DOI: 10.22481/intermaths.v2i2.8930
Licença Creative Commons
Article | Artigo

INTERMATHS
ISSN 2675-8318
Vol. 2, N. 2, Jul - Dez 2021, p. 156 – 177

Matemática: a ciência dos padrões e da demonstração

João Domingos Gomes da Silva Junior

Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática (NEPEM), Colégio Pedro II - RJ, Brasil

diofanti@gmail.com

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática (NEPEM), Colégio Pedro II - RJ, Brasil

lmgccosta@gmail.com

Daniele Simas Pereira Alves

Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática (NEPEM) e SME São Gonçalo - RJ, Brasil

daniele.simas@gmail.com

Mathematics: the science of patterns and proof

Abstract
This paper resumes the discussion of the importance justifying and proving in elementary school. In order to justify the same equality, different arguments are used, in examples that can be presented to elementary school students. The GeoGebra software is used to obtain visual arguments that allow to intuit the usual formulas to compute cone and sphere volumes.

Keywords: Patterns; Demonstration; GeoGebra.

Resumo
Este artigo retoma a discussão da importância do uso de justificativas, provas e demonstrações no Ensino Básico. A fim de justificar uma mesma igualdade, são utilizados diferentes argumentos, em exemplos que podem ser apresentados aos alunos do Ensino Fundamental. O software GeoGebra é usado na obtenção de argumentos visuais que permitem intuir as fórmulas usuais para o cálculo dos volumes do cone e da esfera.

Palavras-chave: Padrões; Demonstração; GeoGebra.

Submetido em: 27 de julho de 2021 – **Aceito em**: 10 de dezembro de 2021

1 INTRODUÇÃO

A presença no universo que nos rodeia de padrões, numéricos ou não, é algo factual. A todo momento em algum lugar do planeta, cientistas, das mais diversas áreas, buscam soluções para algum problema que satisfaz determinadas regras e modelos. É possível encontrar variados padrões e diferentes recorrências nos mais diversos elementos da natureza, da arte e da música, nos movimentos e, naturalmente, na matemática, sendo essa última por muitos considerada a ciência dos padrões e recorrências. Neste sentido, Vale et al. referem que

> Vários fenômenos ou ocorrências naturais ou não, explicam-se, através de padrões matemáticos. É o caso do padrão da pelagem dos animais. Também a disposição das folhas no caule de algumas plantas, como o aipo ou a tabaqueira segue os números de Fibonacci. O mesmo se passa com as espirais do ananás ou da pinha, que se relacionam com a série de Fibonacci. Também num girassol se podem encontrar relações com a série de Fibonacci. Nas asas das borboletas podem-se identificar padrões geométricos, o mesmo acontecendo nas plumas do pavão e nas células de uma colmeia. A couve-flor é um exemplo real de um fractal – padrão decrescente. Uma estrela, ao sucumbir, produz dois clarões que são simétricos. Assim como é possível identificar rotações e simetrias numa maçã. [1, p. 4].

Diversos estudos têm sido feitos a fim de ratificar a importância dos padrões e das fórmulas de recorrência no processo de ensino e aprendizagem. Autores como Lee [2], Steen [3], e Zazkis [4], salientam a importância dos padrões e regularidades para a Matemática e seu ensino.

Ao falar em padrões, normalmente, se associa essa ideia apenas a padrões visuais. Contudo, na Matemática, o conceito de padrão é usado quando se podem detectar regularidades em um arranjo de números, de formas, de cores ou de sons. Assim, um dos propósitos da Matemática é descobrir a regularidade onde há aparente desordem e confusão, de tal forma que daí seja possível extrair uma estrutura e invariância.

Objetivando contribuir para uma aprendizagem mais significativa, é próprio da busca de padrões e fórmulas de recorrência, deter o olhar sobre diversas situações, analisar propriedades de forma intuitiva, refletir sobre casos particulares, procurando chegar à generalização, formular conjecturas e procurar, posteriormente, a possível validação destas. A propósito, Keith Devlin diz

> [...] a Matemática é a ciência dos padrões, refletindo assim a ideia de transversalidade dos padrões, o que sugere que, mais do que um típico da Matemática, constituem uma qualidade associada a esta ciência. É uma forma de admirar e compreender o mundo em que vivemos, tanto a nível físico, como biológico e até mesmo sociológico, bem como o mundo escondido das nossas mentes, tornando visível o que é invisível ao olhar. [5, p. 9].

É pertinente destacar que o papel dos padrões e das fórmulas de recorrência se faz presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). É notória a importância atribuída aos padrões, já que estes permeiam vários temas do currículo, não só da Matemática, como também de outras disciplinas, além de promoverem uma melhor compreensão das suas respectivas capacidades matemáticas. Desta forma, espera-se construir um conhecimento matemático mais profundo, duradouro e sólido e diz-se

> A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa é álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. [6, p. 269].

Já nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN) há uma abordagem sobre a relevância do uso das generalizações em sala de aula, mesmo que diga apenas respeito ao campo algébrico:

> [...] o estudo da álgebra constitui uma oportunidade bastante significativa para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e de generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. [7, p. 115].

A procura de regularidades e o recurso a definições por recorrência em atividades de sala de aula possibilita ao aluno o estabelecimento de conexões entre a Matemática e o mundo real, ao mesmo tempo que constrói uma referência mais positiva da disciplina. Desta forma, torna-se uma estratégia que atrai o interesse do alunado e, além disso, induz a novas descobertas e a diferentes investigações matemáticas.

Na próxima seção, Seção 2, é feita uma discussão sobre a importância da demonstração. De seguida, na Seção 3 é colocado o problema clássico da soma dos n primeiros quadrados perfeitos e a consequente identidade, que será provada através de diferentes técnicas (geométricas ou algébricas). Na Seção 4, como aplicação dessa mesma identidade são apresentadas demonstrações das fórmulas do volume do cone e da esfera, que recorrem ao uso do GeoGebra. Para finalizar, na Seção 5 são apresentadas algumas conclusões.

2 DEMONSTRAR OU NÃO DEMONSTRAR, EIS A QUESTÃO

A Matemática é uma ciência dedutiva, em que apenas os axiomas são aceitos como verdadeiros sem demonstração. A maioria das afirmações matemáticas para serem aceitas como verdadeiras carecem de prova, pelo que a prática de demonstrar, conjuntamente com as ações de conceituar, definir, testar para intuir, conjecturar, generalizar e particularizar, é intrínseca ao pensamento matemático.

Quando se fala em demonstração esse pensamento não é solitário, pois se por um lado é necessário que o indivíduo por si se empenhe nela, por outro, existe a necessidade da troca de ideias do indivíduo com os seus pares, e isto faz com que a demonstração seja um fato social. A troca de conjecturas e a discussão das mesmas é muito importante.

Convém salientar que o ato de demonstrar é diferente quando se trata de pesquisa ou de sala de aula, enquanto que a demonstração em pesquisa tem o papel de convencer, na sala de aula da educação básica o seu papel primordial é o de explicar. Saber em que altura da educação básica os estudantes devem ser confrontados com a prática da demonstração, seja para as demonstrações empíricas ou para as dedutivas, tem sido objeto de estudo e discussão de diversos autores. Sobre esta questão, Cydara Ripoll [8], [9] coloca alguns questionamentos que se traduzem da seguinte forma:

– É possível o pensamento matemático, que oportuniza a compreensão dos procedimentos da Matemática como ciência e que culmina com a demonstração, ser incluído no currículo escolar, e desde os seus anos iniciais?

– Em caso afirmativo, como podemos familiarizar, gradativamente, os alunos da Escola Básica com o pensamento matemático, especialmente com a demonstração?

Para Ripoll, a resposta à primeira questão é sim! Mas, salienta ser fundamental que o professor saiba escolher os momentos adequados para a introdução da prática da argumentação visando demonstrar afirmações, tendo em atenção que a escolha desses momentos deve ter como preocupação a promoção da compreensão por parte dos alunos. É também necessário ter presente o nível etário e a maturidade dos alunos para poder optar por determinado tipo de prova, tendo o cuidado de não ir de encontro à ideia errada de associar o uso da linguagem matemática simbólica à prática de argumentar ou demonstrar.

Também Trevisan [10] se mostra favorável ao uso da demonstração na educação básica, questionando a importância da (não) aceitação dos conteúdos estudados como verdades absolutas, no sentido da busca de aperfeiçoamento destes. E, salienta

> Da mesma forma que o caráter dogmático quando atribuído a área de referência não contribui com o avanço da mesma, na educação esse caráter priva o aluno da descoberta, da possibilidade de poder refletir sobre a construção dessa ciência, afastando assim a educação escolar da possibilidade de um ensino mais significativo. [10, p. 141].

Segundo D'Amore [11, p. 332], toda a atividade no campo matemático compreende três níveis: o formal que é relativo à sua estrutura lógico dedutiva; o algorítmico que é relativo ao aparato instrumental; e, o intuitivo que diz respeito à aceitação subjetiva de um enunciado matemático como algo evidente e certo.

Para realizar uma atividade demonstrativa utiliza-se o raciocínio que é um processo individual, interno, que, partindo de informações conhecidas, conduz à produção de informações novas. A atividade termina com um processo de validação que é um processo dialético pois consiste numa sucessão de ações que permite aceitar ou refutar a validade de um enunciado. Vários autores se detiveram na análise do que consiste o ato de demonstrar e em distinguir as várias atividades e processos envolvidos no mesmo.

Segundo Almouloud [12, p. 2], "A explicação situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático". Assim, ao conseguir convencer a comunidade, aquela passa a ter um "estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição verdadeira ou não" [12, p. 2]. Sobre as provas e o que as distingue das demonstrações, ele refere:

> As provas são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:
>
> - são as únicas aceitas pelos matemáticos
> - respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas
> - trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência. [12, p. 3].

É comum, numa fase inicial, um estudante do ensino básico não conseguir distinguir, argumentação de demonstração, considerando-as como a mesma atividade. Apesar de ambas serem sequências finitas de proposições, são processos bem diferentes. Enquanto que a primeira se apoia na lógica natural, podendo ter em consideração o momento em que é efetuada, e pode ser considerada como um ato de convencimento dos outros, a segunda, apoiando-se na lógica formal, é atemporal e é um ato de auto convencimento.

Nos primeiros contatos com estes processos, os alunos começam por argumentar, passando num momento posterior a demonstrar. A passagem da argumentação à demonstração foi estudada por Duval [22] que refere dois tipos de passagem que distinguem o tipo de raciocínio:

– a inferência, ou seja , cada passo do raciocínio que deve ocorrer com base em uma regra, que depende de uma teoria (axiomas, teoremas, definições, ...) ou da estrutura de uma língua (oposições semânticas, negações, conectores, ...)

– o encadeamento, ou seja, a transição que permite obter um novo passo, sendo que a conclusão de um passo é o ponto de partida do seguinte.

Ainda sobre este assunto, segundo D'Amore [11, p. 360], Duval procurou "compreender se a passagem da argumentação à demonstração [...] cria uma ruptura cognitiva ou se, ao invés, existe uma espécie de continuidade" e acrescenta às argumentação e demonstração um terceiro tipo de atividade, a explicação que é "o que dá razões e motivações para tornar compreensível algo".

Um aspeto que tem sido muito discutido ao longo dos tempos é o que se considera aceitável como prova. Durante muito tempo, o mundo matemático apenas aceitava uma demonstração se esta fosse escrita em linguagem matemática formal e tivesse um determinado formato. Segundo Boero [13, p. 28], a definição de demonstração mais famosa, devida a Hilbert, requer que esta seja totalmente escrita em linguagem formal, considerando as regras lógicas como parte do conteúdo matemático. Esta é uma posição extrema no que podemos classificar como a família de todas as definições ou práticas que colocam a ênfase da demonstração na sua conformidade com um conjunto de regras.

Apesar das demonstrações presentes na obra de Euclides satisfazerem uma forma muito precisa, ele nunca apresentou o que entendia ser uma demonstração. O ato de demonstrar, pelos matemáticos gregos, foi sofrendo variações consoante a escola filosófica a que pertenciam e vários processos de demonstração foram mais ou menos utilizados: do modelo euclidiano dedutivo, às provas por exaustão passando pela redução ao absurdo e ao pensamento mecânico do método de Arquimedes.

Para Trevisan [10], o uso da prova e da demonstração como recurso no processo de ensino-aprendizagem, por se tratar da base da ciência matemática, á válido "mas deve ser profundamente articulado com outros objetivos, para que a utilização das mesmas torne-se realmente significante". Um dos pensadores matemáticos que mais se destacou na defesa da importância da prova na construção do conhecimento matemático é Imre Lakatos (1922-1974) que resume o seu método das provas e refutações em três normas, a seguir resumidas:

1. Dada uma conjectura, nos dispomos à comprová-la ou à refutá-la. Procuremos contra-exemplos. Façamos uma análise cuidadosa da prova.

2. Encontrado um contra-exemplo global, a conjectura deve ser descartada! No entanto poderá e deverá ser reformulada tendo em atenção o que esteve na origem de sua rejeição.

3. Encontrado um contra-exemplo local, analise-se para ver se ele não é também global. Se isso ocorrer, aplique 2.

2.1 A demonstração na Educação Básica

Parece ser consensual que a apresentação ao estudante de resultados (enunciados) como verdades absolutas sem a necessidade de os construir e/ou de os justificar é contrária a uma construção significativa do conhecimento. Essa prática vai no sentido oposto às tendências em Educação Matemática uma vez que "desde as suas primeiras experiências no campo da matemática, é importante ajudar as crianças a compreenderem que as afirmações deverão ser sempre justificadas" [14, p. 61].

Nas salas de aula da educação básica brasileira não é habitual fazer uso da argumentação e da prova/demonstração como recurso do processo ensino-aprendizagem, o que reflete as opções tomadas por grande parte dos autores dos livros didáticos, como refere Barlati

> Com o decorrer do tempo os livros didáticos deixaram de trazer atividades sobre demonstrações e o professor perdeu o costume de exigir que seus alunos justifiquem suas respostas, um hábito que faz parte do estudo de demonstrações. [15, p. 29].

As razões para esta situação prendem-se com aspetos que vão, desde a formação de professores, até a uma cultura de um ensino imediatista para concursos. Assim, estimular o raciocínio, aprofundar conceitos, justificar, ou até mesmo demonstrar, passam para segundo plano, dando lugar a um ensino de fórmulas e "truques" e a Matemática deixa de cumprir o previsto nos documentos oficiais:

> [...] é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, a situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimento em outras áreas curriculares. [7, p. 25].

O uso frequente das demonstrações em sala e aula contribui para o desenvolvimento dessas capacidades, nomeadamente na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo, contribuindo para a formação básica visando o exercício da cidadania. Para a BNCC, "a dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental", sendo tais atribuições ampliadas no ensino médio, propondo

> [...] Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas por meio da observação de padrões, incluindo as tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. [16, p. 523].

Perante um enunciado a ser provado, alguns questionamentos se devem colocar e algumas decisões precisam ser tomadas. Qual o método de demonstração a ser usado? Para Morais

Filho [17, p. 122] a escolha de determinado método de demonstração "depende do resultado em si, da existência de uma teoria eficaz para atacar o problema e, muitas vezes, de uma escolha possível e pessoal do tipo de argumentação que poderá ser usada naquela demonstração".

Alguns aspetos que devem estar presentes ao começar uma prova: O que quero provar? Qual é a Hipótese? Qual é a Tese? Conheço algum resultado semelhante? Que propriedades posso usar? Posso usar um esquema auxiliar? Posso recorrer a imagens? Estou a usar uma notação adequada? Como escrever a demonstração? Estou a usar todos os dados?

As principais técnicas utilizadas para demonstrar que Hipótese $\Rightarrow$ Tese são:

- **Prova direta**: assume-se a veracidade de Hipótese e através do encadeamento lógico de axiomas e outras proposições estabelece-se a veracidade da Tese.

- **Prova por contradição**: assume-se que a Hipótese é verdadeira e admite-se que a Tese é falsa, ou seja, que a Negação da Tese é verdadeira, deste modo vai se chegar a uma contradição, pelo que a Tese é necessariamente verdadeira.

- **Prova por contraposição**: recorre à equivalência lógica das proposições (Hipótese $\Rightarrow$ Tese) e (Negação da Tese $\Rightarrow$ Negação da Hipótese), bastando provar a última proposição por prova direta.

- **Prova por construção**: se baseia no processo de construir um exemplo concreto com determinada propriedade para construir o caso geral.

- **Prova por exaustão**: divide-se o problema em um número finito de casos (que esgotam todas as possibilidades) e provando a veracidade para cada um, separadamente.

- **Prova por indução**: Dado um conjunto $\mathcal{S}$, ordenado tal que todo o seu subconjunto não vazio tem um elemento mínimo e uma propriedade, $\mathcal{P}(k),\ k \in \mathcal{S}$. Então:

  (1) se a propriedade é válida para o menor elemento de $\mathcal{S}$

  (2) e $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$

  De (1) e (2) então, $\mathcal{P}(k),\ \forall k \in \mathcal{S}$.

- **Prova pela negativa**: prova que a proposição é falsa, refutando-a. Em geral, apresenta-se um contra-exemplo.

Visando reafirmar a importância do uso da argumentação em sala de aula, algumas das colocações acima referidas e alguns dos processos agora descritos serão retomados na próxima seção onde se irá proceder à prova de uma igualdade que consideramos estar de acordo com as competências a desenvolver pelos estudantes do ensino básico.

3 VAMOS DEMONSTRAR?

Como visto na seção anterior, o uso da justificação, mesmo que seja intuitiva, deve ser fomentado desde os anos iniciais da educação básica, visando, assim, ampliar o horizonte matemático dos estudantes, promover o desenvolvimento da capacidade de abstração, do raciocínio e estimular o seu senso crítico. Mas, deve-se ir mais longe, os estudantes devem sentir que há suposições e regras específicas que permitem concluir se determinado argumento é, ou não, válido. No entanto, é fundamental ter presente que se deve procurar estimular o uso de processos adequados à faixa etária dos estudantes, entre os quais se encontra o método de tentativa e erro ou de experimentação não sistematizada.

Outro aspecto importante é a sistematização do raciocínio, a observação de padrões e o estabelecimento de conjecturas. Estas terão que ser validadas e neste processo, caso não sejam verdadeiras, antes de serem refutadas poderão ser aperfeiçoadas. É na validação de conjecturas que se utilizam alguns dos métodos de demonstração atrás referidos, destacando-se o uso da indução matemática, bem como a prova por absurdo ou por contraposição.

Partindo da variante mais simples do problema clássico que pergunta "Quantos quadrados estão representados num tabuleiro de xadrez?" e da sua generalização que quer saber "Quantos quadrados existem num tabuleiro de xadrez de lado n?", que conduz a uma igualdade conhecida, irão ser abordadas as temáticas da conjectura e da definição por recorrência e serão, também, apresentadas alumas provas acessíveis a alunos da educação básica.

Este problema e suas variantes têm sido apresentados em vários trabalhos e por diferentes abordagens. Jo Boaler [18] sugere-o como um tipo de problema que pode fazer com que os alunos, desde os anos iniciais, passem a encarar a Matemática como algo interessante e desafiador. Como diz Belfort [19], este problema é interessante, não só pela diversidade de argumentos possíveis de serem utilizados, mas também pelas "diversas explorações matemáticas que podem ser feitas enquanto procuramos uma solução" e por "levar o professor a refletir sobre a possibilidade de discutir argumentos como esses com seus alunos no ensino médio." [19, p. 36]. A abordagem proposta por Rodrigues [20, pp. 76-79] passa pelo uso de softwares de geometria dinâmica e recurso às diagonais dos quadrados. Assim, diferentes propostas, com abordagens numérica e geométrica conduzem à conjectura de que o número pretendido, denotado por q_n, é igual à soma dos n primeiros quadrados perfeitos:

$$q_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 \tag{1}$$

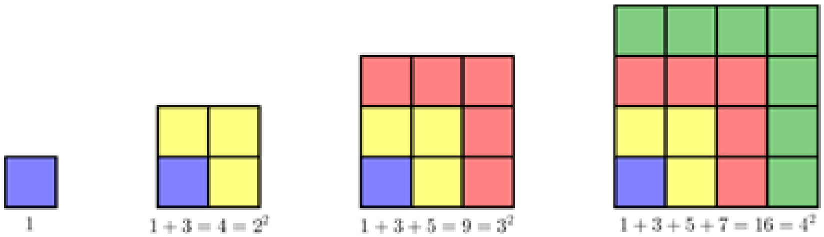
Duas questões se colocam:

– A conjectura é verdadeira?

– Existe alguma expressão mais simples que traduza essa soma?

Para responder á primeira questão vamos começar por ver que, conhecido o número de quadrados representados em um quadrado de lado $n-1$, que denotamos por q_{n-1}, o número de quadrados representados em um quadrado de lado n é dado por $q_n = q_{n-1} + n^2$.

Figura 1: Primeiros quadrados perfeitos como soma de números ímpares consecutivos.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Ora, num quadrado de lado n existe apenas 1 quadrado com lado n, que é o próprio quadrado, mas existem 3 quadrados com lado $n-1$ e, assim sucessivamente, de forma que com lado 1 há $2n-1$ quadrados. Temos, assim, $1+3+\cdots+(2n-1)$ novos quadrados. Mas, $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$ (Figura 1) e como $q_1 = 1$, o número de quadrados é dado recursivamente por

$$\begin{cases} q_1 & = & 1 \\ q_n & = & q_{n-1} + n^2, \ \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{2}$$

Esta é uma recorrência de primeira ordem não homogênea. Atribuindo sucessivos valores a n se tem que o sistema de n igualdades seguinte:

$$\begin{array}{rcl} q_1 & = & 1 \\ q_2 & = & q_1 + 2^2 \\ & \vdots & \\ q_n & = & q_{n-1} + n^2. \end{array} \tag{3}$$

Adicionando as n igualdades de (3), membro a membro, vem

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n-1} q_i + \sum_{i=1}^{n} i^2 \tag{4}$$

resultando,

$$q_n = \sum_{i=1}^{n} i^2. \tag{5}$$

O que permite responder de forma afirmativa à primeira questão colocada.

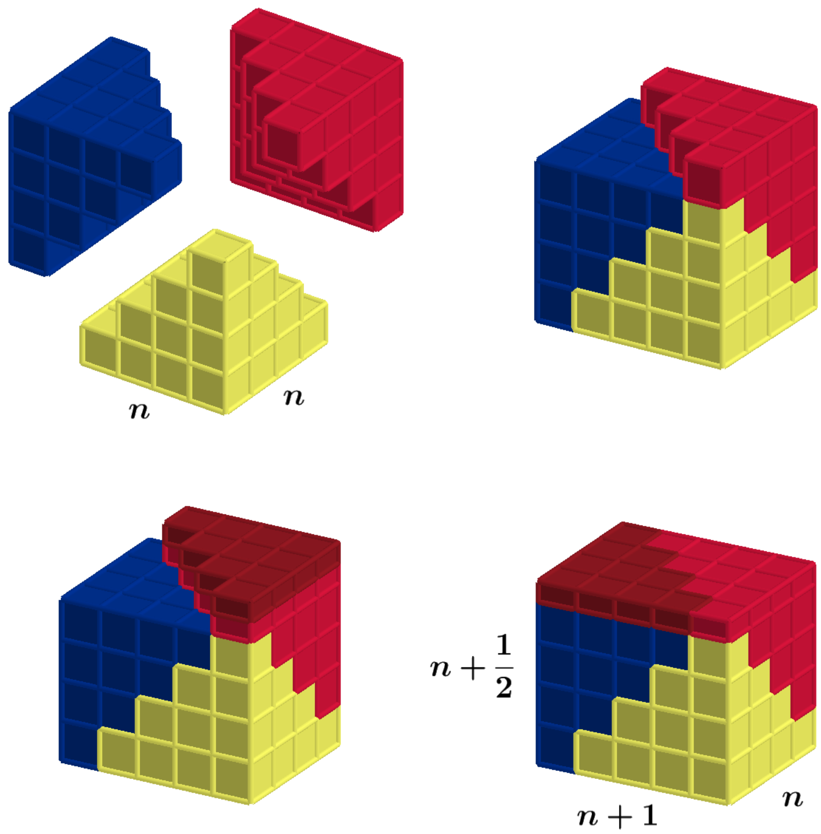
Vamos agora ver a resposta à segunda questão e mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{6}$$

As provas iniciais que serão desenvolvidas são exclusivamente geométricas e encontram-se entre as nove provas visuais apresentadas por Nelsen [21].

Prova 3.1.

Figura 2: Prova geométrica da igualdade (6).



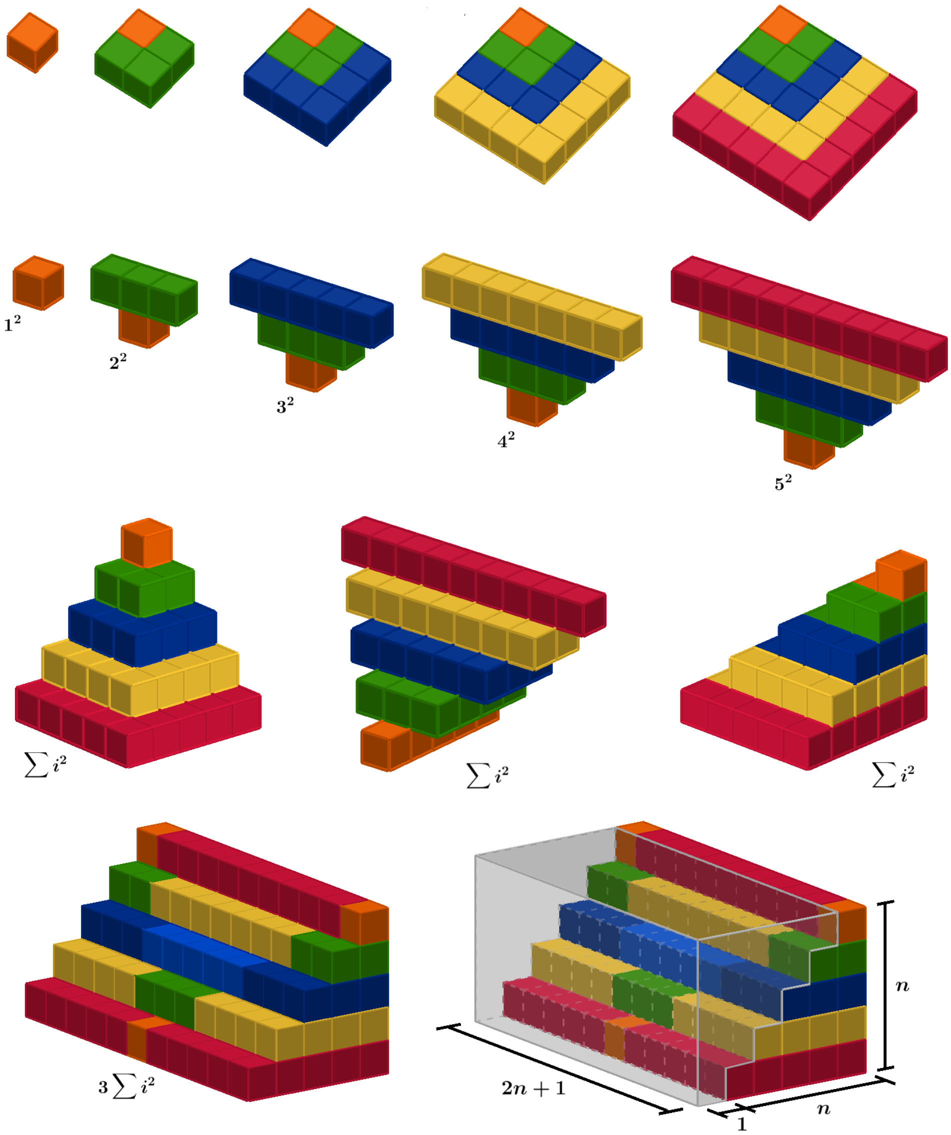
Fonte: [21, p. 77]

Repare que cada um dos três blocos (Figura 2) resulta de sobrepor camadas formadas por um número de cubos igual aos quadrados perfeitos. Justapondo os três blocos forma-se um paralelepípedo e "sobram" alguns cubos, que cortados ao meio irão originar uma camada completa.

A segunda prova é também geométrica e sem palavras. É apresentada por Rodrigues em [20] e deve-se a Welmuth e Schuh. Repare-se que a soma dos quadrados é organizada de três formas distintas (Figura 3) que quando justapostas formam um bloco que é metade do paralelepípedo de dimensões n, $n+1$ e $2n+1$.

Prova 3.2.

Figura 3: Prova geométrica da igualdade (6).

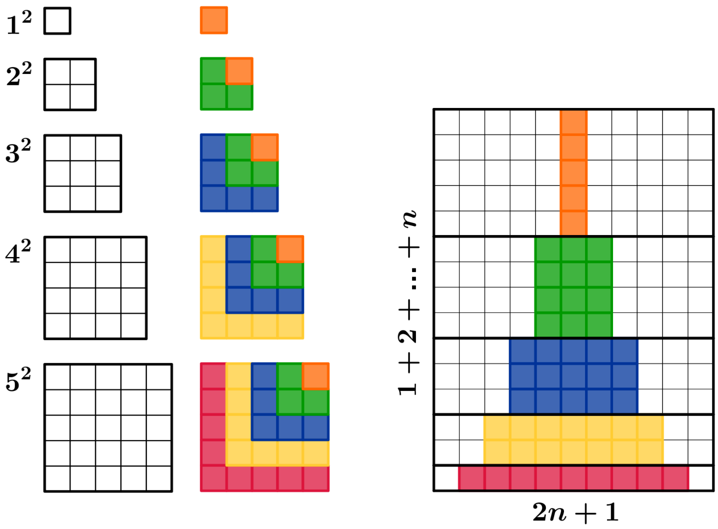


Fonte: [20, p. 88]

A terceira prova, segundo Rodrigues [20, p. 83], "faz uso de agrupamentos de quadrados 2D" e é devida a Gardner (1973) e a Kalman (1991), que a terão apresentado em versões independentes. A versão original apresentada em [21, p. 77] é a preto e branco enquanto que a apresentada em [20, p. 83] (Figura 4) é colorida.

Prova 3.3.

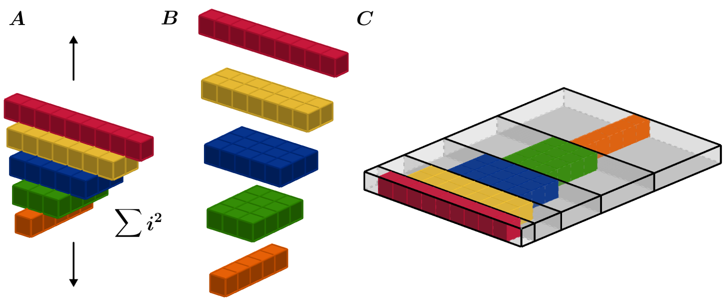
Figura 4: Agrupamentos de quadrados coloridos.



Fonte: [20, p. 83]

É interessante notar a sugestão de Rodrigues [20], de reorganização do bloco central usado na Prova 3.2 (Figura 3) de modo a obter a imagem da Prova 3.3 (Figura 5). Tratando-se, como ele salienta, de uma passagem do universo 3D para o 2D.

Figura 5: Da prova tridimensional à prova bidimensional.



Fonte: [20, p. 89]

Vamos, agora apresentar duas provas numéricas, sendo a primeira por indução finita.

Prova 3.4. A prova de uma propriedade por indução tem dois passos. No primeiro é verificada a validade da propriedade para o menor elemento do conjunto e no segundo passo, admitindo que a propriedade é válida para um número, prova-se que será também válida para o seu consecutivo.

(i) Vamos inicialmente verificar a validade da igualdade para o menor elemento do conjunto, ou seja, $n = 1$. De fato, $1^2 = \dfrac{(1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1))}{6} = \dfrac{(2 \cdot 3)}{6}$ é uma proposição verdadeira.

(ii) Hipótese de indução: Admita-se que a igualdade é válida para n, ou seja,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(iii) Tese : A igualdade é válida para $n+1$, ou seja,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Pela hipótese de indução temos que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Adicionando $(n+1)^2$ a ambos os membros da igualdade acima

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

No segundo membro, fatorando, expandindo e fatorando novamente, resulta

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

demonstrando assim a igualdade.

Ao mostrar que a igualdade é válida para $n = 1$ e que, sendo válida para n também será válida para $n+1$, foi mostrada a sua validade para todo o n natural. ■

A próxima prova é uma prova direta, em que utilizando a expansão do cubo de um binômio e princípios de equivalência da relação de igualdade, se vai construindo a expressão que se pretende provar.

Prova 3.5. Atendendo a que $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ e atribuindo a x os valores inteiros $1, 2, 3, \cdots, n$, podemos escrever:

$$\begin{array}{rcl} (1+1)^3 & = & 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ (2+1)^3 & = & 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ & \vdots & \\ (n+1)^3 & = & n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1. \end{array} \tag{7}$$

Somando as n igualdades membro a membro resulta

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n. \tag{8}$$

Os cubos que figuram no primeiro membro simplificam com os do segundo membro restando apenas $(n+1)^3$ e 1^3. Resultando em

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + n. \tag{9}$$

De certo que a soma dos n primeiros números naturais é $\dfrac{n(n+1)}{2}$, se pode escrever

$$(n+1)^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1). \tag{10}$$

Isolando o termo que tem a soma desejada, temos

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1). \tag{11}$$

Que, ao ser fatorada, pode ser reescrita por

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)\left(n^2 + 2n + 1 - \frac{3n}{2} - 1\right). \tag{12}$$

Ou melhor,

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{13}$$

Portanto segue que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{14}$$

■

A identidade anterior é usada para justificar diversos resultados conhecidos dos estudantes do Ensino Médio, nomeadamente, os que dizem respeito às fórmulas do volumes do cone e da esfera e que serão discutidas na próxima seção.

4 APLICAÇÕES

A atividade proposta a seguir é destinada, principalmente, a estudantes do Ensino Médio. A prática consiste em demonstrar as fórmulas dos volumes do cone e da esfera recorrendo à ideias empregadas no método de exaustão e nas técnicas infinitesimais usadas por matemáticos gregos, hindus e islâmicos.

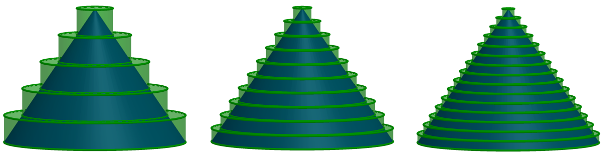
A utilização do software GeoGebra se tornou um facilitador em todo o processo, desde a simples visualização do problema ao desenvolvimento final da demonstração. O recurso à ferramenta controle deslizante permite observar e discutir o que ocorre quando o número de divisões do segmento aumenta, intuindo a passagem ao limite e a obtenção dos já referidos volumes pela soma do volume de cilindros. Além disso, a possibilidade da construção de cortes meridionais desses sólidos ajudou em toda a estruturação da demonstração.

Para este tipo de atividade, a identidade sobre a soma dos n primeiros quadrados perfeitos deve ser apresentada em algum momento anterior. Sendo assim, o êxito de todo o processo se deve à manipulação do applet pelos estudantes. A observação do que ocorre com a variação do número de cilindros, através do manuseio do controle deslizante, e a relação desta com as aproximações dos volumes, gera, aos estudantes, diversos questionamentos, que irão permitir consolidar as ideias.

4.1 Volume do Cone

Vamos começar por deter a nossa atenção no cone de revolução $(\mathscr{C})$ de raio R e altura H. Consideremos uma sequência de n cilindros sobrepostos, todos com a mesma altura, igual a $\frac{H}{n}$, tais que as suas bases inferiores coincidam com seções do cone, e cujos eixos estejam sobrepostos ao eixo do cone como se pode ver na Figura 6.

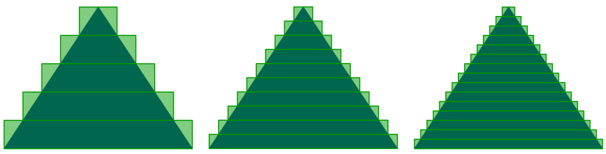
Figura 6: Visão do cone com aproximação por cilindros.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Consideremos um corte meridional passando pelo vértice do cone. Os cilindros serão numerados de baixo para cima, ou seja, o cilindro 1 (c_1) é aquele cuja base coincide com a base do cone, o cilindro 2 (c_2) é o cilindro imediatamente acima dele e, assim sucessivamente, até o cilindro n (c_n), que contém o vértice do cone como se pode observar na Figura 7.

Figura 7: Visão do corte cone com aproximação por cilindros.



Fonte: Elaborada pelos autores.

A soma dos volumes desses cilindros é

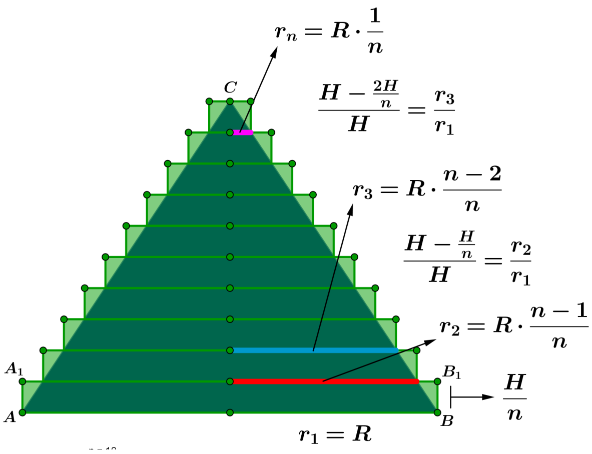
$$V(\mathscr{C}) \approx \sum_{i=1}^{n} V(c_i) \tag{15}$$

Aumentando o número de cilindros, a altura destes será cada vez menor e o valor que se obtém para $V(\mathscr{C})$ será cada vez mais próximo do volume do cone, processo ilustrado acima (Figura 7). Assim, ao fazermos o número de cilindros crescer infinitamente, podemos representar esta soma por

$$V(\mathscr{C}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V(c_i) \tag{16}$$

Sabendo que o raio de c_1 é igual a R, para encontrar os raios dos cilindros subsequentes, será necessário recorrer à semelhança de triângulos. Vale destacar que os raios dos cilindros vão depender de n e R, como podemos observar na Figura 8.

Figura 8: Representação dos raios e alturas dos cilindros.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Para encontrar o raio da base de c_2, que denotaremos por r_2, vamos considerar a semelhança entre o triângulo ABC de altura H e base $2R$ e o triângulo A_1B_1C de altura $H - \frac{H}{n} = \frac{H(n-1)}{n}$ e base $2r_1$. Da proporcionalidade entre os lados temos $\frac{\frac{H(n-1)}{n}}{H} = \frac{r_2}{R}$, resultando $r_2 = \frac{R(n-1)}{n}$.

Procedendo de forma análoga, para encontrar o raio da base de c_3, vamos considerar a semelhança entre o triângulo ABC de altura H e base $2R$ e o triângulo A_2B_2C de altura $H - \frac{2H}{n} = \frac{H(n-2)}{n}$ e base $2r_2$. Obtendo $\frac{\frac{H(n-2)}{n}}{H} = \frac{r_2}{R}$, resultando $r_2 = \frac{R(n-2)}{n}$.

Continuando o processo, se pode calcular as informações sobre o cilindro c_i, a saber: $r_{i-1} = \frac{R(n-i+1)}{n}$ e $V(c_i) = \frac{H}{n}\pi R^2 \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^2$.

Assim $V(\mathscr{C})$ será aproximado pela soma

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} V(c_i) &= \frac{H}{n}\pi R^2 \left(1 + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \\
\sum_{i=1}^{n} V(c_i) &= \frac{H}{n}\pi R^2 \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \\
\sum_{i=1}^{n} V(c_i) &= \frac{H}{n^3}\pi R^2 \left(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Utilizando a expressão da soma dos n primeiros quadrados estudada na seção anterior, temos

$$\sum_{i=1}^{n} V(c_i) = \frac{H}{n^3}\pi R^2 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right). \tag{18}$$

Que, após efetuar simplificações, resulta em

$$\sum_{i=1}^{n} V(c_i) = \frac{H}{n^3}\pi R^2 \left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) \tag{19}$$

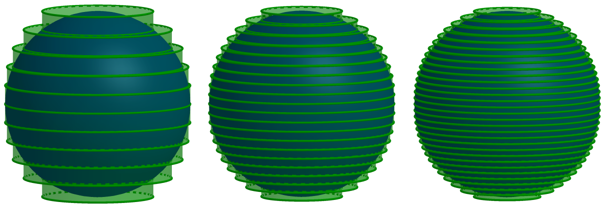
Passando ao limite, e tendo em atenção que, quando $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ e $\frac{1}{n^2} \to 0$ vem

$$\begin{aligned} V(\mathscr{C}) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V(c_i) &&= \lim_{n\to\infty} \frac{H}{n^3}\pi R^2 \left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} H\pi R^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) &&= \frac{\pi R^2 H}{3}. \qquad \blacksquare \end{aligned} \tag{20}$$

4.2 Volume da Esfera

Analogamente ao problema anterior, começamos por considerar uma esfera $\mathscr{S}$ de raio R. Considere uma sequência de n cilindros sobrepostos todos de mesma altura, ou seja, igual a $\frac{R}{n}$ como se pode observar na Figura 9. Consideremos um corte meridional, passando pelo centro

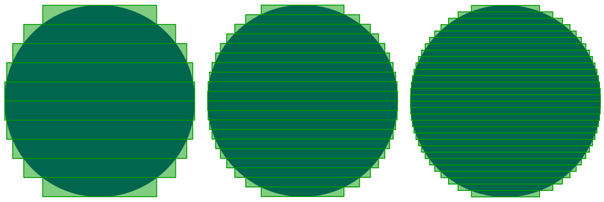
Figura 9: Visão da esfera com aproximação por cilindros.



Fonte: Elaborada pelos autores.

da esfera, como se pode ver na Figura 10. Atendendo à simetria desse corte, iremos recorrer

Figura 10: Visão do corte da esfera com aproximação por cilindros.



Fonte: Elaborada pelos autores.

apenas à sua metade e, consequentemente, o resultado final será multiplicado por 2.

Como já mencionado anteriormente, consideremos uma sequência de n cilindros sobrepostos, todos com a mesma altura, igual a $\frac{R}{n}$, e tais que as suas bases inferiores coincidam com seções da esfera paralelas ao plano de corte da mesma.

Numeremos esses cilindros de baixo para cima, ou seja, o cilindro 1 (c_1) é aquele cuja base coincide com o equador da esfera, o cilindro 2 (c_2) é o cilindro imediatamente acima dele e assim sucessivamente até o cilindro n (c_n), cuja base superior é tangente à esfera. O dobro da soma desses cilindros aproxima por excesso o volume da esfera. Assim,

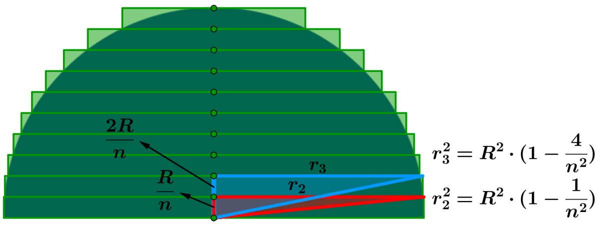
$$V(\mathscr{S}) \approx 2\sum_{i=1}^{n} V(c_i). \tag{21}$$

Ao fazer o número de cilindros crescer infinitamente a aproximação do volume fica cada vez melhor e podemos representar esta soma por

$$V(\mathscr{C}) = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V(c_i). \tag{22}$$

Os raios dos cilindros dependem de n e de R e para determinar todos eles será necessário utilizar o teorema de Pitagoras, como ilustrado na Figura 11. O raio de c_1 é $r_1 = R$, que é também a hipotenusa de cada triângulo retângulo que tem por catetos r_i (o raio do cilindro c_i) e $\frac{R(i-1)}{n}$. Assim, $r_i^2 = R^2\left(1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right)$ e o volume de c_i será dado por $V(c_i) = \frac{\pi R^3}{n}\left(1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right)$.

Figura 11: Representação dos raios e alturas dos cilindros.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Somando todos os cilindros da metade da esfera, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} V(c_i) &= \frac{\pi R^3}{n}\left(1 + 1 - \frac{1}{n^2} + 1 - \frac{4}{n^2} + \cdots + 1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{\pi R^3}{n}\left(n - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi R^3}{n}\left(n - \frac{1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Adaptando a expressão apresentada na seção anterior para a soma dos $n-1$ primeiros quadrados, temos após simplificações

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} V(c_i) &= \frac{\pi R^3}{n}\left(n - \frac{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}{n^2}\right) \\ &= \frac{\pi R^3}{n}\left(\frac{6n^3 - 2n^3 + 3n^2 - n}{6n^2}\right) \\ &= \pi R^3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Passando ao limite, resulta que o volume da esfera é

$$V(\mathscr{C}) = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} V(c_i) = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \pi R^3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right), \tag{25}$$

tendo em atenção que quando $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ e $\frac{1}{n^2} \to 0$, acarreta

$$V(\mathscr{C}) = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad \blacksquare \tag{26}$$

5 CONCLUSÃO

Todos sabemos que a demonstração é um patrimônio da matemática. Mesmo com todo advento tecnológico e computacional, continua sendo o meio de convencimento da veracidade de um resultado. É gratificante e belo desenvolver no aluno, desde os primeiros anos, o gosto pela argumentação e observar todo o processo para obter uma demonstração mais formal. A utilização do recurso à prova e à necessidade de argumentação deve ser estimulada desde o cedo e pode ser aplicada pelos alunos, tanto na explicação de resultados, como também na resolução de exercícios e desenvolvimento de resultados/fórmulas já conhecidas e por eles utilizadas.

Sabe-se que há uma vasta discussão sobre o tema e que há divergências entre profissionais na área de educação. Contudo, vale ressaltar que para promover o pensamento crítico e criativo, visando desenvolver a autonomia dos alunos, torna-se necessário propor tarefas que sejam facilitadoras e promotoras das várias etapas do processo de preparação e construção de argumentos e de dedução por forma a que eles cheguem a construir suas demonstrações. Nossos alunos necessitam estar acostumados a desenvolver o seu raciocínio lógico, ou seja, a habilidade de argumentar e criar justificativas deve ser construída ao longo dos anos escolares e um aspeto fundamental, eles precisam ser estimulados a comunicar suas ideias seja por palavras, por esquemas ou por recurso à linguagem própria da matemática.

Assim, esperamos contribuir para levantar novamente a discussão sobre esse tema delicado, apresentando exemplos que podem ser utilizados tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. Desta forma tentamos seguir por um caminho que permita desenvolver nos alunos a utilização dos mais variados potenciais que as provas e demonstrações matemáticas podem oferecer a fim de construir e consolidar o seu saber matemático.

REFERÊNCIAS

[1] I. Vale, P. Palhares, I. Cabrita, A. Borralho. "Os padrões no ensino e aprendizagem de álgebra". Lisboa, SEM-SPCE, 2007.

[2] L. Lee, *An initiation into algebraic culture through generalization activities.* in *Approaches to algebra - Perspectives for Research and Teaching*, 1th ed. vol.18, Springer Netherlands, pp. 87-106, 1996. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3

[3] L.A. Steen, "The science of patterns", *Science*, vol. 240, Issue 4852, pp. 611-616, 1988. https://doi.org/10.1126/science.240.4852.611

[4] R. Zazkis, P. Liljedahl, "Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation". *Educational Studies in Mathematics*, vol. 49, Issue 3, pp. 379–402, 2002.

[5] K. Devlin, *Matemática: a ciência dos padrões*, Porto: Porto Editora, 2002.

[6] Brasil, *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Ministério da Educação - MEC, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2017.

[7] Brasil, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - Ensino Fundamental: terceiro e quarto ciclos*, Ministério da Educação - MEC/SEF, Brasília, 1998.

[8] C. C. Ripoll, S. A. Carvalho, "O pensamento matemático na Escola Básica", *Zetetikê-FE*, Unicamp, vol. 21, no. 40, pp. 149–161, jul./dez. 2013.

[9] C. Ripoll, "O Pensamento Matemático na Escola Básica". Palestra proferida em 02 de julho de 2020. Youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=o1hMvagF3j4>. Acesso em: 26 de jun. 2021.

[10] E. P. Trevisan, "Contribuições da lógica do desenvolvimento matemático de Imre Lakatos ao trabalho com provas e demonstrações no ensino de Matemática", *Revista Educação Cultura e Sociedade*, Sinop/MT, vol. 3, no. 1, pp. 136–148, jan./jun. 2013.

[11] B. D'Amore, *Elementos de Didática da Matemática*, São Paulo: Editora Livraria da Física, Brasil, 2007.

[12] S. A. Almouloud, *Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem.* in *Portal do GT 19 da ANPEd*, Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. 30ª reunião. Caxambú - MG. 2007. pp. 1–18.

[13] P. Boero, *Theorems in School: From History, Epistimology and Cognition to the Classroom Practice*, Sense Publishers, Rotterdam, 2007.

[14] NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, 2008.

[15] R. A. Barlati, *Demonstrações em Matemática: uso do raciocínio lógico*, Caderno Pedagógico, Universidade Estadual de Londrina - UEL, 2011.

[16] Brasil, *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Ministério da Educação - MEC, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2018.

[17] D. C. Morais Filho, *Um convite à Matemática: Fundamentos Lógicos, com Técnicas de Demonstração, Notas Históricas e Curiosidades*, Campina Grande: EDUFCG, 2007.

[18] J. Boaler, *O que a matemática tem a ver com isso? Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da matemática e inspirar sucesso*, Tradução de Daniel Bueno, Porto Alegre: Penso, 2019.

[19] E. Belfort, "Contando quadrados em tabuleiros de xadrez", *Revista do Professor de Matemática*, vol. 69, pp. 36–41, 2009.

[20] D. W. L. Rodrigues, "O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios: um experimento com alunos de design", Ph.D. Dissertation, Design, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

[21] R. B. Nelsen, *Proofs Whitout Words: Exercises in Visual Thinking*, Lewis and Clark College, Portland, Oregon, 1993.

[22] Raymond Duval. "Argumenter, demontrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive?", Petit X, no. 31, pp. 37–61, 1992–1993.

BREVE BIOGRAFIA

João Domingos Gomes da Silva Junior https://orcid.org/0000-0002-1745-0302

Mestre em Matemática Aplicada pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil. Atualmente é professor do Colégio Pedro II, ministrando aulas para alunos do Ensino Fundamental e Médio e no curso de pós-graduação na formação de professores. É pesquisador do Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática - NEPEM.

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa https://orcid.org/0000-0002-5258-1447

Doutora em Matemática pela Universidade de Aveiro – Portugal. É professora do Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, RJ – Brasil, onde atua na Educação Básica e nos cursos de formação de professores da pós-graduação. É pesquisadora do Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática - NEPEM.

Daniele Simas Pereira Alves https://orcid.org/0000-0003-1009-2618

Mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Atualmente é professora do município de São Gonçalo e professora do Colégio Santa Teresa de Jesus, no Rio de Janeiro, onde atua na Educação Básica. É pesquisadora do Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática - NEPEM.