ARTIGO

A gestão de uma aula de aritmética em torno da formulação e verificação de conjecturas: o papel das interações em sala de aula

The management of an arithmetic class about the formulation and verification of conjectures: the role of the interactions in the classroom

La gestión de una clase de aritmética en torno a la formulación y verificación de conjeturas: el papel de las interacciones en el aula

Sara Beatriz Scaglia
Universidad Nacional del Litoral – Argentina

Fabiana Kiener
Universidad Nacional del Litoral – Argentina

Resumo

Este artigo pressupõe que dois aspectos essenciais no debate sobre a construção de sentido do conhecimento matemático são do jeito que são projetados e o papel das interações em sala de aula. O artigo enfoca o papel dos professores em uma classe da aritmética, durante a análise da validade das produções dos alunos (futuros professores de matemática) na formulação e teste de conjecturas tarefas. Na prova trabalho da dificuldade apresentada para gerenciar aula de matemática quando se pretende promover o auto-emprego de estudantes. O trabalho executado provou proveitosa para o desenvolvimento da formulação e testes de hipóteses. No entanto, uma análise detalhada dos professores, nas trocas produzidas, revela intervenções durante a conclusão do modo de avaliação da validação predominando (no sentido de Margolinas, 1992): Professor respostas válidas alunos, em vez de promover uma atividade argumentativa independente.

Palavras-chave: Papel de ensino. Interações.Conjectura

Abstract
This paper assumes that two essential aspects in the discussion on the construction of meaning of mathematical knowledge are the way in which is conceived and the role of classroom interactions. The article focuses on the role of teachers in a class of arithmetic, during the analysis of the validity of student productions (future mathematics teachers) in tasks of formulation and testing of conjectures. This work evidences the difficulty to manage math class when it hopes to promote independent work of students. The implemented task has proved be fruitful for the development of formulation and testing of conjectures. However, a detailed analysis of the produced exchanges reveals that in the teachers interventions during conclusion phases prevails the modality of assessment instead of validation (in the sense of Margolinas, 1992): the teacher evaluates the answers students and he don't promote an argumentative activity independent.

Keywords: Teaching role. Interactions. Conjectures

Resumen
En este trabajo se asume que dos aspectos esenciales en la discusión en torno a la construcción del sentido de los conocimientos matemáticos son el modo en que éstos se conciben y el papel de las interacciones en el aula. El artículo se centra en el rol del docente en una clase de aritmética, durante el análisis de la validez de las producciones de los estudiantes (futuros profesores de matemática)en tareas de formulación y contrastación de conjeturas. En el trabajo se presentan evidencias de la dificultad para gestionar la clase de matemática cuando se espera promover la actividad autónoma de los estudiantes. La tarea implementada ha resultado fructífera para el desarrollo de procesos de formulacióny contrastación de conjeturas. Sin embargo, un análisis en detalle de los intercambios producidos pone al descubierto intervenciones docentesdurante la fase de conclusión en las que predomina la modalidad de evaluación sobre la de validación (en el sentido de Margolinas, 1992): la profesora valida las respuestas de los estudiantes en lugar de promover una actividad argumentativa autónoma.

Palabras clave: Rol docente. Interacciones. Conjeturas

1. Introducción

En este artículo[1] se ponen de manifiesto algunos rasgos de la investigación en torno a la formación inicial del profesor de matemática llevada a cabo por los formadores de profesores, que podría identificarse con la línea de trabajo que Ponte (2004) caracteriza como "investigar la propia práctica". Está ligada a la necesidad del formador de profesores de matemática de reflexionar sobre algunos interrogantes relacionados con su trabajo, como los siguientes: ¿qué implica hacer matemática?, ¿cómo planificar la enseñanzapara que los estudiantes hagan matemática? y de acuerdo con la postura adoptada en los interrogantes anteriores, ¿cómo abordar la enseñanza de contenidos disciplinares con futuros profesores de matemática?

Entre las actividades propias del quehacer matemático, Itzcovich, Ressia, Novembre y Becerril (2007) mencionan la resolución de problemas, la producción de conjeturas, la responsabilidad de hacerse cargo mediante argumentos matemáticos de los resultados obtenidos, la anticipación (justificada) de los resultados de algunas experiencias sin necesidad de realizarlas efectivamente y la producción de propiedades estableciendo las condiciones de validez de las mismas.

El profesor de matemática, por lo tanto, debe tomar a su cargo la enseñanzadel razonamiento matemático y de los modos de hacer y validar propios de esta ciencia, en relación con los contenidos que se abordan (PANIZZA, 2005; CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997). Aprender a razonar de acuerdo con las reglas del pensamiento matemático no es algo que se dé de manera espontánea, sino que debe prepararse al alumno para ello. No sólo se precisan propuestas de enseñanza adecuadas sino, fundamentalmente, el logro de intervenciones docentes que se ajusten a los razonamientos de los alumnos y que intenten que los mismos se apropien de las formas de validación propias de la matemática (PANIZZA, 2005).

[1] Una primera versión de este trabajo(no publicada) ha sido presentado en la XXXVI Reunión de Educación Matemática organizada por la Unión Matemática Argentina, realizada en la ciudad de Rosario (Argentina) en el mes de septiembre de 2013.

Markiewitcz y Etchegaray (2010, p.2) también señalan la importancia de "generar espacios para que el alumno de nivel medio pueda enfrentarse a situaciones que conlleven la necesidad de formular y contrastar conjeturas", así como promover la reflexión en torno al tipo de razonamiento utilizado. En coherencia con esta posición, y proponiendo una respuesta a nuestro último interrogante, sostienen que para alcanzar estos objetivos "es necesario incluir esta problemática en la formación de los futuros profesores de matemática a fin de que ellos puedan crear las condiciones para que este tipo de trabajo se pueda desarrollar" (MARKIEWITCZ; ETCHEGARAY, 2010, p.3).

Coincidiendo con estas autoras, consideramos que el tratamiento de los contenidos disciplinares con los futuros profesores debería poner de manifiesto los rasgos característicos del quehacer matemático. En particular, resulta conveniente proporcionar la oportunidad de que se involucren en experiencias de aprendizaje que impliquen la producción y la contrastación de conjeturas.

La gestión de este tipo de actividad en el aula es diferente a la requerida para una enseñanza expositiva, dado que exige que el docente ceda (hasta cierto punto) a los estudiantes la responsabilidad sobre la validez de la producción matemática alcanzada. Se hace necesario desarrollar investigaciones que indaguen en torno a las intervenciones docentes que podrían facilitar u obstaculizar este tipo de trabajo. En este sentido, Quaranta y Tarasow (2004) afirman que es necesario diseñar situaciones de enseñanza que promuevan procesos de apropiación de los conocimientos por parte de los alumnos y analizar las intervenciones docentes que favorecen ese objetivo.

Sadovsky (2005) analiza algunas condiciones que favorecerían un trabajo en el aula de matemática que posibilite a los alumnos la producción de conocimiento. Afirma que el análisis de estas condiciones habilita una discusión acerca del sentido del conocimiento matemático, y enfoca su reflexión en torno a esta última cuestión. En su trabajo aborda diversos aspectos que considera centrales para repensar la construcción del sentido, entre los cuales incluye:

- la reflexión en torno al modo en que se concibe el conocimiento matemático con el fin de explicitar los asuntos que "constituyen bases esenciales para pensar la enseñanza" (p.19), y

- la revisión del papel que juegan las interacciones en el aula en el proceso de producción de conocimientos

Con respecto al primer aspecto, se ha mencionado la intención de promover en los alumnos (futuros profesores) el desarrollo de tareas propias del quehacer matemático. En cuanto al segundo aspecto, el análisis se centra en las interacciones que se producen en torno a una tarea matemática. En particular, el artículo está enfocado en el rol del docente en momentos en los que se debe determinar la validez de las producciones de los estudiantes, futuros profesores de matemática, en tareas de formulación y contrastación de conjeturas en el marco de una clase de aritmética.

2. **Marco teórico**

En primer lugar, nos interesa destacar la posición de algunos matemáticos en relación con las características de su trabajo, a partir de la cual fundamentamos la tarea propuesta a los futuros profesores.

En relación con el planteo de conjeturas, Polya (1968) define el razonamiento plausible o conjetural como aquel que nos permite formular conjeturas, examinar su validez y contrastarlas, y reformularlas para obtener nuevas conjeturas susceptibles de ser puestas a prueba. Sostiene que debe enseñarse a los alumnos a conjeturar y a demostrar, es decir, promover el uso de los dos tipos de razonamiento, el plausible y el deductivo.

Otro matemático que remarca la importancia del razonamiento plausible en el desarrollo de esta ciencia es Lakatos (1986, p. 20), quien afirma que "las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones".

Reconociendo la importancia del razonamiento conjetural, la tarea propuesta en la clase de futuros profesores de matemática refiere al estudio de la validez de una proposición aritmética, y su posterior reformulación, hasta lograr el enunciado y la justificación de una propiedad.

En segundo lugar, consideramos de interés reflexionar sobre las intervenciones docentes que propician o dificultan los procesos de razonamiento matemático. Quaranta y Tarasow (2004, p. 232) señalan algunas intervenciones que permiten mantener la incertidumbre y propician la validación por parte de los alumnos, destacando las siguientes:

> a) No responde directamente las preguntas, sino que las devuelve al grupo de alumnos
> b) No convalida de entrada las respuestas correctas
> c) Argumenta a favor de una respuesta errónea
> d) Pide mayores explicaciones (al tomar respuestas de forma literal, al plantear que no entiende una respuesta)
> e) Deja asentada la duda respecto a la validez de la respuesta al escribirla con lápiz (ya que puede borrarse y corregirse). (QUARANTA; TARASOW, 2004, p. 232)

Estas autoras centran el análisis en los procesos de búsqueda de criterios, por parte de los estudiantes, para establecer si sus producciones son correctas, y en las intervenciones docentes que propician tales procesos. Señalan algunas diferencias respecto al conocimiento que se genera y circula en las clases, de acuerdo al modo en que se realice la evaluación de las producciones. Lo más habitual es que sea el docente quien evalúe, cerrando de este modo el problema y limitando el desafío para el alumno. Cuando se apela a un criterio externo (la autoridad del docente) para validar las respuestas, no se posibilita que el alumno "avance en la comprensión de las razones por las cuales un conocimiento funciona de una manera determinada" (QUARANTA; TARASOW, 2004, p. 230) y no se plantea la necesidad de un trabajo reflexivo sobre las respuestas.

Otra posibilidadse presenta cuando se delega en los estudiantes la evaluación de los resultados o ideas matemáticas generadas en la clase. Esto no significa que el docente sostenga permanentemente la incertidumbre. Necesariamente, debe recuperar su papel de "responsable del saber" ante la clase para retomar los conocimientos que se pusieron en juego, reordenarlos, establecer nuevas relaciones.

Con respecto a la evaluación de las producciones de los alumnos, Margolinas (1992, p. 128) denomina fase de conclusión a "*la fase en el curso de la cual el alumno accede a una información sobre la validez de su respuesta. Esta información debe ser pertinente desde el punto de vista del problema y del saber*". Dada la necesidad de dar cuenta de la validez desde el punto de vista matemático del resultado alcanzado por el alumno, esta fase queda bajo la responsabilidad del maestro. No obstante, Margolinas plantea dos modos opuestos de ejercer esta responsabilidad, a partir de las dos modalidades de la fase de conclusión:

1. "*La fase de conclusión es una fase de evaluación cuando la responsabilidad del maestro se ejerce bajo la forma de un trabajo público para el alumno, en relación con el problema y el saber*" (MARGOLINAS, 1992, p.128). El docente, que mantiene una relación privilegiada con el saber, proporciona un juicio de validez sin recurrir a la respuesta del estudiante.

2. *"La fase de conclusión es una fase de validación si el alumno decide él mismo la validez de su respuesta"* (MARGOLINAS, 1992, p.128). En este caso, el trabajo del docente no está ausente (porque sigue manteniendo la responsabilidad), pero es privado, porque no lo explicita al estudiante.

Retomaremos estas modalidades de la fase de conclusión para analizar las intervenciones docentes durante el desarrollo de la clase.

3. Cuestiones metodológicas

Ponte (2004) afirma que los profesores universitarios se encuentran en una posición privilegiada para investigar su propia práctica:

tienen formación de posgrado, la investigación constituye una de sus funciones profesionales y se enfrentan en su práctica con numerosos problemas. Parece entonces bastante natural que se propongan estudiar los problemas que afrontan como docentes con el fin de conocerlos y, eventualmente, superarlos.

Una metodología que tiene entre sus objetivos abordar los problemas que surgen en la práctica es la investigación-acción. El profesor es considerado como un profesional autónomo que investiga reflexionando sobre su propia práctica(ELLIOT, 1997). Entre las características de esta metodología en la escuela este autor menciona las siguientes:

- Permite analizar las acciones humanas y las situaciones sociales experimentadas por el profesor como problemáticas, susceptibles de cambio y que requieren una respuesta práctica.

- Tiene como propósito profundizar la comprensión del profesor de su problema.

- "Al 'explicar lo que sucede', la investigación-acción construye un 'guión' sobre el hecho en cuestión, relacionándolo con un contexto de contingencias mutuamente interdependientes, o sea, hechos que se agrupan porque la ocurrencia de uno depende de la aparición de los demás" (ELLIOT, 1997, p.25).

En este trabajo el objeto de estudio lo constituyen las interacciones que se producen en una clase de aritmética de una asignatura de segundo año del profesorado de matemática, a la que asistieron cinco alumnos. La docente del grupo es una de las autoras del artículo. La clase se graba en audio y se transcribe íntegramente[2].

El estudio posee un alto grado de validez interna (confianza con que se puede afirmar que se está observando realmente lo que cree observar) por las siguientes características (GOETZ; LECOMPTE, 1988):

[2] Una primera transcripción ha sido realizada por Cinthia Rougier, alumna avanzada del profesorado de matemática, en el marco de una adscripción en investigación.

- la convivencia con los participantes (la investigadora es la docente del curso),

- el estudio se desarrolla en un escenario natural, lo cual refleja la realidad de las experiencias vitales de los participantes con mayor exactitud de la que permiten escenarios más artificiales o laboratorios,

- el proceso de autovigilancia del investigador denominado subjetividad disciplinada, por el que todas las fases de su actividad se someten a un cuestionamiento y reevaluación continuos.

Con el fin de afianzar la fiabilidad interna (coincidencia entre varios investigadores que trabajan en un mismo estudio) se proponen las siguientes estrategias (GOETZ; LECOMPTE, 1988):

El uso de descriptores de bajo nivel inferencial (razón por la que se transcribe la clase completamente, tratando de evidenciar los distintos matices que pueden presentarse en las intervenciones de cada interlocutor).

La revisión por otros investigadores. En este caso, la otra autora del artículo interviene activamente mediante la escucha atenta del audio, la revisión de la transcripción y el análisis de los datos. Asimismo, la presentación de esta comunicación tiene el objetivo de someter a la revisión de pares el estudio y el análisis realizados.

4. Justificación de la tarea

La clase observada corresponde a la asignatura Matemática Discreta I de 2do año del Profesorado de Matemática, durante el desarrollo de Aritmética. Siendo ésta el campo de la matemática que se ocupa de estudiar las propiedades de los números naturales y enteros (GENTILE, 1985), desde el inicio del cursado, se ha acordado que se trabaja sobre estos conjuntos numéricos y que el divisor debe ser no nulo, por lo que no es necesario especificarlo en cada tarea propuesta.

Con el fin de generar una situación en la que los estudiantes formulen y analicen conjeturas, se propone el siguiente problema (adaptado de TORRES; NASSIF; FEDONCZUK, 2010):

1) Prueba con los siguientes valores numéricos si se cumple la proposición:
*Si un número "a" divide al producto "***b .c***", entonces "***a***" divide a "***b***" o "***a***" divide a "***c***".*

a) **a** = 2; **b** = 10; **c** = 5
b) **a** = 3; **b** = 3; **c** = 4
c) *a* = 5; **b** = 2; **c** = 30

¿Se puede afirmar que esta proposición es verdadera? ¿Por qué?
(Luego de la discusión de esta primera parte, se plantea la siguiente consigna:)

2) Sabiendo que un número divide al producto de otros dos, ¿qué condiciones agregamos al enunciado para asegurar que divida a uno de ellos?

La primera consigna exige explorar un enunciado acompañado de algunos ejemplos para los cuales el mismo es verdadero. Uno de los obstáculos planteados por Balacheff (2000) en la enseñanza de la demostración está relacionado con el funcionamiento del sistema didáctico, que se caracteriza por despojar a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Por esa razón, en la tarea planteada en lugar de proponer la demostración de una propiedad dada, queda a cargo del alumno la determinación de la validez del enunciado.

Entre las respuestas esperadas de los alumnos se presentan básicamente dos posibilidades: analizar los tres ejemplos para los cuales se cumple la proposición y afirmar que es verdadera o hallar un contraejemplo y afirmar que es falsa.

La segunda consigna requiere la reformulación del enunciado original, lo que conduce a formular y contrastar una conjetura. Entre las condiciones posibles que los estudiantes pueden proponer figuran las siguientes: que **a** sea coprimo con **b** o con **c**, o bien, que **a** sea un número primo.

Para analizar la veracidad de la nueva conjetura propuesta, los alumnos pueden recurrir a métodos directos o indirectos de demostración y a la búsqueda de contraejemplos.

Entre las reglas del debate que se pueden trabajar con la consigna mencionamos las siguientes (ARSAC; MANTE, 1996):

- Principio del Tercero Excluido (un enunciado matemático es verdadero o falso).
- El papel del contraejemplo para invalidar un enunciado.
- Varios ejemplos que satisfacen un enunciado no son suficientes para afirmar que el mismo es verdadero.

A priori, consideramos que estas reglas son conocidas y aceptadas por los alumnos, dado que han cursado en primer año un Taller de Métodos de Demostración. La tarea proporciona la oportunidad de que los estudiantes, futuros profesores de matemática, tengan espacios durante su formación inicial para el desarrollo de un tipo de trabajo caracterizado por la posibilidad de formular y contrastar conjeturas.

5. Un estudio de la clase

5.1. Descripción

El desarrollo de la clase se resume en las siguientes etapas:

a) Resolución de la consigna 1. Hallazgo de un contraejemplo para la conjetura 1 (enunciada en la tarea).

b) Resolución de la consigna 2.

- Planteo de una nueva conjetura por parte de Noemí (Conjetura 2).
- Análisis de la conjetura 2 mediante dos estrategias que se desarrollan en forma simultánea: demostración por reducción al absurdo (Noemí) y búsqueda de contraejemplo (Andrea).
- Planteo de una nueva conjetura (Conjetura 3).
- Demostración de la conjetura 3.

A continuación se presenta un relato que incluye los sucesos más significativos de cada etapa, en el que se destacan dos alumnas por su participación activa (Andrea y Noemí[3]).

Al inicio de la clase, los alumnos analizan si los ejemplos propuestos en la consigna verifican el enunciado. Luego, prueban con otros valores numéricos hasta que encuentran un contraejemplo y afirman que el enunciado es falso.

Una vez aceptada la falsedad de la conjetura la docente plantea la segunda consigna. Noemí formula la segunda conjetura, agregando a la hipótesis del enunciado original que **a** sea menor que **b** o que **c**. La discusión que se genera a partir de la misma se desarrolla en torno a las estrategias diferentes planteadas por dos alumnas: Noemí intenta demostrarla por Reducción al Absurdo, mientras que Andrea busca un contraejemplo para refutarla. Con respecto al razonamiento seguido por Noemí se observa que confunde el uso del método elegido: en lugar de negar la tesis, niega una parte de la hipótesis. Además, comete un error en la negación de la disyunción (la proposición "$\mathbf{a}<\mathbf{b}$ o $\mathbf{a}<\mathbf{c}$" la niega como "$\mathbf{a}>\mathbf{b}$ o $\mathbf{a}>\mathbf{c}$"). El argumento utilizado para la demostración está basado en asegurar que si $\mathbf{b}/\mathbf{a}$ es racional entonces **a** no divide a **b**. La docente no advierte el error que comete la alumna en el razonamiento por reducción al absurdo y dialoga con la alumna sobre las ideas que ésta plantea en relación con la pertenencia de $\mathbf{b}/\mathbf{a}$ al conjunto Q.

Mientras transcurre esta discusión entre Noemí y la docente, Andrea se dedica a buscar contraejemplos. Encuentra uno que resulta erróneo ($\mathbf{a} = 7$, $\mathbf{b} = 15$ y $\mathbf{c} = 12$; $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = 180$)[4]. Más tarde, afirma haber encontrado otro, pero en principio es ignorado por la docente y el resto de la clase, que siguen con la discusión en torno al razonamiento de Noemí. Cuando esta última propone abandonar sus intentos de demostración dado que su compañera insiste con la existencia de un contraejemplo, la clase se concentra en el análisis de éste: $\mathbf{a} = 9$, $\mathbf{b} = 12$ y $\mathbf{c} = 15$.

[3] Se utilizan nombres ficticios.
[4] La estudiante cree haber encontrado un contraejemplo porque calcula erróneamente bxc, ya que obtiene 1680 en lugar de 180 (1680 es divisible por 7, en tanto que 180 no lo es).

Con el convencimiento de que los estudiantes han reconocido la falsedad de la conjetura, la docente propone mejorarla. Sugiere centrar la atención en los divisores de los números involucrados. Se genera una discusión en la que se ponen de manifiesto confusiones de distinta índole (que se trabajarán en mayor detalle más adelante), dudas de Noemí respecto a si su conjetura debe ser descartada e intervenciones de la docente juzgando las respuestas de los estudiantes.

Superadas medianamente estas discusiones, se plantea la última conjetura (Conjetura 3: si un entero no nulo **a** divide al producto de dos enteros **b**.**c**, y **a** es coprimo con **b**, entonces **a** divide a **c**) que se demuestra a partir de un intercambio entre Andrea y la docente.

5.2. Análisis de intervenciones docentes

En esta sección analizaremos algunas intervenciones del docente que ponen de manifiesto la dificultad para gestionar ambientes de clase caracterizados por la participación activa del alumno en la construcción del conocimiento.

Entre los episodios que interesan destacar en este relato centraremos la atención en dos cuestiones: las fallas en la comunicación entre la docente y los alumnos y el papel del docente en la fase de conclusión.

5.2.1. Interpretaciones inadecuadas que obstaculizan el debate

La necesidad de atender esta cuestión surge a posteriori de la implementación de las tareas, al ponerse en evidencia en la transcripción de la clase numerosas interpretaciones inadecuadas o incompletas de parte del docente de algunas afirmaciones de los estudiantes. Se pone de manifiesto la dificultad para hacer evolucionar la discusión o para coordinar un proceso de debate cuando docentes y alumnos siguen procesos de razonamientos diferentes que no se explicitan completamente. Estas situaciones requieren ser tenidas en cuenta cuando se diseñan y se implementan tareas no dirigidas, donde las estrategias de los alumnos resultan difícilmente predecibles.

A continuación se analiza un fragmento de la clase en el que se manifiesta algunas fallas en la comunicación que afectan el desarrollo del debate.

Una alumna (Noemí) intenta demostrar la conjetura 2 (Si un número **a** divide al producto**b**.**c**, con **a**<**b** o **a**<**c**, entonces **a** divide a **b** o **a** divide a **c**) por reducción al absurdo.

> (144) Noemí: Profe, no sé como asegurar, porque yo puedo suponer que **a** es mayor que **b** o que **c**, ¿no es cierto? Entonces, necesito probar, digo yo, que **b** sobre **a**, si **a** es mayor que **b** o mayor que **c**, va a pertenecer a los racionales. Pero yo puedo demostrar... ¿hay una propiedad que me demuestra eso? Que si el denominador es mayor que el numerador, es un número racional, ¿es una propiedad?
> (145) P: ¿Racional? ¿Vos estas buscando racional? Estas trabajando todo con enteros... Cuando tenés dos enteros...

La respuesta de la profesora pone en evidencia que no se percata enseguida de que la aplicación del método de demostración por reducción al absurdo es inadecuada: la estudiante en lugar de negar la tesis, niega una parte de la hipótesis (*"puedo suponer que* **a** *es mayor que* **b** *o que* **c***")*. Se conjetura que espera arribar a la negación de una parte de la tesis. El argumento utilizado para la demostración está basado en asegurar que si **b**/**a** es racional entonces **a** no divide a **b**. Además, comete un error en la negación de la disyunción (la proposición "**a**<**b** o **a**<**c**" la niega como "**a**>**b** o **a**>**c**").

La profesora cuestiona la idea de utilizar números racionales para la demostración porque, aunque no lo explicita, considera que para justificar una propiedad aritmética este tipo de argumentos es inadecuado. Esto denota su falta de versatilidad para atender justificaciones de naturaleza diferente a las previstas.

Además, por las intervenciones que siguen, se evidencia que al principio no comprende la idea de Noemí, de que los números racionales que está considerando son los que tienen denominador mayor que el numerador, como se pone de manifiesto en el siguiente fragmento del diálogo:

> (147) P: A ver por ejemplo...
> (148) Lorena: Ahora igual sí ya encontré un contraejemplo...
> (149) Noemí: Y uno sobre dos, uno sobre tres, uno sobre cuatro, ninguno me va a dar...
> (150) P: No, no, no ojo que estas generalizando cosas que no son. Un número racional lo podría decir… Este…ehh…quince sobre tres, es un número racional y la división te da cinco.
> (151) Noemí: Si pero 3 es menor.
> (152) P: Ah...
> (153) Noemí: Pero con el denominador mayor...

Se suceden una serie de intercambios fundamentalmente entre Noemí y la docente, donde esta última intenta seguir el razonamiento de la estudiante.En un momento dado, Noemí reconoce que la negación de la disyunción es inadecuada.

> (197) P: No, no, habría que mejorar el tema, porque vos decís, eh: primer conjetura: Si **a** es menor que uno de los dos, eh… además se cumple que **a**...
> (198) Noemí: Ahí para la negación tendría que ser que **a** es mayor que **b** y (enfatiza la "y") que **c**, que los dos, ¿o no?, para negar eso.
> (199) P: Vos tenés que… Nosotros tenemos que negar que **a**... cómo hacerlo por la lógica: **a**… (escribe en el pizarrón "**a**<**b**") o **a** menor que **c** (escribe en el pizarrón"o**a**<**c**"). ¿Cómo niego esto?
> Alumnas: (Hablan juntas, termina hablando una sola)
> (200) Andrea: **a** mayor o igual que **b** o… **a** mayor o igual que **c** ($a \geq b$ o $a \geq c$).
> (201) Alumna: "Y"…, "y"… (corrige a Andrea, enfatizando la "y")
> (202) Andrea: Y(enfatizando la "y") **a** mayor o igual que **c**.
> (203) Noemí: Claro, yo ahí lo estoy probando con uno sólo y me falta con el otro.

Recién en la intervención 206 la profesora escribe la conjetura 2 en el pizarrón y en la 208 señala que el planteo realizado por Noemí para demostrar por reducción al absurdo es incorrecto, como se observa a continuación:

(206) P: Si **a** *divide a* **b**.**c** *(escribe "***a** | **a**.**b***") y además sabemos que* **a**... *perdón,* **a** *es menor que* **b** *(escribe* **a**<**b***) o* **a** *menor que* **c** *(escribe* **a**<**c***), entonces... eso es lo que ella está planteando, entonces* **a** *divide a* **b** *o* **a** *divide a* **c**. *¿Me siguen? Eso es lo que vos estas planteando, esa conjetura. Escrita, ¿cómo sería? Que* **a** *divide al producto y además sabemos que* **a** *es más chico que uno de ellos por lo menos ¿sí?, entonces se cumple la propiedad.*

(207) Noemí: **a** *por…*

(208) P: ¿Está? Entonces, si yo ahora quiero hacer por reducción al absurdo, eeeh… no tendría que negar esto, tendría que negar eso (señala en el pizarrón la hipótesis), negar el resultado y llegar a una contradicción. Ahí estaba la falla.

La discusión en torno a este episodio pone de manifiesto algunas limitaciones de la profesora en la gestión del debate generado a partir de la intervención 144 de Noemí.

La desorganización que se observa se podría haber evitado si hubiese promovido la escritura en el pizarrón del razonamiento de Noemí. El intercambiosobre ideas expresadas oralmente, dificultala interpretación cabal de los argumentos de los estudiantes, más aún si se trata de ideas novedosas, que la docente no ha previsto.La discusión oral impidió que la clase en general tome nota de las dificultades en el razonamiento de Noemí (planteo erróneo del método por reducción al absurdo, negación incorrecta de la disyunción). Estas interpretaciones inadecuadas se agudizan debido a imprecisiones en el uso del lenguaje matemático (por ejemplo, cuando Noemí hace referencia a los "racionales", está pensando en realidad en aquellos racionales que no son enteros).

Es posible que el debate hubiese resultado más fructífero si la docente, en lugar de discutir oralmente las ideas de Noemí, hubiese destinado un tiempo para el trabajo individual en torno a la consigna, aún cuando sean pocos alumnos. Es probable que el tipo de intercambio planteado haya impedido que el resto de los estudiantes puedan desarrollar sus propios argumentos.

Una sola alumna (Andrea) interrumpe en tres oportunidades el diálogo entre Noemí y la docente, afirmando haber encontrado un contraejemplo, pero no logra que se le preste atención. Esto se debe a que esta alumna es recursante y la docente decide, en ese momento, seguir el razonamiento de la estudiante (Noemí), aún sabiendo que la conjetura era falsa, por lo que no iba a poder demostrarse.

En este episodio se manifiesta que para promover procesos de validación por parte de los estudiantes no es suficiente proponer una tarea interesante, sino que juega un papel relevante la gestión del profesor. Las intervenciones del docente pueden condicionar los razonamientos de los alumnos cuando el mismo sigue, como en este caso, el planteo de una estudiante (Noemí), descuidando las propuestas de otra (Andrea) e impidiendo que el resto de la clase pueda generar sus propios razonamientos. Al observar que el profesor selecciona una propuesta, los estudiantes asumen que la resolución debe pensarse por ese camino, por lo que la tarea ya no representa un desafío para ellos.

5.2.2. Papel del docente en la fase de conclusión

Para el desarrollo exitoso de una tarea que persigue la formulación y validación de conjeturas por parte de los estudiantes es crucial atender a la actitud del docente en el momento de evaluar la validez de una respuesta. En la clase estudiada la intervención del docente se corresponde siempre con la modalidad de evaluación en la fase de conclusión.

En la intervención 208 mencionada anteriormente, se observa que la docente proporciona un juicio de valor en lugar de brindar la posibilidad de que el alumno reflexione sobre la utilización adecuada del método de demostración por reducción al absurdo: *"si yo ahora quiero hacer por reducción al absurdo, eeeh… no tendría que negar esto, tendría que negar eso, negar el resultado y llegar a una contradicción. Ahí estaba la falla"*

En el siguiente fragmento la docente en lugar de sostener la incertidumbre, responde directamente:

(294) Noemí: En ese contraejemplo que era falso, yo veo que el 3 divide tanto a **a***, como a* **b** *como a* **c***, igual que allá arriba, el tres. ¿O es el mismo? No! El 3 divide tanto a 9, como a 3 como a 6. En cambio en los ejemplos donde sí era verdadero, el* **a** *tiene un divisor común con sólo uno, o con* **b** *o con* **c***, ¿no tiene nada que ver eso? ¿Sí?*

(295) P: Sí tiene que ver. Está muy bien esa observación, porque ahí está la clave de la condición que nos falta agregar acá en la primera parte de la hipótesis.

La alumna busca confirmar que su interpretación es adecuada. La docente podría haber devuelto la pregunta al resto de la clase (¿qué piensan del razonamiento de Noemí?, ¿es correcto?) y no lo hace. En cambio, convalida inmediatamente la interpretación (correcta) de Noemí. Este momento de la clase es fundamental, porque expresa claramente la condición que debe añadirse en la hipótesis para que la conjetura resulte verdadera. La sanción inmediata de la docente coarta la posibilidad de que los alumnos maduren la idea por sí mismos.

El diálogo continúa de la siguiente manera:

(296) Andrea: Que tiene que ser menor y múltiplo de **b** *o múltiplo de* **c**.

(297) P: Mirá bien, piensen bien.

(298) Andrea: 2 divide a 10, por ejemplo en el a), el 3 divide al 3 y el 5 divide al 30. Pero el 2 no divide al 5, el 3 no divide al 4 y el 5 no divide al 2. O sea que tiene que ser divisor solamente de uno.

(299) P: Claro, ¿qué estás diciendo? Está muy bien esa conclusión. O sea tomemos los ejemplos que están ahí. El a era el 2, que en ese primer ejemplo es divisor de 10 pero no es divisor de 5.

En este fragmento se observa que Andrea expresa una condición inadecuada (confunde múltiplo con divisor). La respuesta de la docente ("Mirá bien, piensen bien") informa a la alumna que debe revisar su idea.

En la siguiente frase, Andrea retoma los ejemplos del enunciado, notando que el número a es divisor de uno sólo de los factores (**b**ó**c**). Rápidamente, la docente convalida la respuesta ("Está muy bien esa conclusión").

6. Reflexiones finales

La actividad matemática desarrollada en torno a la tarea propuesta presenta características del razonamiento plausible o conjetural (POLYA, 1968), dado que los estudiantes tuvieron oportunidad de estudiar una conjetura, examinar su validez y reformularla para obtener una nueva.

En la clase se ponen de manifiesto dos posiciones diferentes en torno al análisis de las proposiciones aritméticas en juego (por un lado, el intento por demostrarlas y por el otro, la búsqueda de contraejemplos) que según Lakatos (1986) posibilitan la incesante mejora de las conjeturas.

En el trabajo se presentan evidencias de la dificultad para gestionar la clase de matemática cuando se espera promover la actividad autónoma de los estudiantes. Un análisis en detalle de los intercambios producidos pone al descubierto intervenciones docentes durante la fase de conclusión en las que predomina la modalidad de evaluación sobre la de validación (en el sentido de Margolinas, 1992): la profesora valida las respuestas de los estudiantes en lugar de promover una actividad argumentativa autónoma. Como señalan Quaranta y Tarasow (2004, p.232) "no basta un "buen problema" para que asistamos en el aula a producciones interesantes" sino que el tipo de interacción entre el alumno y la tarea propuesta depende en gran medida de la manera en que el docente gestiona la clase.

El análisis muestra la necesidad de generar y estudiar, durante la formación inicial de futuros profesores, las condiciones en las que es posible promover entornos de aprendizajeen los que los estudiantes hagan matemática y experimenten situaciones que puedan replicar en el futuro como docentes en la escuela secundaria.

Con respecto al doble rol que cumple una de las autoras del artículo (docente e investigadora), cabe destacar la posibilidad de contar con información que explique algunas de sus decisiones e intervenciones, como por ejemplo su resistencia a aceptar argumentos que involucran a los números racionales y la decisión de evitar que el ritmo de la clase sea marcado por una alumna recursante. Además, como docentes-investigadores, resulta interesante generar espacios para pensar sobre las propias intervenciones, puesto que ello brinda información acerca de los procesos que se promueven u obstaculizan en clase, a veces incluso involuntariamente.

Finalmente, otra cuestión que en este trabajo no se ha abordado, refiere a la necesidad de propiciar una reflexión con los futuros profesores acerca del tipo de trabajo desarrollado durante la producción de propiedades matemáticas rescatando, por un lado, elementos del que hacer matemático (la formulación y contrastación de conjeturas, los tipos de razonamiento, las reglas lógicas, por mencionar algunos) y por el otro, los procesos de enseñanza y de aprendizaje que pueden tener lugar en el aula, dependiendo del rol asumido por el profesor y del grado de autonomía del que goza el estudiante a la hora de validar su producción.

Referências

ARSAC, Gilbert; Mante, Michel. Situations d'initiation au raisonnementdéductif. **Educational Studies in Mathematics**, 33, 21-43.1996.

BALACHEFF, Nicolas. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**.: una empresa docente. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudiar matemáticas**: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona: Horsori, 1997.

DE TORRES, Cecilia; NASSIF, Keila; FEDONCZUK, Miguel. **Los esquemas de prueba en Aritmética empleados por alumnos de diferentes niveles educativos**. Tesina (Licenciatura no publicada). Universidad de Concepción del Uruguay, Paraná, 2010. Directora: Sara Beatriz Scaglia.

ELLIOT, John. **La investigación-acción en educación**. 3. ed. Madrid: Morata, 1997.

GENTILE, Enzo. **Aritmética e Elemental**. Washington, D.C.: Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1985.

GOETZ, Judith Preissle; LECOMPTE, Margaret Diane. **Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa**. Madrid: Morata, 1988.

ITZCOVICH, Horacio; RESSIA, Beatriz; NOVEMBRE, Andrea; BECERRIL, María Mónica. **La matemática escolar**: las prácticas de enseñanza en el aula. Buenos Aires: Aique Educación, 2007.

LAKATOS, Imre. **Pruebas y refutaciones**: la lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Universidad, 1986.

MARGOLINAS, Claire. Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion.

Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 12, n. 1, 113-158, 1992.

MARKIEWICZ, Maria Elena; ETCHEGARAY, Silvia Catalina. El razonamiento conjetural en la formación de profesores. III Reunión Pampeana de Educación Matemática. Disponible en CD. 2010.

PANIZZA, Mabel. **Razonar y conocer**: aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos. Buenos Aires: Zorzal. 2005.

POLYA, George. **Mathematics and plausible reasoning**: patterns of plausible inference. 2. ed. New Jersey: Princeton University, 1968.

PONTE, João Pedro da. Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In: CASTRO, Encarnación; DE LA TORRES, Enrique(Ed.).**Investigación en educación matemática***,* Coruña: Universidad da Coruña. 2004. p. 61-84.

QUARANTA, Maria Emilia; TARASOW, Paola. Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. **Relime,** 7(3), 2004, p. 219-234.

SADOVSKY, Patricia. **Enseñar matemática hoy**: miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires: Zorzal. 2005.

Profa. Dra. Sara Beatriz Scaglia
Professora da Universidad Nacional del Litoral - Argentina
Facultad de Humanidades y Ciencias
Programa de Pós-Graduação em Didácticas Específicas
Grupo de Pesquisa la Construcción del Sentido en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática
E-mail: scaglia@fhuc.unl.edu.ar

Profa. Dra.Fabiana Kiener
Professora da Universidad Nacional del Litoral - Argentina
Facultad de Humanidades y Ciencias
Grupo de Pesquisa sobre la Construcción del Sentido en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática
E-mail: fkiener@gmail.com

Recebido em: 02 mar. 2015.
Aprovado em: 10 abr. 2015