DOI: 10.22481/intermaths.v2i2.9827
Licença Creative Commons
Article | Artigo

INTERMATHS
ISSN 2675-8318
Vol. 2, N. 2, Jul - Dez 2021, p. 268 – 288

A utilização de materiais manipuláveis na construção de demonstrações da geometria espacial de posição

Bruno Leal Bispo
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa-BA, Brasil
brunolealbispo@gmail.com

Elias Santiago de Assis
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa-BA, Brasil
eliassantiago@ufrb.edu.br

The use of manipulable materials in the construction of positional spacial geometry demonstrations

Abstract
This qualitative article aimed to investigate the contributions of the use of manipulative materials in the construction and understanding of mathematical demonstrations of Position Spatial Geometry. For this, a didactic sequence (SD) involving a result of spatial geometry aided by Manipulable Materials (MM) was applied. The participants were two students from the Licentiate Degree in Mathematics at the Federal University of Recôncavo da Bahia. In addition to SD, observation of the process carried out by the investigator and a semi-structured interview were also configured as a data collection instrument. The theoretical framework adopted addresses discussions about teaching and learning tests and demonstrations and the use of MM in mathematics classes. From the data analysis, it can be seen that the MM enabled the participants to: promote three-dimensional visualization, remember "asleep" knowledge, become autonomous in the construction of knowledge, among others.

Keywords: Spatial Geometry of Position, Manipulable Materials, Math Demonstration.

MSC: 97B50; 97D40.

Resumo
A presente pesquisa, de natureza qualitativa, tem como objetivo investigar os contributos da utilização de Materiais Manipuláveis (MM) na construção e compreensão de demonstrações matemáticas da Geometria Espacial de Posição. Para isso foi aplicada uma sequência didática (SD) envolvendo a demonstração de um resultado da Geometria Espacial de Posição a partir da utilização de MM. Os participantes foram dois estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Além da SD, também configuraram como instrumentos de coleta de dados a observação realizada pelo investigador e uma entrevista semiestruturada. O referencial teórico adotado aborda discussões a respeito do ensino e aprendizagem de provas e demonstrações e a utilização de MM nas aulas de matemática. Os dados coletados mostram que os MM ajudaram os participantes a promover a visualização tridimensional e relembrar conhecimentos da geometria plana, além de se tornarem mais autônomos na construção do próprio conhecimento matemático.

Palavras-chave: Geometria Espacial de Posição; Materiais Manipuláveis; Demonstração Matemática.

Submetido em: 01 de outubro de 2021 – **Aceito em**: 20 de dezembro de 2021

1 INTRODUÇÃO

Os estudos de Geometria Espacial (GE), tanto na educação básica quanto nos cursos de licenciatura em matemática, costumam ser precedidos pela Geometria Plana. Entretanto, a transição do plano para o espaço costuma impor algumas dificuldades para os discentes, seja na compreensão de teoremas e definições, seja na própria visualização tridimensional. Segundo Franco e Pereira [1], de modo geral, o ensino da geometria há muito tempo vem apresentando sérios problemas, principalmente no que diz respeito à construção e compreensão dos seus conceitos.

Os trabalhos destinados ao ensino e à aprendizagem da GE costumam priorizar a chamada Geometria Espacial Métrica em detrimento da Geometria Espacial de Posição (GEP). De acordo com Hoffer [2], há uma lacuna de trabalhos que envolvem a GEP e consequentemente uma carência de estudos sobre a implementação de metodologias de ensino que ajudem a promover a aprendizagem. Por outro lado, é plausível considerar a utilização de Materiais Manipuláveis (MM) nas aulas de GE tendo em vista a visualização espacial. Todavia, a associação dos MM com as demonstrações matemática nem sempre é contemplada na literatura. Nesse sentido, a presente pesquisa, de natureza qualitativa, visa investigar os contributos da utilização de MM na construção e compreensão de demonstrações matemáticas da GEP.

A respeito da inserção das demonstrações matemáticas no ensino de geometria, Franco e Pereira [1] afirmam que uma das maneiras mais interessantes consiste na utilização de atividades alternativas, diversificando as aulas e aprimorando as práticas que usam somente quadro, giz, livro didático e exposição verbal do conteúdo. O rigor das demonstrações demanda do aprendiz o desenvolvimento da capacidade de visualização com vistas à compreensão dos conceitos e teoremas. Dessa forma, a implementação de MM em sala de aula (ou de softwares e jogos educativos, dentre outros) pode contribuir com o processo de ensino uma vez que amplia o leque dos recursos didáticos à serviço da aprendizagem.

Para Lorenzato [3], a geometria, em um sentido geral, tem função essencial na formação dos indivíduos, pois possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da Matemática. As suas demonstrações exigem atenção e raciocínio dedutivo apurado. Para Valle [4], os MM são recursos concretos que permitem explorar os sentidos do aprendiz e envolvê-lo ativamente durante uma situação de ensino e aprendizagem. O seu uso pode tornar a aula mais dinâmica dando melhores condições de análise e conclusões dos eventos relacionados ao assunto que está sendo trabalhado.

Os MM utilizados na presente pesquisa foram palitos de churrasco, bolinhas de isopor e régua. Por meio de uma Sequência Didática (SD) elaborada pelo investigador, os participantes, isto é, dois discentes do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), buscaram identificar o ponto de interseção entre os segmentos de reta que unem os pontos médios das arestas opostas[1] de um tetraedro. A escolha dos participantes decorreu dos critérios de interesse e disponibilidade destes atores. Já a escolha da demonstração utilizada deve-se à sua ausência nos livros de GE.

Para Zabala ([5], p. 18), SD é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos aprendizes". O processo é dividido em um passo-a-passo com um objetivo final de adquirir habilidades a respeito do tema da atividade.

De fato, a atividade aplicada consiste em um conjunto de perguntas e orientações que envolvem a demonstração de que os segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro se encontram em um único ponto a partir da utilização de MM. Inicialmente os participantes construíram um tetraedro a partir de bolinhas de isopor e palitos de churrasco. Em seguida, as orientações da SD lhes conduziram para a análise das faces deste poliedro, estimulando-os a utilizarem conhecimentos da geometria euclidiana plana, a exemplo de: base média do triângulo, retas paralelas, diagonais de um paralelogramo, dentre outros. Maiores detalhes sobre a SD podem ser encontrados na seção de metodologia, neste texto.

Em virtude da pandemia da Covid-19, alastrada no Brasil e no mundo a partir do ano de 2020, a aplicação da SD ocorreu de forma virtual por meio de uma videoconferência. Antes, porém, o investigador se encarregou de disponibilizar a cada participante a própria SD e os MM. A entrevista foi realizada em um momento posterior e também ocorreu de forma remota, individualmente.

Este texto encontra-se dividido em seis seções, sendo a primeira delas a presente Introdução. A segunda seção apresenta algumas discussões sobre os processos de ensino e a aprendizagem da GE de posição relacionando-os com a utilização de MM. Em seguida são descritos os procedimentos metodológicos empregados na pesquisa. As três últimas seções destinam-se à apresentação e discussão dos resultados, às considerações finais e às referências, nessa ordem.

2 ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

A GE aparece nos documentos oficiais do Ministério da Educação, no Brasil, como conteúdo obrigatório e fundamental na formação do estudante. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), esta área de matemática visa possibilitar aos

[1] Duas arestas de um poliedro são ditas opostas quando elas não possuem pontos (vértices) em comum.

estudantes a aquisição da autonomia para interpretar, relacionar e resolver problemas geométricos espaciais, assim como fazer conjecturas de propriedades por meio das atividades inseridas pelo professor [6].

Do ponto de vista prático, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) destacam que "o estudo da Geometria capacitar os estudantes a resolver problemas práticos do quotidiano, como, orientar-se no espaço, ler mapas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas (...)" ([7], p. 75). Entretanto, quanto ao caráter abstrato dos estudos nessa área, os PCN+ mencionam a importância de o discente desenvolver o raciocínio de relações, sendo necessário "contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais" ([7], p. 120).

Além de reconhecer a importância da geometria na formação dos discentes, os PCN+ defendem a inserção de demonstrações matemática já esse nível de escolaridade de modo que "o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhes são familiares" ([7], p. 124). Neste documento é salientada a oportunidade que a geometria oferece para explorar a abordagem de "teoremas e argumentação dedutiva", afirmando ser o momento de consolidação de conhecimentos adquiridos no ensino fundamental. Não se trata, porém, de uma apresentação indiscriminada de demonstrações matemáticas na educação básica. O docente precisa identificar os resultados cujas verificações matemáticas se revelam compatíveis com o nível cognitivo de seus estudantes.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em dezembro de 2017 pelo Ministério da Educação (MEC), trata-se de um documento mais recente que busca nortear os currículos escolares. Nela a geometria é considerada como uma das estratégias que possibilita ao aprendiz "interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente" ([8], p. 523). O documento também aponta a possibilidade de o estudante adquirir a habilidade de visualização espacial a partir da planificação de objetos e de formas em espaços tridimensionais. Quanto às demonstrações matemáticas, a BNCC assinala que a sua presença em sala de aula não significa a supressão de atividades de caráter mais experimental e indutivo.

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também conside-

> rar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática ([8], p. 265).

A articulação entre as abordagens indutiva e dedutiva no processo de ensino e aprendizagem da matemática, e em particular da geometria, demanda a utilização de recursos como os MM. Essa mediação entre o concreto para o abstrato também é defendida por Nacarato [9] ao considerar que o nível da abstração deve ser precedido por caminhos cujo ponto de partida apresente elementos empíricos. Em consonância com estas ideias, defende-se neste trabalho que a experimentação, por meio de MM, esteja presente no próprio processo de elaboração de uma demonstração matemática, a partir da uma SD.

De acordo com Barbosa [10], a Matemática sempre foi vista por muitos estudantes como sendo a disciplina mais difícil do currículo escolar. Em particular, no que diz respeito à geometria, as lacunas no ensino e aprendizagem começam desde a falta de planejamento das aulas até a carência de conhecimentos geométricos de alguns professores devido a um processo formativo em que a geometria nem sempre foi devidamente contemplada. As origens do atual panorama do ensino de geometria na educação básica remontam a meados no século passado quando a aritmética e a álgebra passaram a sobressair-se nos currículos escolares. De acordo com o geômetra Manfredo Perdigão do Carmo,

> No Brasil, há anos atrás, houve um relativo abandono do ensino de Geometria à maneira de Euclides. Na prática, o que se passava era que o assunto era relegado para o fim do curso, e quase sempre não era ensinado. Isto devia-se em parte às dificuldades próprias do assunto e em parte a uma certa influência da então chamada “matemática moderna que, embora utilizando a axiomática em outros tópicos, propugnava a eliminação da Geometria de Euclides no ensino básico ([11], p. iii).

Vale destacar que por volta dos anos 1950, os conteúdos de geometria eram apresentados de forma dedutiva na educação básica, como se pode perceber em Quintella [12]. Se, por um lado, é plausível a discussão sobre as dificuldades de se apresentar todos os conteúdos por meio de demonstrações matemáticas nesse nível de escolaridade, por outro, percebe-se que a tentativa que aprimorar o currículo da época não só excluiu as abordagens pautadas nas demonstrações como encarregou-se de relegar à geometria um quase abandono dentro das salas de aula.

Para Silva [13], outro fator responsável pelo declínio no ensino de geometria é a falta de recursos oferecidos às escolas, principalmente as públicas, um problema a ser enfrentado pelos professores ao trabalhar nesta área. Na maioria das vezes as instituições dispõem apenas de quadro, giz e livro didático, tornando o exercício da docência limitado, restringindo as aulas a modelos clássicos de exposição oral e resolução de exercícios. Devido à falta de ferramentas auxiliares como MM e *softwares* educativos, dentre outros recursos, a visualização e compreensão geométrica torna-se comprometida.

No que se refere aos discentes, Assis [14] afirma que as "abordagens descontextualizadas, o tipo de linguagem adotada em alguns livros didáticos, o não reconhecimento da utilidade dos assuntos, dentre outros fatores, são elementos que dificultam a aprendizagem de Geometria". É comum os estudantes mencionarem que provavelmente não utilizarão um certo conteúdo fora da sala de aula, como se a matemática necessitasse de alguma aplicabilidade para justificar a sua existência. Cria-se, desta forma, uma janela desmotivacional na aprendizagem. Contudo, é importante destacar que a despeito do valor agregado às aulas quando se expõe a articulação entre determinados conteúdos e alguns problemas reais, os docentes precisam ajudar os discentes a compreenderem que a matemática, e a própria geometria, tem como papel principal ajudar-lhes no desenvolvimento do raciocínio indutivo, lógico e dedutivo a da capacidade de abstração permitindo-lhes se tornar cidadãos mais críticos, conscientes e produtivos. Ou seja, a matemática presta um serviço à promoção da autonomia dos indivíduos.

O raciocínio indutivo pode ser fomentado por meio da observação e da experimentação de recursos concretos, representando um passo inicial na identificação de alguns resultados da matemática possibilitando aos aprendizes percepção da recorrência de alguns fenômenos. Para Dias [15], os estudantes que obtêm resultados positivos ao ter contato com verificação por meio de conjecturas podem se dar por satisfeito sobre a veracidade dos resultados obtidos. Contudo, é preciso validar as conclusões formadas de maneira empírica. Santos e Machado [16] alertam para os equívocos que podem ser cometidos ao assumir a veracidade de determinado resultado mediante a sua ocorrência em casos particulares, o que alguns discentes costumam fazer. Nem sempre a observação e indução conduzem os estudantes a verdades absolutas, dentro de uma estrutura axiomática pré-estabelecida. É necessário estabelecer cuidadosamente a passagem do empírico para o dedutivo, defende Gravina [17].

Para validar os resultados instituídos a partir de observações é necessário fazer uso de uma estrutura axiomática. Assume-se alguns fatos como verdadeiros (axiomas ou postulados) e por meio do raciocínio lógico-dedutivo obtém-se novos resultados (proposições ou teoremas). É desta forma que operam os matemáticos. Contudo, no contexto escolar, o docente pode, em alguns casos, substituir este tipo de validação formal, por argumentações apoiadas no raciocínio lógico, mas nem sempre dedutivo no sentido de derivar-se de um conjunto minimalista de axiomas.

À luz dessa discussão, com a necessidade de validação das verdades matemáticas tem-se as provas e demonstrações. Balacheff [18] distingue esses termos, afirmando que a prova faz referência a um processo pelo qual um discurso assegura a validade de uma proposição, precisamente aceita por alguma comunidade matemática. O autor ressalta que uma prova pode ser aceita por uma comunidade e rejeitada por outras. Ela não está, necessariamente, apoiada em um conjunto mínimo de axiomas.

A *demonstração* é considerada por Balacheff [18] como um tipo de prova matemática que tem uma forma particular. Trata-se da organização de um conjunto bem definido de regras: "o que caracteriza as demonstrações como gênero de discurso é a sua forma estritamente codificada" ([18], p. 13), com um parâmetro efetivo e linguagem matemática culta. Trata-se do tipo de validação aceita pelos matemáticos.

De Villiers [19] aponta os vários papéis assumidos por uma demonstração matemática, para além da verificação de um resultado. Segundo este autor, há as funções de explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual. Todos esses elementos ajudam a justificar a inserção de demonstrações matemáticas nos contextos escolar e universitário.

Entretanto, a presença de demonstrações matemáticas em sala de aula é sempre desafiadora. No que diz respeito à GE, a compreensão de tais validações perpassa (não somente, mas também) pelas elaborações de imagens tridimensionais. Conforme pontuam Rogenski e Pedroso ([20], p. 5),

> (...) verifica-se que os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da geometria básica e, por conseguinte, da geometria espacial. Também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos, dentre outros conceitos.

Os problemas levantados acima podem ser minimizados por meio da recursos didáticos que promovam a visualização geométrica dos discentes, a exemplo dos MM, assinala Leite [21]. Esses materiais permitem "corporificar" conceitos geométricos tornando-os menos abstrato. Desta forma, é possível caminhar rumo à aprendizagem, destacam Oliveira e Pereira [22].

Para Nacarato [9], a exploração de modelos ou materiais que possibilitam ao aprendiz a construção de imagens mentais contribui para o processo de visualização. Alguns recursos como papel ofício, palitos de churrasco, bolinhas de isopor, esboços de sólidos de acrílico, régua, compasso, dentre outros, facilitam o processo de imaginar mentalmente. Tais objetos são exemplos de MM.

Outra potencialidade dos MM é a de alternar o ensino comumente adotado, onde, na maioria das vezes, as aulas seguem uma única abordagem metodológica, tornando a prática do aprender exaustiva e às vezes ineficaz. Segundo Jesus ([23], p. 1.), "o professor que se apoia exclusivamente nesses métodos ou em uma única metodologia acaba por tornar suas aulas monótonas e cansativas". Isso não significa que os MM são capazes de solucionar todos os problemas educacionais. Entretanto, o uso "facilita os processos de socialização, comunicação, expressão e construção do conhecimento" ([24], p. 12).

Vale ressaltar a necessidade de planejamento quando se pretende adotar este tipo de recurso didático (assim como de qualquer outro), afinal a sua presença em sala de aula, por si só, "não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor" ([25], p.18). A mediação entre os discentes e os MM exercida pelo docente tem papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Dolz, Noverraz e Schneuwly [26], o termo SD está intimamente ligada à atividade de abordagem conteudista em que, durante o seu percurso, pode ser ministrada de maneira "escrita ou oral" e possui uma conclusão, na qual espera-se que um conhecimento seja formado. O processo é dividido em um passo-a-passo com um objetivo final de adquirir habilidades a respeito do tema da atividade.

Segundo Nobre e Manrique ([27], p. 137), uma SD pode tornar a aula mais dinâmica e os estudantes responsáveis pela "construção dos saberes com mais autonomia, sem a interferência direta do professor". Neste contexto, o professor assume a posição de guia durante o processo de execução da atividade, com o objetivo de garantir que os aprendizes sigam o percurso desejado.

3 METODOLOGIA

Em virtude da pandemia da Covid-19 que assolou o Brasil e o mundo desde o ano de 2020 até os presentes dias, a relação entre o pesquisador e os participantes se deu de forma remota. O ambiente natural dos participantes configurou-se como fonte direta de dados e o processo revelou-se tão importante quanto os resultados. Assim, a presente pesquisa encontra-se enquadrada no *paradigma qualitativo* de investigação, em concomitância com Bogdan e Biklen [28]. De acordo com Chizzoti [29] neste tipo de investigação, o investigador busca compreender os significados visíveis e latentes que somente são perceptíveis a uma sensível atenção.

Houve um encontro virtual, via *google meet*, do pesquisador com cada um dos participantes, dois discentes do curso de Licenciatura em Matemática da UFRB-CFP, para à aplicação SD, assumindo uma postura de mediador, caracterizando-se como *pesquisador-participante*. Os participantes serão denotados aqui por P1 e P2.

A seleção desses sujeitos se deu pelos critérios de interesse e disponibilidade. Dos oito discentes (do curso de licenciatura em matemática onde ocorreu a investigação) dos quais o pesquisador tem fácil acesso, somente dois apresentaram vontade de participar da pesquisa. Adotou-se também como pré-requisito que os participantes tenham cursado os componentes curriculares *Geometria plana* e *Geometria Espacial*, devido a necessidade de possuir conhecimentos prévios para o desenvolvimento das SD. Ademais, era necessário que estes atores não tenham visto a demonstração do resultado matemático da SD nestes componentes.

O encontro com o participante P1 iniciou-se com uma breve explicação do objetivo da sequência e do tema a ser estudado. Neste momento, P1 já possuía em mãos uma versão impressa da SD e os MM que foram utilizados como ferramentas mediadoras durante a resolução. Todos lhes foram enviados pelo pesquisador. O participante posicionou a câmera do seu notebook em um local visível que proporcionou ao pesquisador acompanhar o processo. Além disso, o processo foi gravado e todos os passos foram narrados em voz alta. Ao fim da atividade, P1 fotografou o material manipulável produzido e as respostas atribuídas a cada passo da atividade. Em seguida, as enviou por e-mail para o pesquisador.

No encontro com o participante P2, o processo ocorreu de maneira análoga ao anterior (P1). Foi introduzida a mesma atividade (SD), porém durante a resolução o participante seguiu parte do tempo calado. Narrou apenas alguns passos e apresentou poucas dúvidas. Ele relatou que se tratava de uma atividade de fácil compreensão. Ao final os resultados foram fotografados e enviados ao pesquisador via *Whatsapp*.

Os instrumentos utilizados para coletar as informações sobre o uso de MM para fazer demonstrações foi a própria SD, juntamente com as observações do investigador e a entrevista semiestruturada. A entrevista foi constituída por cinco questões que tinham por objetivo identificar os contributos dos MM na realização da SD, seja na elaboração de conjecturas, seja na produção da demonstração propriamente dita. O seu conteúdo, assim como a SD, podem ser encontrados no trabalho de conclusão de curso de graduação do primeiro autor[2].

Os dados foram analisados por meio do cruzamento entre as observações do investigador e as respostas atribuídas pelos participantes à SD e à entrevista semiestruturada. Buscou-se realizar uma triangulação de dados tendo em vista a identificação dos contributos dos MM no processo de construção de demonstrações matemáticas da GE de posição.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

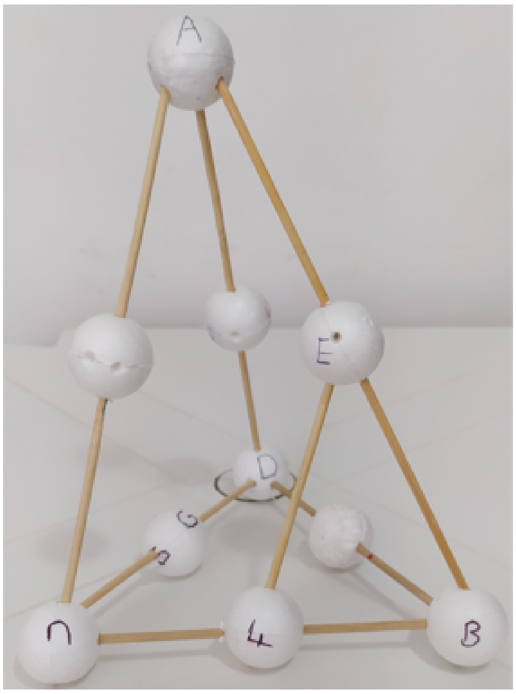
A SD teve como objetivo mostrar que os segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro se interceptam em um único ponto. A definição

[2]Disponível em https://drive.google.com/file/d/19If7_sY3223td0OTrgH2toTl4uBBhHE8/view?usp=sharing Último acesso em 17 de dezembro de 2021.

de tetraedro e de suas arestas opostas aparecem no início de SD.

Cada participante construiu um tetraedro $ABCD$ por meio de palitos de churrasco e bolinhas de isopor. Foi-lhes disponibilizada uma régua para a marcação dos pontos médios E, F, G, H, I e J das arestas AB, BC, CD, AD, AC e BD, nessa ordem. Conforme solicitado na SD, os participantes construíram um segmento de reta ligando os pontos E e F (eles o fizeram por meio de um palito de churrasco), para em seguida comparar este segmento com a aresta AC. A Figura 1 apresenta a construção de P1.

Figura 1: Tetraedro $ABCD$ com segmento AC construído por P1



Fonte: Os autores.

Para determinar as relações dos segmentos EF e AC, presentes na Figura 1, P1 recorreu ao uso da régua. Durante a entrevista, ele comentou que não lembrava que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo tem por medida a metade do comprimento do terceiro lado:

> *No início não me recordei, mas com a utilização do material ficou mais fácil de visualizar. A régua me ajudou a recordar a relação entre os tamanhos dos segmentos* (P1).

Rogenski e Pedroso [20] apontam que a dificuldade em perceber as relações entre os objetos matemáticos é um dos problemas enfrentados pelos estudantes diante das demonstrações matemáticas. A fala de P1 aponta, de certa forma, que os MM lhe auxiliaram na identificação de uma dessas relações. Tem-se aqui uma ferramenta didática que pode ser combinada às demonstrações matemáticas visando o melhor entendimento dos estudantes.

Diferente de P1, o participante P2, relatou que não precisou da régua para responder a esta questão:

> *Apesar do material me trazer uma visão concreta da base média do triângulo, eu conseguiria responder esta relação sem usar a régua* (P2).

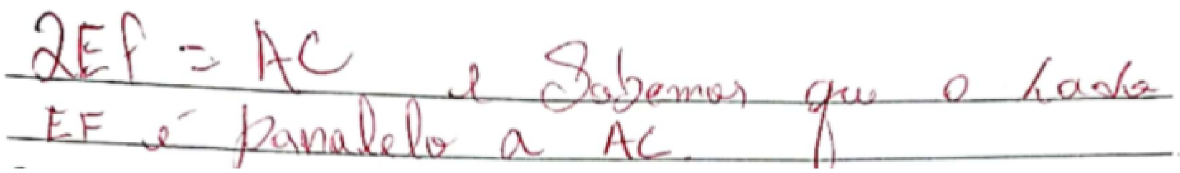
A respeito da resposta acima, P2 enfatizou a importância dos MM para a visualização espacial, fazendo o seguinte complemento:

> *O material me ajudou a ter uma **visão concreta** de algo que só imaginava de forma teórica* (P2).

Os comentários de P1 e P2 têm um ponto de convergência: os MM lhes auxiliaram quanto à visualização geométrica. Autores como Nacarato [9] e Leite [21] destacam esse mesmo contributo dos MM.

Ambos, P1 e P2, concluíram que o segmento EF possui a metade da medida do segmento AC. P2 foi mais além, ao afirmar que os segmentos são paralelos, conforme podemos verificar na Figura 2:

Figura 2: Relação entre EF e AC estabelecida por P2



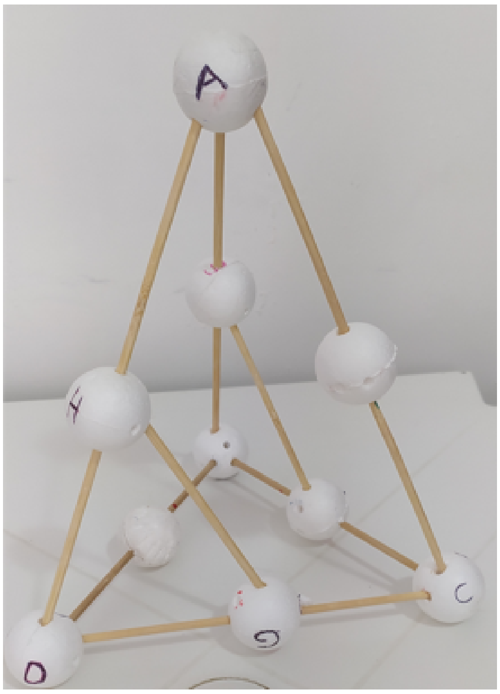
Fonte: Os autores.

Uma forma de verificar o paralelismo entre os segmentos pode ocorrer por meio da utilização do transferidor visto que, na geometria euclidiana, duas retas interceptadas por uma transversal formam ângulos correspondentes congruentes se, e somente se, são paralelas [11]. Entretanto, esse MM não foi disponibilizado aos participantes, o que constitui uma limitação na aplicação de SD. Esse fato aponta para o cuidado que se deve ter na escolha dos recursos a serem utilizados em sala de aula, quando se prioriza o uso de MM. Afinal, a construção do conhecimento por meio dos MM, pontuada por Santos e Cruz [24], pode ser potencializada ou não a depender dos materiais selecionados.

O participante P1 não percebeu de imediato o paralelismo entre os segmentos. Ele indagou o pesquisador se a relação entre os segmentos AB e EF estava relacionada à distância de cada um dos pontos médios E e F à reta que passa por AB. O pesquisador não lhe respondeu, mas sugeriu-lhe que analisasse este fato. Assim, P1 deduziu que os segmentos eram paralelos, ao concluir que os pontos E e F equidistam de AB. Para além das descobertas feitas por P1, a utilização do MM estimulou a interação entre participante e pesquisador, promovendo a "socialização" e "comunicação" apontada por Santos e Cruz [24] como uma das vantagens do processo de ensino e aprendizagem mediado por MM.

De modo análogo, foi solicitado aos participantes que construíssem e comparassem os segmentos HG e AC. Rapidamente eles concluíram que se tratava de segmentos paralelos em que o primeiro possui a metade da medida do segundo. A Figura 3 apresenta a construção de P1.

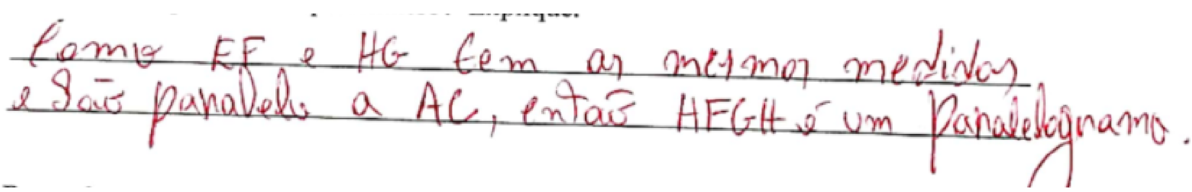
Figura 3: Tetraedro $ABCD$ com segmentos AC e HG, construído por P1



Fonte: Os autores.

P1 e P2 utilizaram as conclusões obtidas no caso de EF e AC. Desta forma, eles perceberam que o quadrilátero $EFGH$ é um paralelogramo. Eles recordaram que todo quadrilátero que possui um par de lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo. A Figura 4 exibe a resposta de P2:

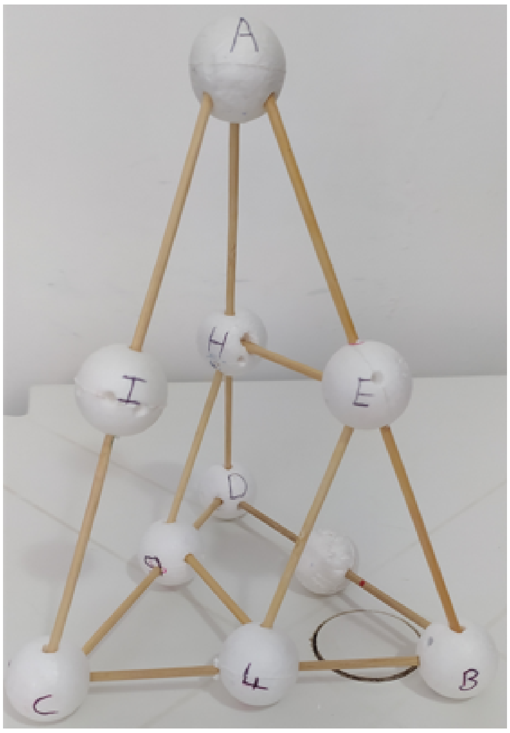
Figura 4: Resposta de P2, $EFGH$ é paralelogramo.



Fonte: Os autores.

Na resposta apresentada na Figura 4, há um pequeno descuido de escrita por parte de P2. Ele chama $HFGH$ para se referir ao paralelogramo $EFGH$ mostrado na Figura 5.

Figura 5: Paralelogramo $EFGH$ construído por P1



Fonte: Os autores.

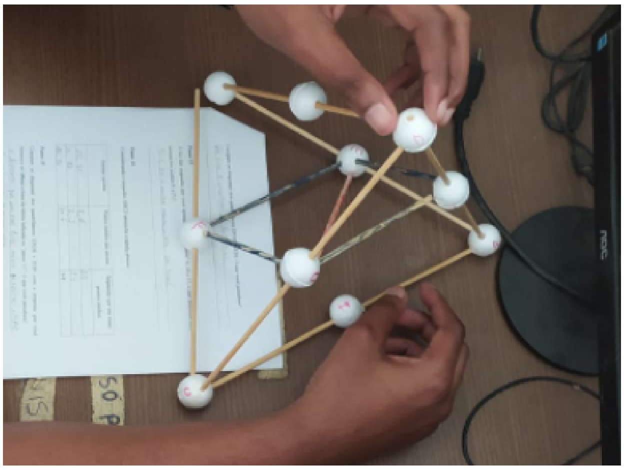
A transitividade do paralelismo, apontada por P2 na Figura 5, ao concluir que EFGH é um paralelogramo (na verdade, ele escreveu HFGH), foi constatada por P1 por meio da construção realizada (MM):

> *O material foi fundamental para visualizar que, se uma reta r é paralela a s, então r é paralela a qualquer paralela a s* (P1).

De acordo com Lorenzato [25], os MM permitem aos discentes a realização de descobertas. A fala de P1 reforça essa ideia, ao destacar que o participante pôde perceber a transitividade do paralelismo entre retas por meio do material.

Em seguida, a SD pede para traçar as diagonais do paralelogramo. A ideia inicial era de usar barbantes, o que não deu certo visto que os pontos médios estavam demarcados com bolinhas de isopor. Este fato impediu os participantes de amarrar o barbante exatamente no ponto. Diante disso, o investigador lhes sugeriu que utilizassem palitos de churrasco. A Figura 6 mostra o momento em que P2 traça as diagonais com o novo recurso.

Figura 6: Diagonais do quadrilátero $EFGH$, P2

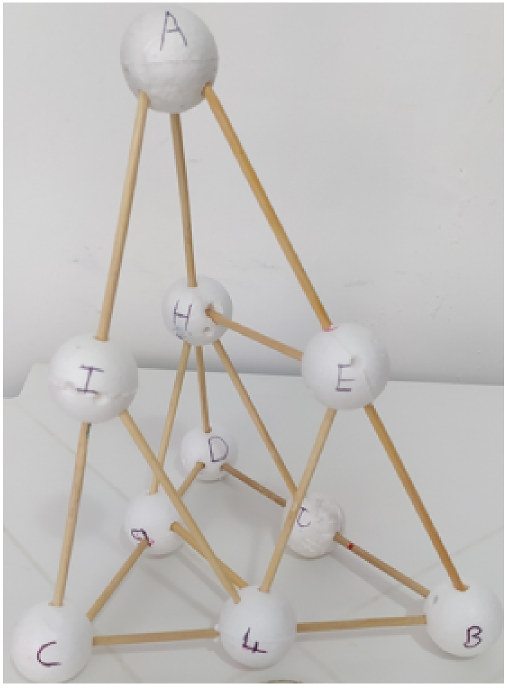


Fonte: Os autores.

Neste momento P2 concluiu que as diagonais EG e FH se encontram no ponto médio de ambas. Ele afirmou que lembrava dessa propriedade. Já P1, novamente, recorreu à régua, desta vez para verificar a distância do ponto de encontro das diagonais até as suas respectivas extremidades. Desse modo, ele concluiu que elas se encontram em um ponto que as divide ao meio.

De forma análoga aos passos iniciais, P1 e P2 construíram e concluíram que o comprimento do segmento que liga o ponto I ao F é igual a metade da medida da aresta AB e que se trata de segmentos paralelos. A Figura 7 apresenta a construção.

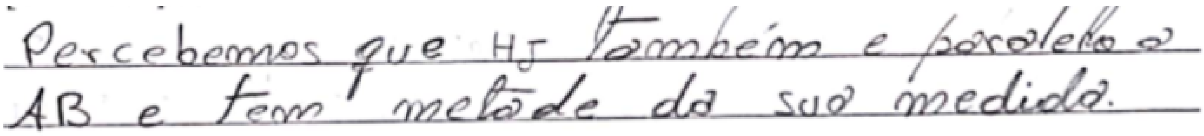
Figura 7: Construção de P1, segmento IF



Fonte: Os autores.

Ambos já estavam familiarizados com esse tipo de relação em virtude dos primeiros passos da SD. Os MM favoreceram a promoção da aprendizagem, fato assinalado na literatura por Oliveira e Pereira [22]. A resposta de P1 aparece na Figura 8.

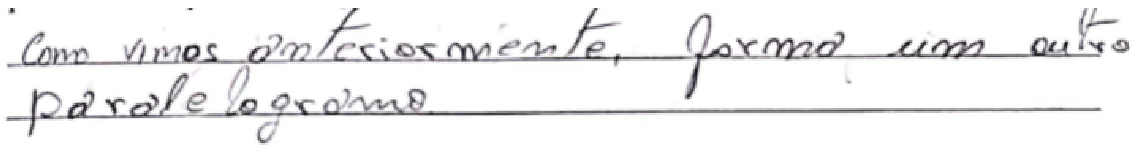
Figura 8: Relação da base média do triângulo ABC em relação a AB


Percebemos que HJ também e paralelo a AB e tem metade da sua medida.

Fonte: Os autores.

Desta vez, P1 chegou à conclusão correta sem recorrer à utilização da régua. De forma análoga à análise do quadrilátero $EFGH$, P1 e P2 concluíram que $IFJH$ é um paralelogramo, como mostra a Figura 9 em que aparece a resposta de P1:

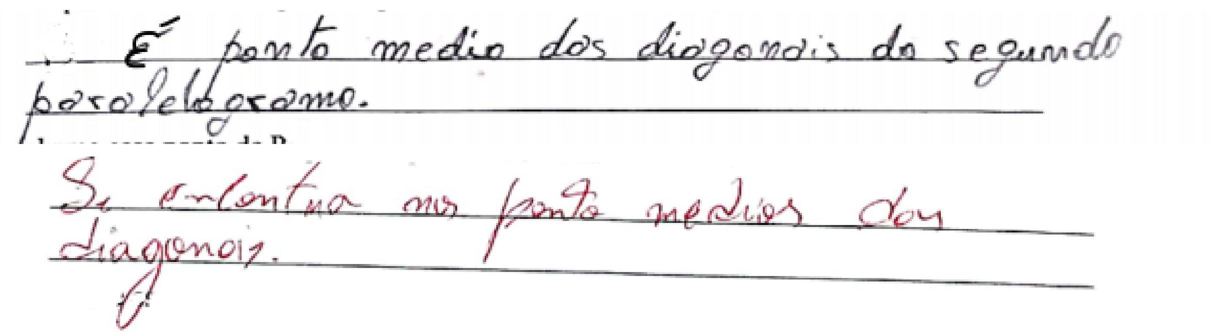
Figura 9: P1 identifica o paralelogramo $IFJH$


Como vimos anteriormente, forma um outro paralelogramo

Fonte: Os autores.

Os participantes rapidamente concluíram que as diagonais IJ e FH do paralelogramo $IFJH$, construídas com palitos de churrasco, assim como as do quadrilátero $EFGH$, se interceptam no ponto médio de ambas. Ao observarem o ponto de encontro das diagonais de cada paralelogramo, P1 e P2 apresentaram, nessa ordem, as respostas exibidas na Figura 10.

Figura 10: Resposta de P1 e P2 sobre a relação das diagonais IF e JH

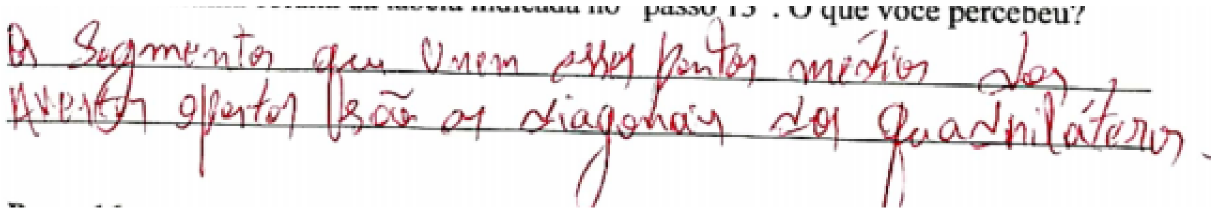

É ponto medio dos diagonais do segundo paralelogramo.

Se encontra no ponto medios dos diagonais.

Fonte: Os autores.

Durante esta análise, P1 chegou a citar que a diagonal FH é comum aos dois paralelogramos,$EFGH$ e $IFJH$. Ambos, P1 e P2, concluíram que essas diagonais são exatamente as arestas opostas do tetraedro. A resposta de P2 aparece na Figura 11:

Figura 11: P2 nota que a diagonal FH é comum a $EFGH$ e $IFJH$


... passo 13 . O que você percebeu?
Os segmentos que unem esses pontos médios das arestas opostas são as diagonais dos quadriláteros.

Fonte: Os autores.

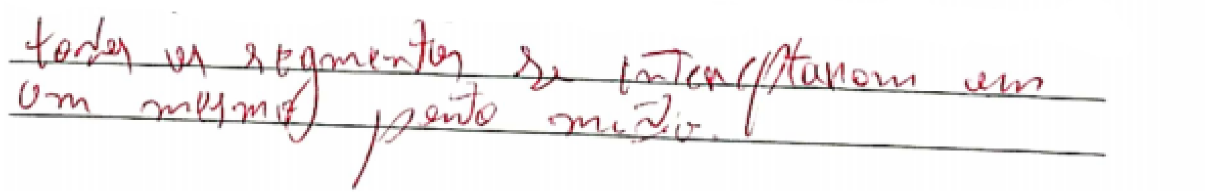
Os participantes tiveram opiniões parecidas quanto à utilização do MM para visualizar a relação das diagonais de $EFGH$ e $IFJH$ com os segmentos que ligam as arestas opostas. Comentaram que:

> *O material foi indispensável para perceber a relação das diagonais dos quadriláteros com os segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas.* (P1)
>
> *O material me auxiliou muito para visualizar que os segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas coincidem com as diagonais do quadrilátero.* (P2)

Somente o processo de construção mental não parece ser suficiente para que os discentes consigam vislumbrar que os segmentos que unem as arestas opostas do tetraedro consistiam nas diagonais de paralelogramos. Nesse sentido, a utilização do MM, conforme pontuado por P1 e P2 foi fundamental. A promoção da visualização geométrica é uma das vantagens dos MM assinaladas de forma recorrente na literatura ([21]; [9]), fato recordado na experiência realizada.

P1 e P2 alcançam o objetivo da SD ao afirmarem que os segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro se interceptam em um único ponto. Observe na Figura 12 que P2 foi mais além ao mencionar que se tratava do ponto médio destes segmentos.

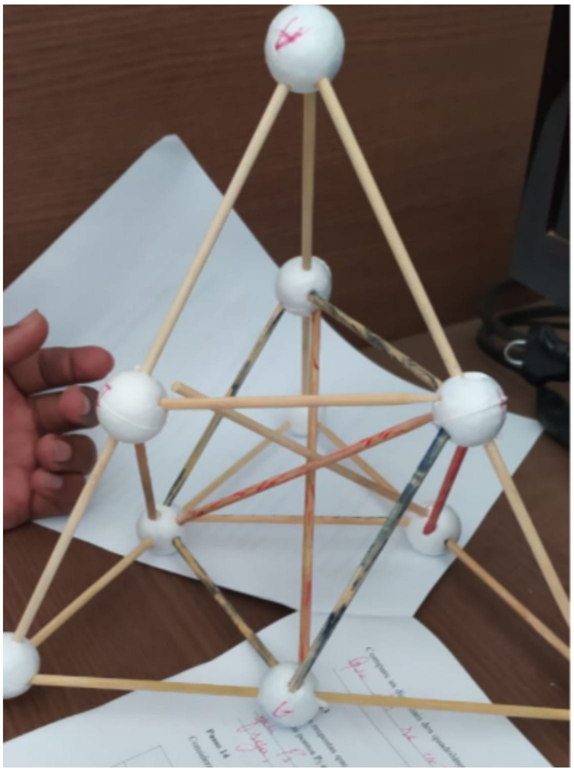
Figura 12: Unicidade ponto


todos os segmentos se interceptavam em um mesmo ponto médio.

Fonte: Os autores.

A Figura 13 apresenta a construção realizada por P2.

Figura 13: Construção de P2



Fonte: Os autores.

No que diz respeito à utilização dos MM na SD, P2 se referiu a eles como essenciais para perceber a unicidade do ponto de encontro dos segmentos:

> *O material também foi indispensável no último passo, para concluir que os segmentos se interceptam em um mesmo ponto.* (P2).

P1 também menciona a contribuição do material para se poder identificar que os pontos de encontro das diagonais coincidem.

> *O MM foi de total importância para a realização da SD. Me ajudou a recordar conhecimentos vistos há muito tempo e que não teria uma boa recordação sem o auxílio de algo concreto.* (P1).

O comentário de P1 vai ao encontro as ideias de Nacarato [9] que propõe que se parta do concreto para se chegar ao abstrato.

No geral, ao expressar a sua opinião sobre o uso dos materiais na resolução da atividade, P2 fez comentários positivos quanto às contribuições:

> *Além de entender cada passo, ajudou a visualizar os conceitos abordados na atividade, as propriedades e conseguir estruturar os conhecimentos prévios que*

> *me auxiliaram a chegar até a demonstração.*
> *No geral, achei que foram importantes para toda a atividade.*
> *Se não houvesse esse material, provavelmente seria feito a demonstração através de desenhos, possivelmente sentiria algumas dificuldades durante.* (P2).

Além da visualização geométrica, P2 aponta a retomada de conhecimentos prévios por meio da utilização dos MM. Esse tipo de conhecimento, que os estudantes já trazem consigo e que muitas vezes parecem estar "adormecidos", é imprescindível no desenvolvimento de demonstrações matemáticas. De acordo com Silva [13], não é raro notar que a dificuldade dos discentes diante das demonstrações está atrelada à falta desses conhecimentos preliminares.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A seleção de MM precisa, por um lado, levar em consideração os conhecimentos prévios dos participantes e, por outro, abarcar o conjunto de materiais necessários para o melhor desempenho dos atores envolvidos. Cabe ao pesquisador identificar os recursos necessários para trabalhar certo conteúdo, de acordo com os saberes dos aprendizes, podendo acrescentar ou retirar algum MM.

Ao analisar as falas dos participantes, percebe-se que, às vezes, suas conjecturas partiam da manipulação dos objetos no decorrer das atividades. Eles compreendiam conceitos teóricos a partir das construções realizadas. Tem-se, portanto, uma possibilidade de alinhar o concreto com o abstrato.

Outro fator observado foi a independência dos aprendizes para alcançar os objetivos propostos em cada atividade. O material os tornou protagonistas, visto que ambos partiram de meros palitos de churrasco e bolinhas de isopor, construíram o material e deduziram os resultados, tendo o investigador como mediador enquanto eles construíam por si só as provas.

Os resultados apresentados permitem a identificação de alguns contributos dos MM no processo de construção e compreensão de demonstrações matemáticas, a saber:

- ➢ Promoção da visualização tridimensional;
- ➢ Compreensão de conceitos;
- ➢ Resgate de conhecimentos "adormecidos";
- ➢ Realização de descobertas;
- ➢ Autonomia na construção do conhecimento;
- ➢ Transição do concreto para o abstrato;

➢ Construção de conhecimentos.

Apesar de todas as potencialidades atribuídas ao uso dos MM é importante destacar que não é possível abrir mão da teoria. Por exemplo: ao solicitar que um aprendiz faça a medida das diagonais de um paralelogramo e ele constatar que a interseção é o ponto médio de ambas, estará determinando o resultado a partir de um caso particular. Ou seja, os materiais por si só, nem sempre serão suficientes para gerar uma demonstração, embora eles sejam capazes de induzir o aprendiz a criar conjecturas. Para garantir a generalização, muitas vezes, necessita-se de uma base teórica.

É importante recordar da limitação apresentada quando se necessitou da utilização de um objeto para medir ângulos. Este episódio nos chama atenção para dois fatos. Primeiro, sobre as dificuldades de se aplicar uma atividade à distância; segundo, acerca da importância da seleção dos materiais. Quanto ao primeiro, impossibilitou o pesquisador de fazer uma busca rápida pelo material que lhe faltava, na intenção de oferecê-lo aos participantes. O fator seguinte refere-se ao cuidado que se deve ter na escolha dos materiais para uma aula de matemática mediada por MM.

Para pesquisas futuras sugere-se a inserção de outros recursos didáticos, a exemplo de softwares de geometria, na promoção da aprendizagem de demonstrações matemáticas. E, por fim, é importante destacar que a experiência realizada pode ser estendida, naturalmente, à educação básica desde que os envolvidos detenham os pré-requisitos necessário para a compreensão da sequência.

REFERÊNCIAS

[1] S. Franco e C. Pereira, "O estudo da Geometria Espacial e Recursos Pedagógicos Manipuláveis: Uma Estratégia para Aguçar o Interesse e a Criatividade do Aluno", *PDE*, Paraná, 2013.

[2] A. Hoffer, "Geometry is more than proof", *Mathematics teacher*, v. 74, n. 1, p. 11-18, 1981.

[3] S. Lorenzato, "Por que não ensinar Geometria?", *Educação Matemática em Revista - SBEM 4*, 1995.

[4] I. Valle, "Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz o que se faz", *Lisboa*: Associação de Professores de Matemática, 1999.

[5] A. Zabala, "A prática educativa: como ensinar", tradução: Ernani F. da F. Rosa, Porto Alegre: Artmed, 1998.

[6] Brasil, Ministério da Educação, "Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática", Brasília: MEC/SEF, 1998.

[7] Brasil, Ministério da Educação, "Orientações curriculares para o ensino médio: Linguagens, códigos e suas tecnologias", Brasília: MEC/SEMTEC, 2006.

[8] Brasil, Ministério da Educação, "Base Nacional Comum Curricular", Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

[9] A. M. Nacarato, "Eu trabalho primeiro no concreto", Revista de Educaçáo Mateinárica, v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2005

[10] P. M. Barbosa, "O Estudo da Geometria", *Benjamin Constant*, Rio de Janeiro, v. 25, p. 14-22, 2003.

[11] J. L. M. Barbosa, "Geometria Euclidiana", *Coleção do Professor de Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 2006.

[12] A. Quintella, "Matemática: Primeiro ano colegial", *Companhia Editora Nacional*: São Paulo, 1967.

[13] R. A. Silva, "As dificuldades do professor no ensino da geometria espacial nas escolas estaduais no município de Canta Cruz". *In* IV Encontro de Iniciação à Docência da UEBP, (IV ENID), 2014, Paraíba. Anais do IV ENID, Paraíba, 2014.

[14] E. S. Assis, "Exposição axiomática da Geometria Euclidiana Plana através de histórias em quadrinhos: possibilidades, limitações e desafios", *Tese*, Ciências da Educação, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2017.

[15] A. L. M. Dias, "Uma História da Educação Matemática na Bahia". *In* XXVI Simpósio Nacional de História, 2011, São Paulo. Anais do XXVI SNH, São Paulo, ANPUH, 2014.

[16] L. Santos e S. Machado, "A demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad", *Revista de Educação*, v. XVIII, ed. 1, p. 49-82, 2011.

[17] M. A. Gravina, "Os ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento lógico-dedutivo", *Tese*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2001. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/2545/000321616.pdf?sequen. Acesso em: 25 jul. 2021.

[18] N. Balacheff, "Procesos de prueba en los alumnos de Matemáticas", Uma empresa docente, *Bogotá*: Universidad de los Andes, Colombia, 2000.

[19] M. D. Villiers, "Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad", *Educação e Matemática*, n. 62, p. 31-36, 2001.

[20] M. L. C. Rogenski e S. M. Pedroso, "O ensino da geometria na Educação Básica: Realidade e Possibilidades". Disponível em http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acesso em 29/04/2021.

[21] J. M. Leite, "Materiais Didáticos Manipuláveis no Ensino e Aprendizagem De Geometria Espacial". *In*: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação, Superintendência de Educação. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2008. Curitiba: SEED/PR., v. 1, 2011. Disponível em: <www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20>. Acesso em 28/04/2021. ISBN 978-85-8015-039-1

[22] A. M. P. Oliveira e J. PEREIRA, "Materiais manipuláveis e engajamento de estudantes nas aulas de matemática envolvendo tópicos de geometria", *Ciência & Educação (Bauru)*, v. 22, p. 99-115, 2016. https://doi.org/10.1590/1516-731320160010007

[23] G. B. Jesus, "Os materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem de matemática: algumas implicações no trabalho do professor". *In* XV Encontro de Educação matemática, 2013, Teixeira de Freitas. Anais do XV EEMAT, Teixeira de Freitas, 2013, UNEB.

[24] S. M. P. Santos e D. R. M. Cruz, "O lúdico na formação do educador". *In*: M. P. Santos (org.), O lúdico na formação do educador, Petrópolis: Vozes, 1997, p. 11-18.

[25] S. A. Lorenzato, "Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis". *In*: S. Lorenzato (org.), O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores, Campinas: Autores Associados, 2006.

[26] J. Dolz, M. Noverraz e B. Schneuwly, "Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento". *In*: R. Rojo e G. Cordeiro (Orgs.), Gêneros orais e escritos na escola, Campinas: Mercado de Letras, 2004. p. 95-128.

[27] S. Nobre e A. L. Manrique, "Análise de uma sequência didática envolvendo conteúdos de Geometria", Educação Matemática em Pesquisa, vol. 21, no. 5, pp. 134-150, 2019. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p134-150

[28] R. Bogdar e S. Biklen, "Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos", *Porto Editora*, 1982.

[29] A. Chizzoti, "A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios", *Revista Portuguesa de Educação*, v. 16, n. 2, p. 221-236, 2003.

BREVE BIOGRAFIA

Bruno Leal Bispo https://orcid.org/0000-0003-3176-2115

Licenciando em Matemática pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. Bolsista do Programa Residência Pedagógica na área de Matemática.

Elias Santiago de Assis https://orcid.org/https://orcid.org/0000-0002-5925-8810

Doutor em Ciências da Educação pela Universidade do Minho. Professor adjunto da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB). Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRB. Desenvolve pesquisas acerca do ensino e da aprendizagem das geometrias euclidianas e não euclidianas.