DOI: 10.22481/10.22481/intermaths.v2i1.8762
Licença Creative Commons
Artigo | Article

INTERMATHS
ISSN 2675-8318
Vol. 2, N. 1, Jan - Jun 2021, p. 63 – 70

Teoria de Grupos e Música: Conexões

Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
UNESP - Ilha Solteira
jaime.rodriguez@unesp.br

Murilo de Souza Penteado
USP/FFCLRP - Ribeirão Preto
murilo.penteado@unesp.br

Natália Torres Colombo Alves
UNESP - Ilha Solteira
natalia-torres.colombo@unesp.br

Daniel Fernandes Amaral
UNESP - Ilha Solteira
daniel.amaral@unesp.br

Groups Theory and Music: Connections

Abstrac
In this work, we show a simple but illustrative connection between basic concepts of Music Theory and a little bit of Group Theory, specifically the isomorphisms, of order to establish a correspondence (isomorphic) between the set of notes musicals and the group $\mathbb{Z}_{12}$. For this purpose, we make a brief introduction about some musical knowledge as well as concepts basic group theory.

Key words: Musical Note; Group; Isomorphism.

Resumo
Neste trabalho exibimos uma simples e ilustrativa conexão entre conceitos básicos da Teoria Musical e um pouco de Teoria de Grupos, concretamente os isomorfismos, de modo a estabelecer uma correspondência (isomorfismo) entre o conjunto das notas musicais e o grupo abeliano $\mathbb{Z}_{12}$. Para tal efeito, fazemos uma breve introdução acerca de alguns conhecimentos musicais assim como conceitos básicos da Teoria de Grupos.

Palavras-chave: Nota Musical; Grupo; Isomorfismo.

Submetido em: 20 de maio de 2021 – **Aceito em**: 21 de junho de 2021

1 NOTAS MUSICAIS E GRUPOS: INTRODUÇÃO

Nota musical é um termo empregado para designar o elemento mínimo de um som, formado por um único modo de vibração do ar. Sendo assim, a cada nota corresponde uma duração e está associada uma frequência, cuja unidade mais utilizada é o hertz (Hz), a qual descreve, em termos físicos, se a nota é mais grave ou mais aguda. De forma geral, podemos relacionar as notas a um alfabeto musical que dá a possibilidade de associar determinadas frequências (ou conjuntos de frequências) a nomes comuns, viabilizando a composição de músicas ou qualquer outro tipo de manifestação sonora de forma clara e compreensível. Sem as notas musicais, uma partitura provavelmente seria escrita como uma sequência de números relativamente extensos, correspondentes as frequências que se espera ouvir.

Sabemos que existem sete notas musicais: $Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si.$ Agregamos a estas os chamados acidentes musicais. Acidentes ou alterações são símbolos utilizados na notação musical para modificar a altura da nota imediatamente à sua direita e de todas as notas na mesma posição da pauta até o final do compasso corrente, tornando-as meio tom mais graves ou meio tom mais agudas. Estes acidentes são representadas pelo símbolo sustenido ($\#$) ou bemol ($\flat$) sendo que o sustenido representa o aumento da nota em um semi-tom e o bemol a diminuição da mesma ([1]). Esses símbolos, na partitura musical, aparecem ao lado esquerdo da nota a ser alterada. Assim sendo temos então doze notas musicais agrupadas no conjunto a seguir:

$$N_m = \{Do,\ Do\#,\ Re,\ Re\#,\ Mi,\ Fa,\ Fa\#,\ Sol,\ Sol\#,\ La,\ La\#,\ Si\}.$$

Por outro lado, na Álgebra estudam-se estruturas algébricas tais como os grupos, os quais são conjuntos munidos de uma operação binária, satisfazendo três axiomas: Associatividade, existência de elemento neutro e existencia de elemento inverso. Em particular, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, com a operação de adição usual, é um bom exemplo e modelo de grupo abeliano (comutativo) ([4]).

Neste conjunto $\mathbb{Z}$ é possível definir uma relação da forma seguinte. Dado $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{Z}$, definimos

$$a \equiv b\ (mod\ n), \quad \text{se e somente se} \quad n|a-b,$$

onde $n|a-b$ significa que n é divisor de $a-b$.

Sabemos que esta é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva) e portanto particiona o conjunto $\mathbb{Z}$ em classes de equivalência módulo n. Assim obtemos o conjunto

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{n-1}\},$$

onde $\overline{a} = \{\overline{x} \in \mathbb{Z}_n : x \equiv a \ (mod \ n)\}$ é uma classe de equivalência.

A relação $a \equiv b \ (mod \ n)$ se e somente se $n|a-b$ é equivalente a afirmar que os números inteiros $a \ \ e \ \ b$, quando divididos por n, deixam o mesmo resto. Por isso, as vezes, o conjunto $\mathbb{Z}_n$ é chamado de classes de resto módulo n ou classes residuais módulo n.

Para $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$ definimos a operação

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b},$$

onde $a, \ b \in \mathbb{Z}$ e são os chamados representantes das correspondentes classes.

Observar que para somar classes de equivalência, basta somar os representantes das classes. Portanto, certas propriedades que são satisfeitas no conjunto $\mathbb{Z}$, também são válidas no conjunto $\mathbb{Z}_n$. Com esta operação verifica-se que $\mathbb{Z}_n$ é um grupo abeliano (grupo comutativo). Em particular, o conjunto $\mathbb{Z}_{12}$ é um grupo aditivo abeliano.

2 NOTAS MUSICAIS E GRUPOS: CORRESPONDÊNCIA

Consideremos o conjunto:

$$N_m = \{Do, \ Do\#, \ Re, \ Re\#, \ Mi, \ Fa, \ Fa\#, \ Sol, \ Sol\#, \ La, \ La\#, \ Si\}.$$

Vamos identificar o grupo N_m com o grupo abeliano aditivo $\mathbb{Z}_{12}$ através da correspondência $\varphi : N_m \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$, dada por

$$\begin{array}{lll}
\varphi(Do) = 0, & \varphi(Do\#) = 1, & \varphi(Re) = 2, \\
\varphi(Re\#) = 3, & \varphi(Mi) = 4, & \varphi(Fa) = 5, \\
\varphi(Fa\#) = 6, & \varphi(Sol) = 7, & \varphi(Sol\#) = 8, \\
\varphi(La) = 9, & \varphi(La\#) = 10, & \varphi(Si) = 11.
\end{array}$$

Agora, dotaremos o conjunto N_m de uma estrutura de grupo abeliano. Para isso definimos uma operação como segue:

$$m_1 * m_2 = \varphi^{-1}(\varphi(m_1) + \varphi(m_2)) \tag{1}$$

para $m_1, m_2 \in N_m$ quaisquer e onde φ é a correspondência acima considerada.

A Tabela 1 ilustra o conjunto N_m e a operação $*$.

Tabela 1: Grupo Aditivo N_m

*	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
Do	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
Do#	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do
Re	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#
Re#	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#	Re
Mi	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	la#	Si	Do	Do#	Re	Re#
Fa	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi
Fa#	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa
Sol	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#
Sol#	Sol#	La	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol
La	La	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#
La#	La#	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La
Si	Si	Do	Do#	Re	Re#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#

Fonte: Elaborado pelos autores

Por exemplo,

$$Fa\# * La = \varphi^{-1}(\varphi(Fa\#) + \varphi(La)) = \varphi^{-1}(6+9) = \varphi^{-1}(3) = Re\#.$$

Observações:

1. Observar que estamos operando em $\mathbb{Z}_{12}$.
2. A operação pode não ter sentido musical mas tem sentido matemático.

A operação $*$ acima definida satisfaz as seguintes propriedades:

(i) O elemento neutro é o Do:

$$\begin{aligned} Do * m &= \varphi^{-1}(\varphi(Do) + \varphi(m)) \\ &= \varphi^{-1}(0 + \varphi(m)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(m) + 0) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(m)) \\ &= m, \end{aligned}$$

para todo $m \in N_m$.

(ii) Para cada elemento em N_m existe um elemento inverso. Para isso basta observar a correspondência estabelecida:

$$Do\#(1) \longleftrightarrow Si(11) \qquad Re(2) \longleftrightarrow La\#(10) \qquad Re\#(3) \longleftrightarrow La(9)$$

$$Mi(4) \longleftrightarrow Sol\#(8) \qquad Fa(5) \longleftrightarrow Sol(7) \qquad Fa\#(6) \longleftrightarrow Fa\#(6).$$

(iii) Associatividade: Para todo $m_1, m_2, m_3 \in N_m$ temos

$$\begin{aligned}
m_1 * (m_2 * m_3) &= \varphi^{-1}(\varphi(m_1) + \varphi(m_2 * m_3)) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(m_1) + \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(m_2) + \varphi(m_3)))) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(m_1) + (\varphi(m_2) + \varphi(m_3))) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(m_1) + \varphi(m_2)) + \varphi(m_3))) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(m_1 * m_2)) + \varphi(m_3)) \\
&= (m_1 * m_2) * m_3
\end{aligned}$$

Assim, o conjunto N_m tem estrutura de grupo, ou seja, o conjunto das notas musicais é um grupo. Além disso também verifica-se que

$$\begin{aligned}
m_1 * m_2 &= \varphi^{-1}(\varphi(m_1) + \varphi(m_2)) \\
&= \varphi^{-1}(\varphi(m_2) + \varphi(m_1)) \\
&= m_2 * m_1,
\end{aligned}$$

ou seja, N_m é um grupo abeliano.

3 SUBGRUPOS DO GRUPO N_M

Considerando:

$$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

e

$$N_m = \{Do, Do\#, Re, Re\#, Mi, Fa, Fa\#, Sol, Sol\#, La, La\#, Si\},$$

temos os subgrupos seguintes:

- $H_1 = N_m$ (o trivial),
- $H_2 = \{Do, Re, Mi, Fa\#, Sol\#, La\#\}$ (notas cujas posições são múltiplos de 2),
- $H_3 = \{Do, Re\#, Fa\#, La\}$ (notas cujas posições são múltiplos de 3),
- $H_4 = \{Do, Mi, Sol\#\}$ (notas cujas posições são múltiplos de 4),
- $H_5 = \{Do, Fa\#, \}$ (notas cujas posições são múltiplos de 6),
- $H_6 = \{Do\}$.

Dado que N_m é um grupo comutativo, todos estes subgrupos são normais. (Observar que a ordem de cada subgrupo é divisor da ordem do grupo N_m (Teorema de Lagrange)) ([4]).

Temos também que:

$$\langle Do\# \rangle = \{Do\#, Re, Re\#, Mi, Fa, Fa\#, Sol, Sol\#, La, La\#, Si, Do\} = N_m,$$

ou seja, operando $Do\#$ sucessivas vezes consigo mesmo obtemos o grupo N_m. Em música, isto chama-se Escala Cromática Ascendente, pois começamos numa nota e vamos subindo nota por nota até percorrer todas e voltar ao início ([2], [3]).

Por outro lado temos:

$$\langle Si \rangle = \{Si, La\#, La, Sol\#, Sol, Fa\#, Fa, Mi, Re\#, Re, Do\#, Do\} = N_m,$$

ou seja, operando Si sucessivas vezes consigo mesmo obtemos o grupo N_m. Em música, isto chama-se Escala Cromática Descendente, pois começamos numa nota e vamos descendo nota por nota até percorrer todas e voltar ao início.

Também temos:

$$\langle Sol \rangle = \{Sol, Re, La, Mi, Si, Fa\#, Do\#, Sol\#, Re\#, la\#, Fa, Do\} = N_m,$$

onde percorremos uma vez cada nota e voltamos ao início como se mostra acima. Este é o Ciclo das Quintas, que é uma representação geométrica cíclica usada por músicos e compositores para compreender e descrever relações entre as notas para harmonizar melodias, construir acordes, etc. ([2], [3]). Do mesmo modo temos:

$$\langle Fa \rangle = \{Fa, La\#, Re\#, Sol\#, Do\#, Fa\#, Si, Mi, La, Re, Sol, Do\} = N_m.$$

Este é o Ciclo da Quartas, que é inversa à anterior, ou seja, percorre as notas no sentido contrário ao Ciclo da Quintas ([3]).

Concluímos esta seção afirmando que:

$$N_m = \langle Do\# \rangle = \langle Si \rangle = \langle Sol \rangle = \langle Fa \rangle,$$

ou seja, o conjunto das notas musicais, N_m, forma um Grupo Cíclico e tem como geradores os elementos $Do\#,\ Si,\ Sol\ e\ Fa$.

4 O ISOMORFISMO

Aplicando φ em cada um dos membros da igualdade da Equação 1, obtemos:

$$\begin{aligned}\varphi(m_1 * m_2) &= \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(m_1)+\varphi(m_2))) \\ &= \varphi(m_1)+\varphi(m_2),\end{aligned}$$

de onde segue que φ é um homomorfismo.

Pela forma como está definida, então φ é sobrejetivo (epimorfismo):

$$\begin{array}{lll} \varphi(Do)=0, & \varphi(Do\#)=1, & \varphi(Re)=2, \\ \varphi(Re\#)=3, & \varphi(Mi)=4, & \varphi(Fa)=5, \\ \varphi(Fa\#)=6, & \varphi(Sol)=7, & \varphi(Sol\#)=8, \\ \varphi(La)=9, & \varphi(La\#)=10, & \varphi(Si)=11. \end{array}$$

Por outro lado,

$$\mathrm{Nuc}(\varphi)=\{x \in N_m : \varphi(x)=0\}=\{Do\},$$

de onde segue que φ é injetivo (monomorfismo). Assim temos que φ é bijetivo e portanto é um ISOMORFISMO, ou seja,

$$N_m \cong \mathbb{Z}_{12}.$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Música é, sem dúvida, a arte mais popular do mundo. Mas, talvez não seja evidente que, por trás dessa arte, existam teorias matemáticas que lhe dão suporte e que permitem explicar fenômenos musicais tais como as diversas escalas existentes, entre outros.

Há algumas vezes escassez de recursos para a implantação de técnicas alternativas de ensino, além da falta de interesse e motivação por parte de professores e alunos. Talvez usando a Música como ferramenta seja possível motivar os alunos a estudar e aprender Matemática.

Neste trabalho, de modo simples e claro, mostramos que existe um grande paralelo entre Música e Matemática, e que é possível dotar a certos conjuntos de "objetos" musicais de uma estrutura matemática de modo que seja possível identificá-los com estruturas bem conhecidas, cujo comportamento é certamente familiar, como o caso dos números inteiros. Assim, foi mostrado que existem aplicações da Matemática à Música, enfatizando seu papel na percepção de simetrias (grupos) e padrões presentes na composição musical. Acreditamos que este simples trabalho possa abrir horizontes para elaborar outros similares e até mais profundos que mostrem o poder da Matemática como ferramenta para explicar certos fenômenos musicais de maneira clara e precisa.

REFERÊNCIAS

[1] Pereira, A. e Madruga, Z., "Música e Modelagem Matemática: Representação de uma escala musical por meio de modelo matemático", Ensino da Matemática em Debate, 7(1), 1-33, 2020. https://doi.org/10.23925/2358-4122.2020v7i1p1-25

[2] A. Papadopoulos, "Mathematics and Group Theory in Music", Handbook of Group Actions, vol. 2, Lizhen Ji et al. (eds.), Somerville: International Press and Higher Education Press, 2015 (pages 525 - 572).

[3] J. Elliot, "Group actions, power mean orbit size, and musical scales", Journal of Mathematics and Music, 1-24, 2021. https://doi.org/10.1080/17459737.2020.1836686

[4] J. B. Fraleigh, "A First Course In Abstract Algebra", *Addison Wesley*, Seventh Edition, 2003.

[5] D. F. de P. S. Martins, "Escalas, Inversas e Tríades: A Matemática aplicada à Música", Dissertação de Mestrado, UENF, 2015.

BREVE BIOGRAFIA

Jaime Edmundo Apaza Rodriguez https://orcid.org/0000-0002-1359-9898

Possui graduação em Matemática pela Universidad Nacional de San Agustin Arequipa (1982), mestrado em Matemática pela Pontificia Universidad Católica Del Perú (1986) e doutorado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2002). Atualmente é professor assistente da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Geometria Algébrica (Curvas Algébricas não-Singulares), Códigos de Goppa e Criptografia com curvas Elípticas.

Murilo de Souza Penteado https://orcid.org/0000-0002-5235-3698

Graduado no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) na Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS). Atualmente é mestrando em Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto (FFCLRP - USP).

Natália Torres Colombo Alves https://orcid.org/0000-0002-5468-1257

Graduada no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) na Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS). Atualmente é mestranda pelo programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos pela UNESP - Câmpus de Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto.

Daniel Fernandes Amaral https://orcid.org/0000-0001-6331-673X

Aluno de graduação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) na Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS).