afetar as conversões tempo-profundidade de dados sísmicos que irão resultar em imagens incorretas do subsolo, alterando seriamente a localização dos alvos de exploração. Logo, derivações da equação da onda imagem para meios anisotrópicos é relevante para otimizar o acesso à esses alvos, reduzindo riscos e custos envolvidos.

## REFERÊNCIAS

---

- [1] I. Jones, "Tutorial: migration imaging conditions," *First Break*, vol. 32, no. 12, pp. 45–55, 2014.
- [2] J. F. Claerbolt, *Imaging the Earth's interior*. Stanford University Press, 1985.
- [3] M. S. R. Carneiro, *Estratégias de inversão de multiparâmetros utilizando a equação completa da elastodinâmica*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2017.
- [4] M. J. Khoshnavaz, A. Bóna, and M. Urosevic, "Velocity-independent estimation of kinematic attributes in vertical transverse isotropy media using local slopes and predictive painting velocity-less estimation of attributes," *Geophysics*, vol. 81, no. 5, pp. U73–U85, 2016.
- [5] S. Fomel and M. Prucha, "Angle-gather time migration," *Stanford Exploration Project*, vol. 100, pp. 359–368, 1999.
- [6] W. Burnett and S. Fomel, "Azimuthally anisotropic 3D velocity continuation," *International Journal of Geophysics*, 2011.
- [7] J. Schleicher, A. Novais, and F. P. Munerato, "Análise numérica da equação da onda imagem na profundidade," *Trends in Applied and Computational Mathematics*, vol. 4, no. 2, pp. 267–276, 2003.
- [8] P. Hubral, M. Tygel, and J. Schleider, "Seismic image waves," *Geophysical Journal International*, vol. 125, no. 2, pp. 431–442, 1996.
- [9] S. Fomel, "Method of velocity continuation in the problem of seismic time migration," *Russian Geology and Geophysics*, vol. 35, no. 5, pp. 100–111, 1994.
- [10] S. Fomel, "Time-migration velocity analysis by velocity continuation," *Geophysics*, vol. 68, no. 5, pp. 1662–1672, 2003.
- [11] F. P. Munerato, "Remigração na profundidade mediante a equação da onda imagem," Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2006.

- [12] E. P. Munerato, J. Schleicher, E. A. Novais, *et al.*, "Equation implementational forms-study of image-wave for depth remigration," *Revista Brasileira de Geofísica*, 2008.
- [13] J. W. Thomas, *Numerical partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 1995.
- [14] J. C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes for Partial Differential Equations*. Pacific Grove, reprinted by Chapman & Hall, New York, 1989.
- [15] D. Greenspan and C. V., *Numerical analysis for applied mathematics, science, and engineering*. Perseus Publishing, 1988.
- [16] G. R. Gomes, "Análise de velocidade de migração em profundidade mediante continuação de velocidade em famílias de ponto imagem comum," in *VII Simpósio Brasileiro de Geofísica*, 2016.
- [17] J. Schleicher and R. Biloti, "Dip correction for coherence-based time migration velocity analysis," *Geophysics*, vol. 72, no. 1, pp. S41–S48, 2006.
- [18] J. Schleicher, A. Novais, and J. C. Costa, "Vertical image waves in elliptically anisotropic media," *Studia Geophysica et Geodaetica*, vol. 52, no. 1, pp. 101–122, 2008.
- [19] H. B. Santos, T. A. Coimbra, J. Schleicher, and A. Novais, "Remigration-trajectory velocity analysis: Improved derivation and proof of concept," *Annual WIT Report*, vol. 18, pp. 91–106, 2014.

## BREVE BIOGRAFIA

---

**Cassinara Gomes Teixeira**  <https://orcid.org/0000-0003-2395-5953>

Doutoranda do Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

**Álvaro Luiz De Bortoli**

Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina (1995). Pós-doutor pelo ITV - Institut für Technische Verbrennung da RWTH/Aachen na área de Combustão. Professor permanente do Instituto de Matemática e Estatística (IME) - UFRGS.