

# Análise do Desempenho de Métodos Numéricos de Inversão da Transformada de Laplace

**Cássio Felhberg Lemos** 

Universidade Federal de Pelotas,  
RS, Brasil

✉ [cassiofehberg@gmail.com](mailto:cassiofehberg@gmail.com)

**Camila Pinto da Costa** 

Universidade Federal de Pelotas,  
RS, Brasil

✉ [camila.costa@ufpel.edu.br](mailto:camila.costa@ufpel.edu.br)

**Leslie D. Pérez-Fernández** 

Universidade Federal de Pelotas,  
RS, Brasil

✉ [leslie.fernandez@ufpel.edu.br](mailto:leslie.fernandez@ufpel.edu.br)

**Amanda Mallüe Ferreira** 

Universidade Federal de Pelotas,  
RS, Brasil

✉ [amandamallue@hotmail.com](mailto:amandamallue@hotmail.com)

**Elisiane Cogoy da Silva** 

Universidade Federal de Pelotas,  
RS, Brasil

✉ [elisics@hotmail.com](mailto:elisics@hotmail.com)

## Analysis Of the Performance of Numerical Methods of Inversion of the Laplace Transform

### Abstract

In general, the calculation of the inverse Laplace transform directly from the definition, given by the Bromwich integral, is very difficult. As an alternative, numerical inversion methods are used. In this article, we study the precision and machine time of the Fixed Talbot, Dubner-Abate, Durbin, Gaver-Stehfest and Euler methods. Specifically, we performed several computational experiments based on our own implementation of these methods. Furthermore, performance is evaluated for test functions that usually occur as part of solutions to ordinary differential equations. The results of the computational experimentation allow us to conclude that the Fixed Talbot method presents the best performance.

**Keywords:** Laplace transform; Inverse Laplace transform; Numerical inversion methods.

**MSC:** 44-01; 44A10; 65Y20.

### Resumo

Em geral, o cálculo da transformada de Laplace inversa diretamente da definição, dada pela integral de Bromwich, é muito difícil. Como alternativa são utilizados métodos numéricos de inversão. Neste artigo, estudamos a precisão e o tempo de máquina dos métodos de Talbot Fixo, Dubner-Abate, Durbin, Gaver-Stehfest e Euler. Especificamente, realizamos diversos experimentos computacionais a partir da implementação própria destes métodos. Ainda, o desempenho é avaliado para funções teste que ocorrem usualmente como parte das soluções de equações diferenciais ordinárias. Os resultados da experimentação computacional permitem concluir que o método de Talbot Fixo apresenta o melhor desempenho.

**Palavras-chave:** Transformada de Laplace; Transformada inversa de Laplace; Métodos numéricos de inversão.

## 1 INTRODUÇÃO

A transformada de Laplace permite modificar equações diferenciais ordinárias em equações polinomiais. A transformada de Laplace da função  $f(t)$  é definida por  $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ , em que  $s$  é um número real ou, mais geralmente, complexo [1]. Suas aplicações estão nas mais diversas áreas como, por exemplo: na análise de circuitos eletrônicos [2], modelagem de dispersão de poluentes [3].

Na prática, o grande desafio do emprego da transformada de Laplace na resolução de problemas complexos encontra-se em sua inversão. Esse fato se deve à complexidade da aplicação direta da definição da transformada inversa de Laplace dada pela integral de Bromwich  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds, \forall t > 0$ . Alternativamente, empregam-se métodos numéricos de inversão da transformada de Laplace. O objetivo deste trabalho é estudar o desempenho de alguns desses métodos, analisando sua precisão e tempo de máquina quando aplicado a funções teste que ocorrem frequentemente em soluções de EDOs. Tais métodos numéricos foram implementados no software livre Scilab. Em particular, foram escolhidos os métodos numéricos de inversão Talbot Fixo [4], [5], Dubner-Abate [6], [7], [8], Durbin [8], Gaver-Stehfest [9], [10] e Euler [11], [12]. Na segunda seção, introduzimos os métodos numéricos e suas fórmulas, para, na terceira seção, apresentar os resultados obtidos através da sua implementação no Scilab utilizando de gráficos, tabelas com os erros absolutos entre as aproximações obtidas da aplicação dos métodos numéricos de inversão e as funções teste, e tabelas com o tempo de máquina de cada método numérico para cada função teste.

## 2 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste trabalho são avaliados cinco métodos numéricos de inversão da transformada de Laplace.

### 2.1 Método de Talbot Fixo

Dentre os muitos métodos numéricos, um certamente muito notório foi o Talbot Fixo, criado em 1979, onde o “Fixo” do nome vem do parâmetro  $r$  do algoritmo, um valor fixo definido para que todas as singularidades da transformada fiquem à sua esquerda. Este método é muito eficiente, sendo aplicável para quase todos os casos, com exceção de casos de infinitas singularidades e números imaginários que se estendem ao infinito. O que torna este método tão inovador é o fato de deformar o contorno padrão na integral de Bromwich [4]. Segue abaixo a fórmula do método [5]:

$$f(t, M) = \frac{r}{M} \left\{ \frac{1}{2} F(r) \exp(rt) + \sum_{k=1}^{M-1} \operatorname{Re} [\exp(ts(\theta_k)) F(s(\theta_k)) (1 + i\sigma(\theta_k))] \right\}, \quad (1)$$

$$r = \frac{2M}{N_t t}, t > 0, i = \sqrt{-1}, s(\theta) = r\theta(\cot \theta + i), -\pi < \theta < \pi, \theta_k = \frac{k\pi}{M},$$

$$\sigma(\theta) = \theta + (\theta \cot \theta - 1) \cot \theta, F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

## 2.2 Método de Dubner-Abate

O método Dubner-Abate foi criado em 1968, e ele apresenta a inversão da transformada de Laplace através da transformada de cosseno de Fourier finita [6]. Dubner-Abate resulta num erro pequeno ao especificar uma linha na metade direita na escolha do contorno da integral. Na época em que este método foi criado, ele inovou por ser muito fácil de implementar, além de ser bem rápido nos computadores da época [7]. Segue abaixo a fórmula do método [8]:

$$f(t, T) = \frac{2e^{at}}{T} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \sum_{k=1}^{NSUM} \operatorname{Re}\{F(\alpha)\} \cos(\theta) \right], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} NSUM &\geq 200, \alpha = a + i \frac{k\pi}{T}, \theta = \frac{k\pi}{T} t, F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, i = \sqrt{-1}, \\ \operatorname{Re}(s) &\geq a > 0, \\ t &\leq \frac{T}{2}. \end{aligned}$$

## 2.3 Método de Durbin

Em 1974, Durbin desenvolveu um método numérico muito similar ao Dubner-Abate composto pela função que está sendo invertida e funções exponenciais, seno e cosseno. A função seno foi adicionada nesse método para ter um coeficiente de erro menor comparado ao método Dubner-Abate. No Durbin, o erro da inversa de  $f(t)$  independente de  $t$ , ao invés de exponencial em  $t$ , e as séries trigonométricas apuradas de  $f(t)$  no que se referem a  $F(s)$  funcionam num período de  $2T$ . Durbin foi escolhido para esta pesquisa devido ao fato dele ser uma continuação natural de Dubner-Abate, logo uma comparação entre os dois pareceu deveras interessante. Segue abaixo a fórmula do método [8]:

$$f(t, T) = \frac{e^{at}}{T} \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \sum_{k=0}^{NSUM} \operatorname{Re}\{F(\alpha)\} \cos(\theta) - \operatorname{Im}\{F(\alpha)\} \operatorname{sen}(\theta) \right], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} NSUM &\geq 200, \alpha = a + ik \frac{\pi}{T}, \theta = k \frac{\pi}{T} t, F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, i = \sqrt{-1}, \\ \operatorname{Re}(s) &\geq a > 0, 0 \leq t \leq 2T. \end{aligned}$$

## 2.4 Método de Gaver-Stehfest

Surgido em 1966 no trabalho de Donald P. Gaver Jr. e desenvolvido posteriormente em 1970 por Harald Junior, Gaver-Stehfest se tornou muito popular devido sua simplicidade e eficiência. Ele é utilizado em diversas áreas, como por exemplo, a geofísica e química [9]. Uma das vantagens desse método é poder somente olhar para o eixo dos reais. Segue abaixo a fórmula do método [10]:

$$f(t, N) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i F\left(\frac{\ln 2}{t} i\right), \quad (4)$$

$$V_i = (-1)^{\frac{N}{2}+i} \sum_{\text{floor}\left[k=\left(\frac{i+1}{2}\right)\right]}^{\text{Min}\left(i, \frac{N}{2}\right)} \frac{\alpha}{\beta (k-1)! \delta},$$

$$\alpha = k^{\frac{N}{2}} (2k)!, \beta = \left(\frac{N}{2} - k\right)! (k)!, \delta = (i - k)! (2k - i)!, t > 0, F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

$N$  é um número par.

## 2.5 Método de Euler

Desenvolvido por Joseph Abate e Ward Whitt e publicado em 1995, o método Euler veio como um algoritmo simples para ajudar com funções de distribuição cumulativa de probabilidade. Apesar disso, ele também funciona com outras funções [11]. Ele é baseado na transformação da integral de Bromwich para uma transformada de Fourier e depois utiliza de uma série via discretização trapezoidal para aproximação. Para acelerar a convergência da série, é utilizado o somatório de Euler [12]. Segue abaixo a fórmula para o método:

$$f(t, m) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} 2^{-m} s_{n+j}(t), \quad (5)$$

$$s_n(t) = \frac{e^{\frac{A}{2t}}}{2t} \text{Re} \left\{ F\left(\frac{A}{2t}\right) \right\} + \frac{e^{\frac{A}{2t}}}{t} \sum_{k=1}^n (-1)^k \text{Re} \left\{ F\left(\frac{A + 2k\pi i}{2t}\right) \right\},$$

$$t > 0, F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

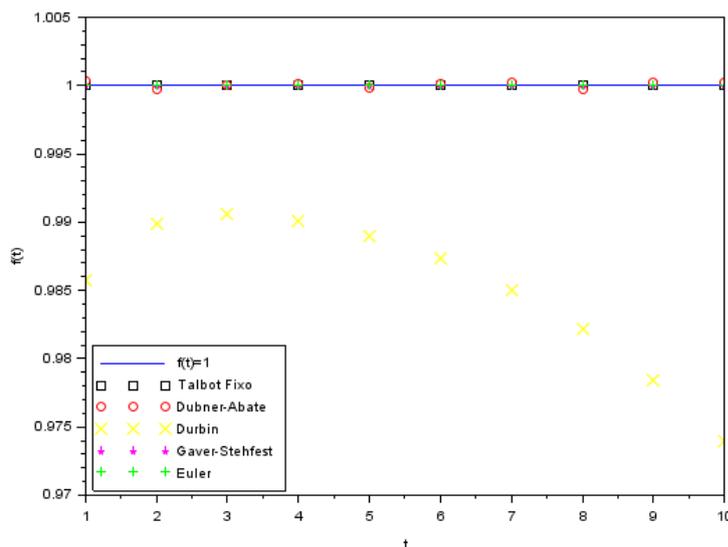
## 3 RESULTADOS

Segue abaixo as tabelas e gráficos de resultados obtidos com os métodos numéricos de inversão para cada função. Como objetivo é analisar o comportamento dos métodos, foram escolhidos diferentes tipos de funções para a pesquisa, sendo ela uma função constante,  $f(t) = 1$ , uma função linear,  $f(t) = t$ , uma função potência,  $f(t) = t^3$ ,

uma função trigonométrica,  $f(t) = \text{sen}(t)$ , uma função hiperbólica,  $f(t) = \text{cosh}(t)$ , e uma função exponencial,  $f(t) = e^{-t}$ . Para obter os resultados abaixo foi escolhido um dos parâmetros livres de cada um dos métodos numéricos para ser alterado, onde se escolheu um valor e foi testado valores abaixo e acima dele, sempre em busca dos melhores resultados. Com Talbot Fixo alteramos o  $M$  e foi escolhido  $M = 50$ , mantendo  $N_t = 7$ . Para Dubner-Abate foi alterado o parâmetro livre  $T$  até se chegar a  $T = 30$ , mantendo  $aT = 7$ . Em Durbin, o parâmetro  $T$  foi escolhido e chegou ao valor de  $T = 20$ , com  $aT = 7$  em todos os testes. Para Gaver-Stehfest, as mudanças de valores foi em  $N$  e foi encontrado o valor  $N = 18$  como melhor opção. Por fim, para Euler foi alterado o parâmetro  $m$ , enquanto os parâmetros  $n$  e  $A$  não foram alterados, chegando, assim, aos valores  $m = 11$ ,  $n = 15$  e  $A = 18,4$ . Abaixo segue as discussões dos resultados para cada função acompanhadas de gráficos e tabelas, onde os erros de ordem  $E-03$  foram considerados com boa precisão.

Para a função  $f(t) = 1$  tem-se resultados precisos para os métodos numéricos de inversão Talbot Fixo, Dubner-Abate, Gaver-Stehfest e Euler. Durbin apresentou resultados com baixa precisão, com exceção para  $t = 3$  e  $t = 4$ , onde houve uma redução no erro. Apesar de  $T = 20$  ser a melhor opção para o Método numérico de Durbin e ter apresentado resultados bem satisfatórios, para essa função, obteve-se melhores resultados com  $T = 30$ . Segue abaixo as tabelas de precisão e tempo de máquina, e o gráfico de comparação para  $f(t) = 1$ .

**Figura 1:** Gráfico de comparação para  $f(t) = 1$



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Tabela 1:** Comparação do erro absoluto nos métodos numéricos para a função  $f(t) = 1$

$t$	Talbot Fixo	Dubner-Abate	Durbin	Gaver-Stehfest	Euler
1	1,247E-11	3,76E-04	1,43E-02	5,349E-07	6,076E-09
2	1,247E-11	2,37E-04	1,01E-02	5,349E-07	6,076E-09
3	4,157E-11	3,26E-05	9,44E-03	6,193E-07	6,076E-09
4	1,247E-11	1,70E-04	9,89E-03	5,349E-07	6,076E-09
5	6,319E-11	2,01E-04	1,10E-02	8,666E-07	6,076E-09
6	4,157E-11	8,26E-05	1,27E-02	6,193E-07	6,076E-09
7	3,563E-11	1,84E-04	1,49E-02	2,247E-06	6,076E-09
8	1,247E-11	2,43E-04	1,79E-02	5,349E-07	6,076E-09
9	2,217E-11	1,98E-04	2,15E-02	1,372E-06	6,076E-09
10	6,319E-11	2,74E-04	2,61E-02	8,666E-07	6,076E-09

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Tabela 2:** Tabela de tempo de máquina dos métodos numéricos para a função  $f(t) = 1$  em segundos

Método numérico	Tempo
Talbot Fixo	0,0387
Dubner-Abate	0,0196
Durbin	0,0359
Gaver-Stehfest	0,2263
Euler	0,0500

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

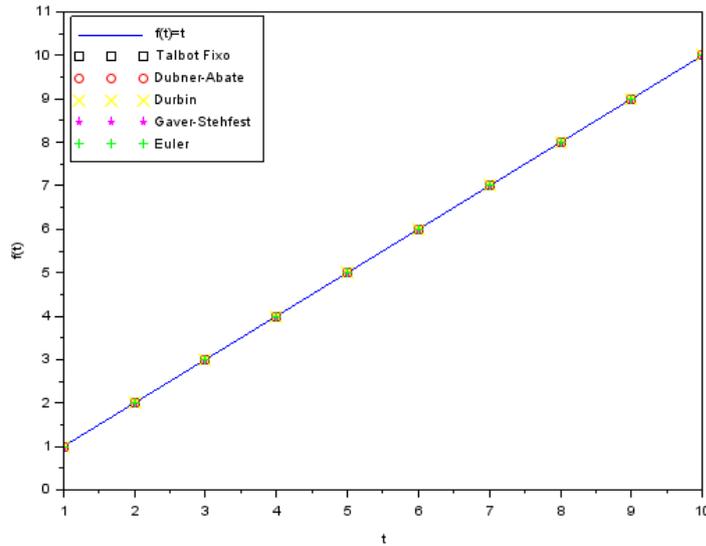
Com  $f(t) = t$  tem-se resultados precisos para todos métodos numéricos. Para o método numérico Euler, também foi obtido resultados interessantes nessa função com  $m = 13$ . Segue abaixo as tabelas de precisão e tempo de máquina, e o gráfico de comparação para  $f(t) = t$ .

**Tabela 3:** Comparação do erro absoluto nos métodos numéricos para a função  $f(t) = t$

$t$	Talbot Fixo	Dubner-Abate	Durbin	Gaver-Stehfest	Euler
1	1,04E-12	1,47E-03	1,69E-05	3,642E-07	3,042E-08
2	2,07E-12	1,2E-03	1,28E-05	7,284E-07	6,084E-08
3	6,93E-12	1,23E-04	3,67E-05	3,3E-07	9,127E-08
4	4,15E-12	3,47E-04	6,78E-05	1,456E-06	1,216E-07
5	2,41E-11	1,43E-03	1,11E-04	9,839E-07	1,521E-07
6	1,39E-11	5,01E-04	1,73E-04	6,601E-07	1,825E-07
7	1,19E-11	5,21E-04	2,6E-04	1,884E-06	2,129E-07
8	8,31E-12	3,06E-03	3,83E-04	2,913E-06	2,433E-07
9	7,4E-12	2,28E-03	5,59E-04	5,036E-06	2,738E-07
10	4,82E-11	3,69E-03	8,07E-04	1,967E-06	3,042E-07

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Figura 2:** Gráfico de comparação para  $f(t) = t$



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

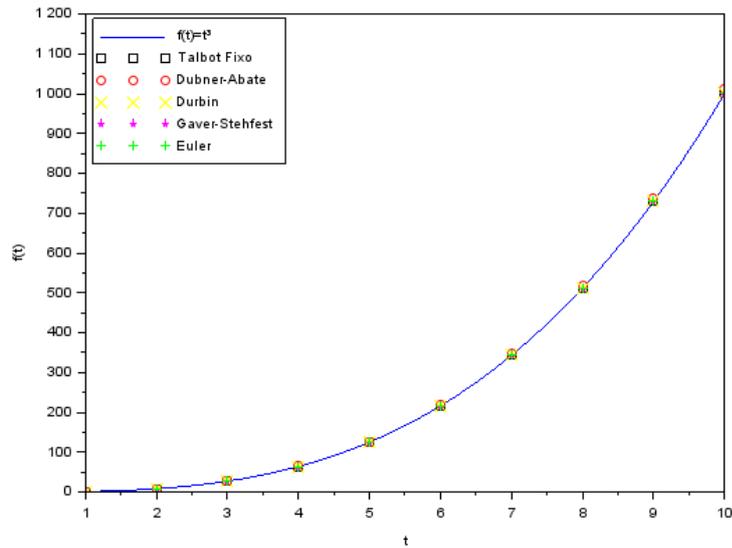
**Tabela 4:** Tabela de tempo de máquina dos métodos numéricos para a função  $f(t) = t$  em segundos

Método numérico	Tempo
Talbot Fixo	0,0375
Dubner-Abate	0,0202
Durbin	0,0390
Gaver-Stehfest	0,2142
Euler	0,0502

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

Ao realizar a transformada de Laplace inversa em  $f(t) = t^3$ , tem-se resultados precisos para Talbot Fixo, Gaver-Stehfest e Euler. Também foi possível encontrar ótimos resultados em Euler com  $m = 13$  para essa função. Durbin teve resultados pouco precisos para todos os valores de  $t$ , enquanto Dubner-Abate começou com baixa precisão e um aumento considerável no seu erro conforme  $t$  cresceu. Segue abaixo as tabelas de precisão e tempo de máquina, e o gráfico de comparação para  $f(t) = t^3$ .

**Figura 3:** Gráfico de comparação para  $f(t) = t^3$



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Tabela 5:** Comparação do erro absoluto nos métodos numéricos para a função  $f(t) = t^3$

$t$	Talbot Fixo	Dubner-Abate	Durbin	Gaver-Stehfest	Euler
1	2E-14	4,61E-01	5,73E-02	3,585E-08	2,756E-07
2	1,9E-13	6,11E-01	6,16E-02	2,868E-07	2,205E-06
3	7E-13	8,32E-01	6,61E-02	2,967E-07	7,442E-06
4	1,51E-12	1,162	7,08E-02	2,294E-06	1,764E-05
5	1,7E-11	1,655	7,58E-02	5,31E-06	3,445E-05
6	6E-12	2,392	8,09E-02	2,373E-06	5,954E-05
7	6,99E-12	3,496	8,63E-02	2,397E-05	9,455E-05
8	1,205E-11	5,15	9,2E-02	1,835E-05	1,41E-04
9	3,399E-11	7,628	9,78E-02	3,52E-05	2,01E-04
10	1,299E-10	1,133E+1	1,04E-01	4,248E-05	2,76E-04

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

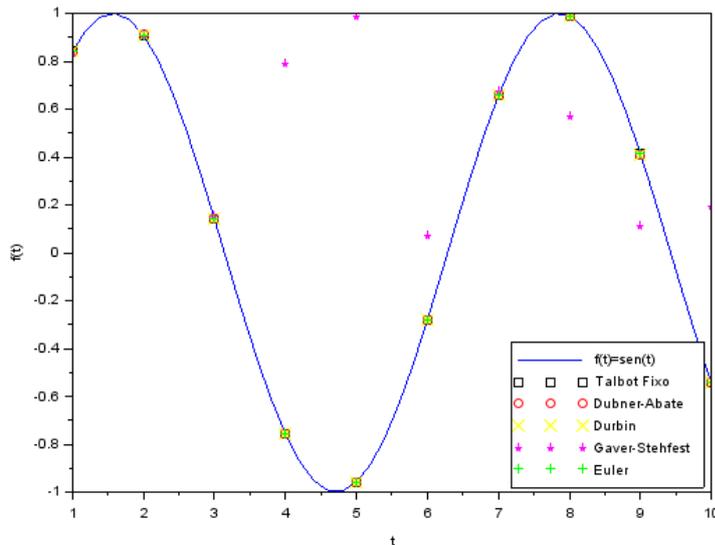
**Tabela 6:** Tabela de tempo de máquina dos métodos numéricos para a função  $f(t) = t^3$  em segundos

Método numérico	Tempo
Talbot Fixo	0,0781
Dubner-Abate	0,1670
Durbin	0,3122
Gaver-Stehfest	0,2311
Euler	0,2241

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

Na função  $\text{sen}(t)$ , encontrou-se resultados precisos para Talbot Fixo, Dubner-Abate, Durbin e Euler. Com  $m = 13$ , foi possível, também, encontrar resultados precisos para Euler. Gaver-Stehfest apresentou resultado preciso para  $t = 1$ , mas foi perdendo a precisão conforme  $t$  aumentou. Segue abaixo as tabelas de precisão e tempo de máquina, e o gráfico de comparação para  $f(t) = \text{sen}(t)$ .

**Figura 4:** Gráfico de comparação para  $f(t) = \text{sen}(t)$



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Tabela 7:** Comparação do erro absoluto nos métodos numéricos para a função  $f(t) = \text{sen}(t)$

$t$	Talbot Fixo	Dubner-Abate	Durbin	Gaver-Stehfest	Euler
1	1,58E-12	1,61E-03	1,73E-05	1,714E-07	1,234E-09
2	1,63E-12	1,03E-03	4,86E-05	1,02E-03	3,282E-09
3	5,5E-12	1,2E-04	7,32E-05	1,12E-02	3,516E-09
4	2,95E-12	7,05E-04	1,04E-04	3,3E-02	6,488E-09
5	2,182E-11	8,95E-04	1,48E-04	2,79E-02	5,221E-09
6	1,57E-11	3E-04	2,1E-04	2,07E-01	9,609E-09
7	5,78E-12	6,84E-04	2,99E-04	1,88E-02	5,908E-09
8	5,54E-12	1,23E-03	4,24E-04	4,17E-01	1,279E-08
9	1,661E-11	5,7E-04	6,01E-04	3E-01	5,005E-09
10	3,406E-11	8,15E-04	8,5E-04	3,52E-01	1,646E-08

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

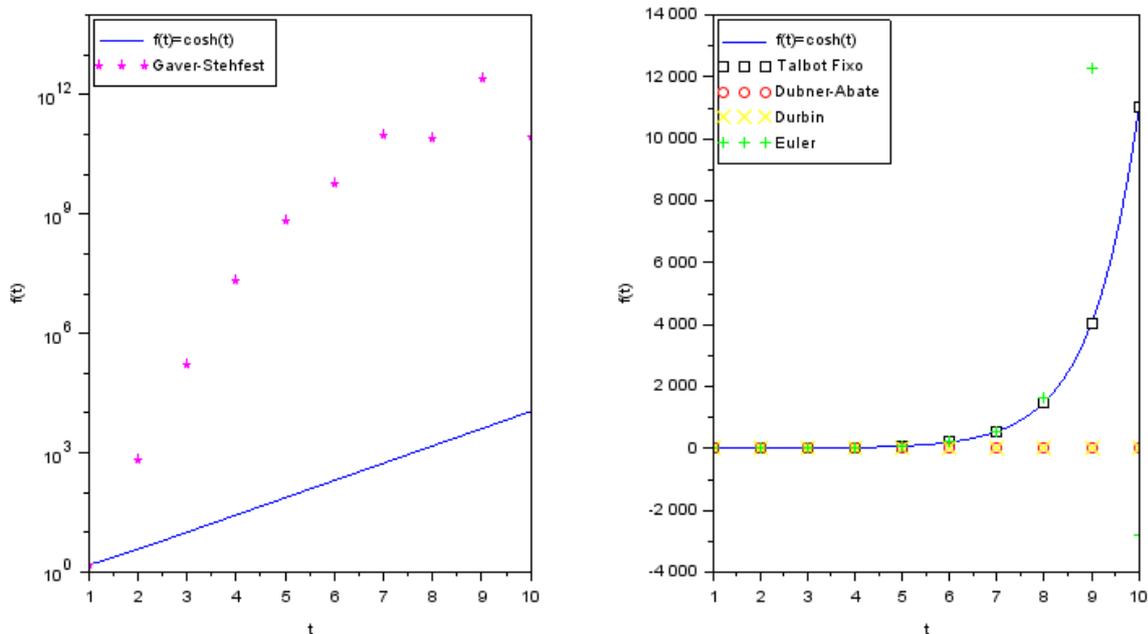
**Tabela 8:** Tabela de tempo de máquina dos métodos numéricos para a função  $f(t) = \text{sen}(t)$  em segundos

Método numérico	Tempo
Talbot Fixo	0,0390
Dubner-Abate	0,0243
Durbin	0,0428
Gaver-Stehfest	0,2763
Euler	0,0546

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

A função mais complicada de conseguir resultados precisos foi a função  $\cosh(t)$ . O Talbot Fixo foi a único método numérico de inversão que conseguiu realizar a inversão para todos valores  $t$  com uma margem de erro pequena. Euler conseguiu resultados precisos para  $t \leq 4$ . Dubner-Abate, Durbin e Gaver-Stehfest não conseguiram realizar a inversão, sendo o Gaver-Stehfest, entre os três, o que achou os resultados mais discrepantes, com exceção em  $t = 1$ , o qual o resultado foi preciso. Segue abaixo o gráfico de comparação para  $f(t) = \cosh(t)$ .

**Figura 5:** Gráfico de comparação para  $f(t) = \cosh(t)$



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Tabela 9:** Comparação do erro absoluto nos métodos numéricos para a função  $f(t) = \cosh(t)$

$t$	Talbot Fixo	Dubner-Abate	Durbin	Gaver-Stehfest	Euler
1	2,555E-11	1,652	1,373	9,84E-03	9,871E-08
2	1,473E-11	3,866	3,704	6,683E+2	2,055E-06
3	3,32E-11	1,014E+1	1,005E+1	1,714E+5	4,135E-05
4	1,799E-11	2,735E+1	2,730E+1	2,242E+7	8,31E-04
5	6,819E-11	7,4241E+1	7,421E+1	7,166E+8	1,67E-02
6	6,301E-11	2,0173E+2	2,017E+2	6,075E+9	3,36E-01
7	3,205E-11	5,483E+2	5,483E+2	9,818E+10	6,815
8	2E-11	1,490E+3	1,490E+3	8,536E+10	1,487
9	2E-11	4,051E+3	4,051E+3	2,5E+12	8,237E+3
10	2E-11	1,101E+4	1,101E+4	9,385E+10	1,379+4

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Tabela 10:** Tabela de tempo de máquina dos métodos numéricos para a função  $f(t) = \cosh(t)$  em segundos

Método numérico	Tempo
Talbot Fixo	0,0387
Dubner-Abate	0,0279
Durbin	0,0423
Gaver-Stehfest	0,2245
Euler	0,0558

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

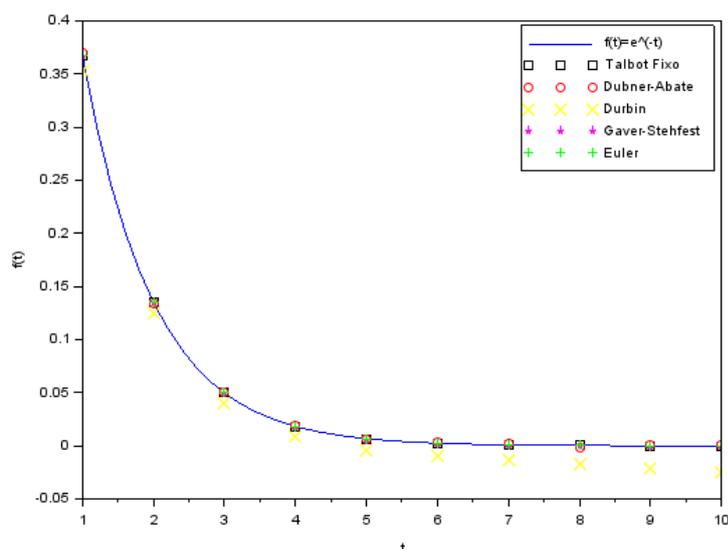
Em  $f(t) = e^{-t}$  obteve-se resultados precisos com Talbot Fixo, Dubner-Abate Gaver-Stehfest e Euler. Durbin teve baixa precisão, com exceção de  $t = 3$  e  $t = 4$ , onde o resultado teve um redução no erro, e encontrou erros menores com  $T = 30$ . Segue abaixo o gráfico de comparação para  $f(t) = e^{-t}$ .

**Tabela 11:** Comparação do erro absoluto nos métodos numéricos para a função  $f(t) = e^{-t}$

$t$	Talbot Fixo	Dubner-Abate	Durbin	Gaver-Stehfest	Euler
1	2,15E-11	1,97E-03	1,43E-02	4,015E-08	3,354E-09
2	1,13E-11	1,26E-03	1E-02	4,003E-07	3,448E-09
3	2,47E-11	1,5E-04	9,36E-03	3,793E-07	2,988E-09
4	4,92E-12	8,62E-04	9,78E-03	2,366E-06	2,436E-09
5	4,41E-11	1,11E-03	1,08E-02	3,929E-06	1,843E-09
6	3,14E-11	3,59E-04	1,25E-02	6,496E-07	1,235E-09
7	3,46E-11	8,49E-04	1,46E-02	3,311E-06	6,405E-10
8	1,29E-11	1,47E-03	1,74E-02	5,392E-06	7,821E-11
9	5,81E-12	7,44E-04	2,09E-02	5,04E-06	4,323E-10
10	3,18E-11	9,73E-04	2,52E-02	3,2E-06	8,772E-10

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Figura 6:** Gráfico de comparação para  $f(t) = e^{-t}$



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

**Tabela 12:** Tabela de tempo de máquina dos métodos numéricos para a função  $f(t) = e^{-t}$  em segundos

Método numérico	Tempo
Talbot Fixo	0,0376
Dubner-Abate	0,0240
Durbin	0,0339
Gaver-Stehfest	0,2110
Euler	0,0531

**Fonte:** Elaborada pelos autores.

## 4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Dentre os métodos numéricos de inversão estudados, o Talbot Fixo foi o único a apresentar precisão em todas as funções. Ele apresentou o tempo de máquina médio de 0,0449 segundos, sendo o mais rápido. Euler foi outro método que se destacou, apresentando precisão para todos os valores de  $t$  em todas as funções, com exceção do cosseno hiperbólico, além de ter apresentado um bom tempo máquina, 0,0813 segundos. Dubner-Abate demonstrou ser bem eficiente em termos de tempo máquina, pois teve um desempenho bem próximo do Talbot Fixo, em média 0,0471 segundos. Durbin e Gaver-Stehfest executaram em média 0,0835 segundos e 0,2305, respectivamente.

## 5 APLICAÇÕES

A partir do discutido acima, decidiu-se empregar o método de melhor precisão, Talbot Fixo, que também apresentou rápido desempenho, para testar sua eficiência em algumas aplicações. A primeira é a distribuição de temperatura em uma barra, onde se tem o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t = k^2 u_{xx}, \text{ se } x \geq 0 \text{ e } t > 0, \\ u(t, 0) = 0, \text{ se } t > 0, \\ u(t, 1) = 0, \text{ se } t > 0, \\ u(0, x) = \text{sen}(\pi x), \text{ se } 0 < x < 1. \end{cases} \quad (6)$$

Após a aplicação da transformada de Laplace e resolução da equação diferencial ordinária resultante, obteve-se a seguinte equação:

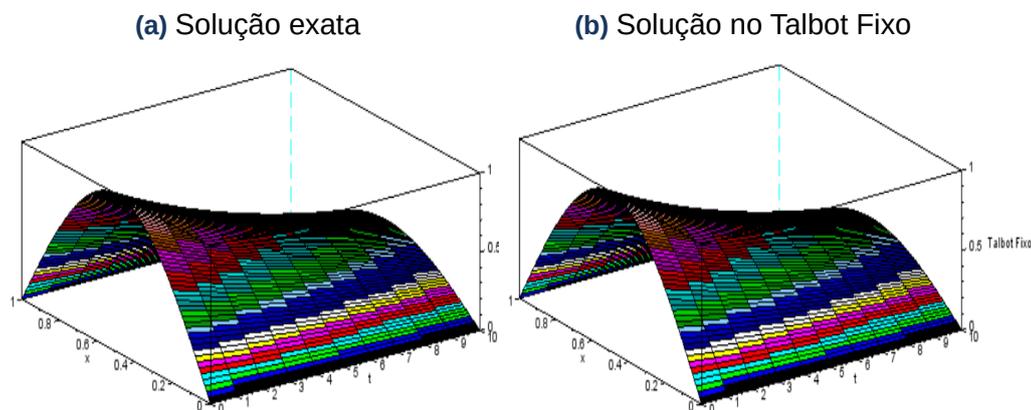
$$\bar{u}(s, x) = \frac{1}{k^2 \pi^2 + s} \text{sen}(\pi x). \quad (7)$$

A solução final do problema (6) após aplicar a transformada de Laplace inversa, é dado por (maiores detalhes em [5]):

$$u(t, x) = \text{sen}(\pi x) e^{-k^2 \pi^2 t}. \quad (8)$$

No presente trabalho, utiliza-se o Talbot Fixo, equação (1), para inverter a equação (7). O resultado da inversão pode ser conferido no gráfico abaixo.

**Figura 7:** Gráfico de comparação da solução exata (a) e solução no Talbot Fixo (b) para o problema de distribuição de temperatura em barra



**Fonte:** Elaborada pelos autores.

A segunda aplicação que será apresentada é descrita pela equação de onda ho-

mogenizada, dado pelo PVI abaixo:

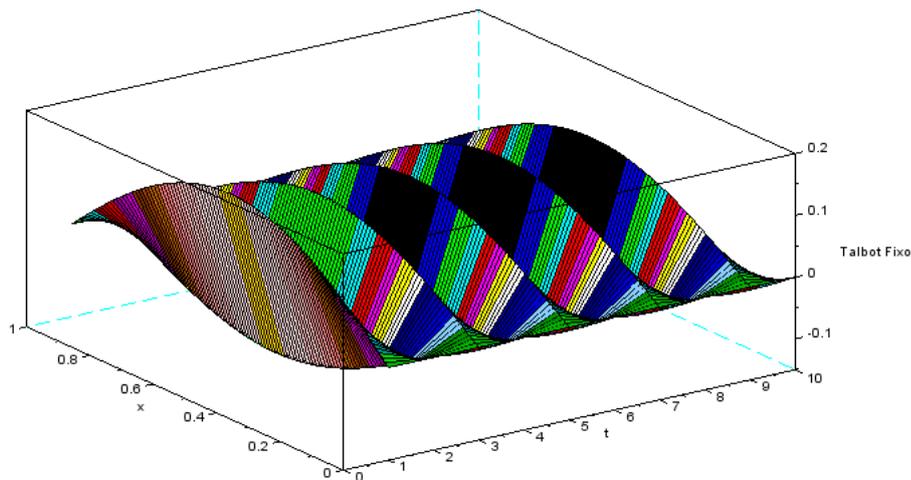
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \hat{E} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u_0(0, t) = u_0(1, t) = 0, & t > 0, \\ u_0(x, 0) = 0, \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = 0 & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (9)$$

Quando a transformada de Laplace é aplicada, obteve-se a inversa (maiores detalhes em [13]):

$$U(x, s) = \frac{\sinh \frac{s}{\sqrt{\hat{E}}} + \sinh \frac{s(x-1)}{\sqrt{\hat{E}}} - \sinh \frac{sx}{\sqrt{\hat{E}}}}{s^2(s+1) \sinh \frac{s}{\sqrt{\hat{E}}}} \quad (10)$$

Aplicando Talbot Fixo na equação (9), obteve-se os resultados exibidos no gráfico abaixo.

**Figura 8:** Gráfico para inversão de  $U(x, s) = \frac{\sinh \frac{s}{\sqrt{\hat{E}}} + \sinh \frac{s(x-1)}{\sqrt{\hat{E}}} - \sinh \frac{sx}{\sqrt{\hat{E}}}}{s^2(s+1) \sinh \frac{s}{\sqrt{\hat{E}}}}$  no Talbot Fixo



Fonte: Elaborada pelos autores.

## 6 CONCLUSÃO

Como é possível ver na seção de aplicações, o Talbot Fixo não é somente eficiente para as funções estudadas neste trabalho, como mencionado na seção de discussão de resultados, mas também é muito eficaz em aplicações práticas. Com isso é possível perceber a importância deste método numérico de inversão e a necessidade de estudá-lo cada vez mais para entender bem suas propriedades e aplicá-lo corretamente com os melhores valores de parâmetros, para que assim possa se obter os melhores resultados possíveis.

## AGRADECIMENTOS

---

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul — FAPERGS pela concessão da bolsa de iniciação científica.

## REFERÊNCIAS

---

- [1] D. A. V. Tonidandel, “Transformada de Laplace: uma obra de engenharia”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 34, no. 2, pp. 2601-1 – 2601-6, 2012. <https://doi.org/10.1590/S1806-11172012000200016>
- [2] G.L. Zeng, M. Zeng, “Laplace Transform in Circuit Analysis”, *In: Electric Circuits*, Springer, Cham, 2021, pp. 171–180. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-60515-5\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60515-5_23)
- [3] Camila P. da Costa, Leslie D. Pérez-Fernández, Julián Bravo-Castillero, “Pollutant Dispersion Modeling via Mathematical Homogenization and Integral Transform-Based Multilayer Methods”, *In: Towards Mathematics, Computers and Environment: A Disasters Perspective*. Springer, Cham, 2019, pp. 59–82. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-21205-6\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-21205-6_4)
- [4] J. Abate, P. P. Valkó, “Multi-precision Laplace transform inversion”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, no. 5, pp. 979–993, 2004. <https://doi.org/10.1002/nme.995>
- [5] A. M. Ferreira, “Homogeneização Assintótica com Transformada de Laplace na Modelagem de Meios Microperiódicos”, Master’s thesis, Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas - UFPel, Pelotas, 2019.
- [6] J. T. Hsu, J. S. Dranoff, “Numerical inversion of certain laplace transforms by the direct application of fast fourier transform (FFT) algorithm”, *Computers & Chemical Engineering*, vol. 11, no. 2, pp. 101 –110, 1987. [https://doi.org/10.1016/0098-1354\(87\)80011-X](https://doi.org/10.1016/0098-1354(87)80011-X)
- [7] R. Dubner and J. Abate, “Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier Cosine transform”, *Journal of the ACM*, vol. 15, no. 1, pp. 115–123, 1968. <https://doi.org/10.1145/321439.321446>
- [8] F. Durbin, “Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate’s method”, *The Computer Journal*, vol. 17, no. 4, pp. 371–376, 1974. <https://doi.org/10.1093/comjnl/17.4.371>
- [9] A. Kuznetsov, “On the Convergence of the Gaver-Stehfest Algorithm”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 51, no. 6, pp. 2984–2998, 2013. <http://dx.doi.org/10.1137/13091974X>
- [10] F. K. Tomaschewski, “Solução da Equação SN Multigrupo de Transporte Dependente do Tempo em Meio Heterogêneo”, Master’s thesis, Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre, 2012.
- [11] J. Abate, W. Whitt, “Numerical Inversion of Laplace Transforms of Probability Distributions”, *ORSA Journal on Computing*, vol. 7, no. 1, pp. 36–43, 1995. <https://doi.org/10.1287/ijoc.7.1.36>
- [12] Williams Zanga, “Stable numerical Laplace Transform inversion technique without over-and-undershoot”, Master’s thesis, Computing Science, Imperial College London, London, United Kingdom, 2018.
- [13] E. C. Da Silva, “HOMOGENEIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA”, *XIII ENPÓS - Encontro de Pós-Graduação*, Universidade Federal de Pelotas - UFPel, Pelotas, 2021.

## BREVE BIOGRAFIA

---

**Cássio Felhberg Lemos**  <https://orcid.org/0000-0002-5437-2585>

Estudante de ciência da computação na Universidade Federal de Pelotas. Atualmente é bolsista de iniciação científica com a professora Camila Pinto da Costa.

**Camila Pinto da Costa**  <https://orcid.org/0000-0002-6846-6515>

Possui graduação em Matemática Licenciatura Plena pela PUCRS - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (2001), mestrado em Matemática Aplicada pela UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2003) e doutorado em Engenharia Mecânica na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, Brasil com bolsa do CNPq. Realizou estágio de doutorado na Itália no "Istituto Di Scienze Dellatmosfera e Del Clima Di Bologna", ISAC/CNR, Bolonha-Itália, de maio/2006 a maio/2007 como Bolsista CAPES. Atualmente é Professor Adjunto da Universidade Federal de Pelotas. Tem experiência na área de Geociências, com ênfase em Matemática Aplicada / Física da Atmosfera / Fenômenos de Transporte, atuando principalmente nos seguintes temas: dispersão de poluentes, modelagem matemática, física da camada limite planetária, poluição do ar, soluções analíticas/semi-analíticas da equação de difusão-advvecção, ADMM, GIADMT, transformadas integrais.

**Leslie D. Pérez-Fernández**  <https://orcid.org/0000-0002-4452-264X>

Possui graduação em Matemática pela Universidade de Havana (2001) mestrado em Matemática pela Universidade de Havana (2006) e doutorado em Matemática pelo Instituto de Cibernética, Matemática e Física (2010 - homologado pela Comissão Nacional de Graus Científicos de Cuba). Obteve o Prêmio Anual da Academia de Ciências de Cuba ao Resultado da Investigação Científica em 2017 (colaborador), 2009 (autor principal) e 2006 (coautor), e o Prêmio da Agência de Energia Nuclear e Tecnologias de Avançada do Ministério de Ciência, Tecnologia e Meio Ambiente de Cuba ao Resultado Científico-Técnico Destacado em 2010 e 2008. Desde março de 2013 é professor do Departamento de Matemática e Estatística do Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas (DME-IFM-UFPe) e, desde julho de 2015, é membro do corpo docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat-IFM-UFPe). É membro do grupo de pesquisa em Otimização, Controle e Análise Não Linear (DME-IFM-UFPe). Tem interesse na modelagem e simulação de fenômenos físicos e biológicos multiescalares e os métodos matemáticos relacionados, fundamentalmente métodos assintóticos e variacionais de homogenização.

**Amanda Mallüe Ferreira**  <https://orcid.org/0000-0002-5347-132X>

Possui graduação em Matemática Licenciatura pela UFPEL -Universidade Federal de Pelotas (2017), mestrado em Modelagem Matemática pela UFPEL (2019). Atualmente está cursando uma especialização em atendimento educacional especializado (AEE) na Universidade Federal do Rio Grande, e atua como professora na escola Escola Estadual de Ensino Médio Arroio do Padre.

**Elisiane Cogoy da Silva**  <https://orcid.org/0000-0002-9113-4770>

Graduação em Matemática pela Universidade da Região da Campanha-URCAMP, Bagé/RS (2007); Especialização em Matemática (URCAMP, 2008); Graduação em Pedagogia-EAD pela FAEL - Faculdade Educacional da Lapa, Pólo Capacitar Bagé (2017). Atuou como Professora de Matemática no Instituto Anglicano Melanie Granier - Bagé (2011-2012); Professora substituta Colégio Presidente Emilio Garastazu Médici - Fundação Bradesco (2010-2011), Professora Substituta E.M.E.F Monteiro Lobato - Hulha Negra/RS (2017). Participação em Grupos de pesquisa na UFSC e UDESC - Florianópolis (2013); Aluna especial no mestrado em educação científica e tecnológica - UFSC (2013), Atualmente Professora de Matemática ensino fundamental anos finais na E.M.E.F Antenor Gonçalves pereira - GETECO (desde 2018) e E.M.E.F PERI CORONEL Professora de matemática modalidade EJA (DESDE 2019) e é mestranda em em modelagem matemática na UFPe.