

**ENGENHARIA DIDÁTICA DE FORMAÇÃO (EDF):  
ANÁLISE PRELIMINAR E ANÁLISE A *PRIORI* PARA A  
CONSTRUÇÃO DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ )**

FORMACIÓN EN INGENIERÍA DOCENTE (FID): ANÁLISIS  
PRELIMINAR Y ANÁLISIS PRIORITARIO PARA LA CONSTRUCCIÓN  
DE CONJUNTOS NUMÉRICOS ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ )

TEACHING ENGINEERING TRAINING (TET): PRELIMINARY  
ANALYSIS AND A PRIORI ANALYSIS FOR THE CONSTRUCTION OF  
NUMERICAL SETS ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ )

**DOI: 10.22481/rbba.v11i01.10369**

Georgyana Gomes Cidrão  
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, Ceará, Brasil  
ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4542907481251503>  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4401-5904>  
Endereço eletrônico: [georgyanacidrao28@gmail.com](mailto:georgyanacidrao28@gmail.com)

Francisco Régis Vieira Alves  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil  
ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3288513376230522>  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>  
Endereço eletrônico: [fregis@ifce.edu.br](mailto:fregis@ifce.edu.br)

**RESUMO**

Durante a década de 80 os pressupostos da Engenharia Didática mantinha o auge das pesquisas acerca dos alunos e do ensino-aprendizagem. Não tardiamente, em 2009 na França, pesquisadores reconheceram que os professores precisavam ser inseridos no quadro de suas pesquisas, passando a integrar a tríade: formação-pesquisa-ensino na chamada de Engenharia Didática de Formação, uma extensão da engenharia didática para a formação de professores de Matemática. Portanto, neste trabalho é apresentado um recorte de pesquisa de mestrado que

ISSN 2316-1205	Vit. da Conquista, Bahia, Brasil / Santa Fe, Santa Fe, Argentina	Vol. 11	Num. 1	Jun/2022	p. 58-72
----------------	--	---------	--------	----------	----------

tem como objetivo mostrar o uso da engenharia didática de formação na formação inicial de professores de matemática de uma instituição pública de ensino brasileira, a partir da construção dos conjuntos numéricos. Construíram-se situações-problemas como recurso didático, para isso, foi usado duas fases da engenharia didática: análise preliminar e análise a priori. Por fim, a engenharia didática é uma metodologia de pesquisa verossímil a uma sala de aula, nela é possível o professor/pesquisador estudar os fenômenos encontrados na sala de aula, porém, em uma ótica de pesquisa e formação.

**Palavras-chave:** Engenharia Didática de Formação. Conjuntos numéricos. Formação de professores.

### RESUMEN

En la década de 1980 era común que los supuestos de la Ingeniería Didáctica mantuvieran el pico de la investigación sobre los estudiantes y la enseñanza-aprendizaje. No hace mucho, en 2009 en Francia, los investigadores reconocieron que el profesorado necesitaba ser incluido en el marco de su investigación, pasando a formar parte de la tríada: formación-investigación-docencia en la denominada Ingeniería de Formación Didáctica, una extensión de la ingeniería didáctica para la formación de profesores de Matemáticas. Por lo tanto, este trabajo presenta un extracto de una investigación de maestría que tiene como objetivo mostrar el uso de la formación en ingeniería didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas en una institución educativa pública brasileña, a partir de la construcción de conjuntos numéricos. Se construyeron situaciones-problema como recurso didático, y para ello se utilizaron dos fases de la ingeniería didáctica: análisis preliminar y análisis a priori. Finalmente, la ingeniería didáctica es una metodología de investigación creíble para un aula, en la que es posible que el docente / investigador estudie los fenómenos encontrados en el aula, sin embargo, desde una perspectiva de investigación y formación.

**Palabras clave:** Ingeniería Didáctica Educativa. Conjuntos numéricos. Formación del profesorado.

### ABSTRACT

It was common in the 1980s for Didactic Engineering assumptions to maintain the peak of research on students and teaching-learning. Not too late, in 2009 in France, researchers recognized that teachers needed to be included in the framework of their research, becoming part of the triad: training-research-teaching in the so-called Didactic Training Engineering, an extension of didactic engineering for the training of Mathematics teachers. Therefore, this work presents an excerpt from a master's research that aims to show the use of didactic engineering training in the initial training of mathematics teachers in a public Brazilian educational institution, based on the construction of

numerical sets. Problem-situations were constructed as a didactic resource, and for this, two phases of didactic engineering were used: preliminary analysis and a priori analysis. Finally, didactic engineering is a research methodology that is credible to a classroom, in which it is possible for the teacher/researcher to study the phenomena found in the classroom, however, from a research and training perspective.

**Keywords:** Educational Didactic Engineering. Numerical sets. Teacher education.

## INTRODUÇÃO

Este trabalho é um recorte de dissertação, aqui apresentamos os resultados de uma pesquisa feita na formação de professores de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do estado do Ceará, *campus* Fortaleza-CE. Tendo como principal objetivo o uso de uma Engenharia Didática de Formação no ensino dos conjuntos numéricos, para isso, realizamos a partir de duas fases da engenharia didática como um recurso didático para os professores usarem nas aulas sobre os conjuntos numéricos, criamos situações-problemas a partir de duas fases: (i) análise preliminar e (ii) concepção e análise *à priori*.

Em 2009, na França, os princípios da Engenharia Didática tomaram um destaque por Perrin-Glorian (2009) na XV<sup>a</sup> Escola de Verão em Didática da Matemática, ao definir uma engenharia voltada para a formação de professores que ensinam matemática, propondo uma engenharia que produz recursos para as aulas de Matemática. Dessa forma, passando a existir duas engenharias a priori, uma de primeira geração, e outra de segunda geração (TEMPIER, 2016). A nossa pesquisa, tomou como base a engenharia de segunda geração, que preza pela tríade: pesquisa-formação-ensino, reutilizando as fases da engenharia clássica: análise preliminar, concepção e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação.

Neste sentido, como mencionado, neste trabalho por se tratar de um recorte de pesquisa, optamos por demonstrar o uso apenas duas fases da engenharia na construção dos conjuntos numéricos: Natural, Inteiro, Racional e Real. Além disso, os documentos oficiais para o ensino médio Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), apontam que o estudo sobre os conjuntos numéricos inicia no Ensino Fundamental e acompanha o aluno até o Ensino Médio (BRASIL, 2007), assim se tornando um dos conteúdos mais importantes que formam a estrutura matemática para o ensino.

## ENGENHARIA DIDÁTICA E O DECURSO DE SUA EVOLUÇÃO

A expressão “Engenharia Didática” emergiu na década de 80, neste mesmo ano foram construídos os “Institutos de Pesquisa sobre o ensino de Matemática” após uma profunda mudança na estrutura do ensino da matemática causada pelo Movimento da Matemática Moderna (ARTIGUE et al, 1992; CIDRÃO; ALVES, 2020).

No início de 1980, a Didática da Matemática se espalhava pela França e por outros países, buscando uma legitimidade científica utilizando métodos e critérios da psicologia construtivista pautada nos trabalhos de Piaget (ALVES, 2018). Dessa forma, a Engenharia Didática (ED) é oriunda dos pressupostos da Didática da Matemática sob um viés de reconhecimento da necessidade de estruturas teóricas para o ensino de Matemática, e naquela década duas estruturas estavam bem desenvolvidas: a teoria das situações didáticas de Brousseau (1986) e a teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1990).

Com efeito, Douady (1995, p. 62) recorda-nos que o termo Engenharia Didática é similar ao trabalho de um engenheiro, como “[...] um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos”.

Artigue (1988, p. 3) define a ED como uma metodologia de pesquisa, “[...] classificada primeiramente como um esquema experimental que funciona como base para as realizações didáticas em sala de aula, ou seja, como a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino”. De imediato, corroboramos com Robinet (1983, p. 3) ao afirmar que ED é uma “[...] metodologia para análise de situações didáticas”.

Artigue (1996) chama atenção para a realização de uma Engenharia Didática, devendo atender a quatro fases (não necessariamente o pesquisador deva usar todas as fases, podendo também retornar a fase anterior), as fases ou etapas são destituídas em:

1 fase: Análise preliminar – Aqui o pesquisador deve fazer uma construção epistemológica do objeto matemático (conteúdo), a análise é feita para esclarecer os efeitos do quadro atual de ensino, voltado ao saber epistêmico, como também a compreensão dos obstáculos e dificuldades em relação à aprendizagem dos alunos.

2 fase: Concepção e análise a priori – Nesta fase, deve-se preparar o esquema experimental, e então elaborar a sequência didática para ser realizado no momento da experimentação. Além

disso, o pesquisador é orientado pela análise preliminar delimitando certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar nas chamadas variáveis de comando: *microdidáticas* e *macrodidáticas*. Consideremos alguns pontos na análise a priori, sendo como:

- Descrever as escolhas feitas no nível local (relacionando-as eventualmente com as seleções globais) e as características da situação didática desenvolvida;
- Analisar o que poderia estar em jogo nesta situação para o aluno, em função das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação que o aluno terá durante a experimentação.
- Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem (ALMOULOU; SILVA, 2012, p. 27).

### **3 fase: Experimentação**

Nessa etapa o pesquisador deve aplicar a sequência didática elaborada, como também apresentar os objetivos e condições para a realização da pesquisa, estabelecendo o contrato didático com os alunos. Na experimentação também se deve registrar as observações colhidas através de: registro de imagem, registro de áudio, registro de vídeo, produção escrita dos alunos, entrevistas e etc.

### **4 fase: Análise a posteriori e validação**

Na presente etapa, consiste em analisar os dados colhidos durante a experimentação. Durante a realização dessa fase, é necessário existir o confronto entre a análise a priori e na análise a posteriori, para assim, realizar a validação das hipóteses formuladas durante a pesquisa. Ainda lembrando que a validação pode ser interna ou externa.

A ED como sendo uma metodologia de pesquisa tomou destaque pelo modo de validação, esse método de validação é baseado no confronto entre as fases análise a priori e análise a posteriori que toma como as hipóteses os elementos centrais (ARTIGUE, 1990).

A Engenharia Didática é uma metodologia que está no cenário da formação, ensino e aprendizagem há quatro décadas no cenário da Educação Matemática, passando por mudanças evolutivas no que se concerne a formação dos professores, uma vez que, partindo dos seus primórdios, as pesquisas da psicologia genética de Piaget dominavam o cenário de pesquisa da época, sendo as crianças o grande foco das pesquisas.

Contudo, em 2009, na XVª Escola de Verão de Didática da Matemática, aconteceu uma discussão que levou a formação do professor ao centro, e conseqüentemente houve a separação

da Engenharia Didática em dois níveis: (i) primeira geração, que atende como engenharia de investigação, (ii) segunda geração, que atende por engenharia didática de formação, conforme o Quadro 1 mostra.

**Quadro1:** Aspectos gerais da Engenharia Didática de primeira e segunda geração

	Objetivo(s)	Aspectos centrais
ED 1 <sup>a</sup> geração	Elaborar e estudar propostas de transposição didática para o ensino.	Metodologia de pesquisa e produto
ED 2 <sup>a</sup> geração	Determinar os princípios que comandam a engenharia que se quer transformar em recurso para o ensino regular, e estudar as condições de sua divulgação.	Três funções não independentes: a investigação, o desenvolvimento e a formação de professores por meio da análise. Necessita de vários níveis de construção.

FONTE: Almoloud e Silva (2012, p. 46)

Perrin-Glorian (2009) deixa três condições para a realização de uma engenharia didática de formação:

1. Deixar uma determinada liberdade de ação para o professor: esta condição já é válida no primeiro nível, mas agora trata-se de definir a sequência de situações com o professor e analisar como o professor adapta o documento que lhe é fornecido.
2. Usar os documentos produzidos, os professores devem procurar não reproduzir a história, mas as condições da aprendizagem, a questão essencial para a engenharia didática, sendo como identificar os elementos essenciais para a realização efetiva da atividade.
3. Precisa apoiar-se em uma engenharia didática de primeira geração que possibilite a construção de uma situação fundamental e sua análise.

Contudo, a Engenharia Didática de Formação, requer do professor/pesquisador uma compreensão ao reutilizar as fases da engenharia didática clássica readaptando-a para as necessidades dos alunos (adultos) (ALVES; CATARINO, 2018; ALVES, 2020).

### **Abordagem dos Conjuntos Numéricos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's)**

Um dos princípios de desenvolvimento deste trabalho se deu em abordar os conjuntos numéricos a partir dos documentos formativos da educação, como os Parâmetros Curriculares Nacionais. Nessas circunstâncias, os conjuntos numéricos mantêm uma base sólida no percurso estudantil acerca da matemática, pois é um conteúdo estudado durante o ensino básico inteiro (E. Fundamental ao E. Médio).

Os PCN's desdobram que o ensino dos números fornece instrumentos eficazes de compreensão em diversos aspectos no mundo, logo, o ensino de matemática é uma ferramenta de suma importância na solução de diferentes tipos de problemas (Brasil, 1998). Com isso, reconhecemos que os conjuntos numéricos produz articulação com vários campos, como na Álgebra, Aritmética, Estatística, Probabilidade, Geometria, Números Complexos dentre outros.

Reconhecer características dos diferentes números, operações e suas propriedades e a necessidade de ampliação dos conjuntos, compreender características dos diferentes números, operações e suas propriedades, bem como sua organização em conjuntos numéricos, compreender as diferentes representações de um mesmo número real, inclusive associando-o a um ponto na reta numérica.

### **METODOLOGIA**

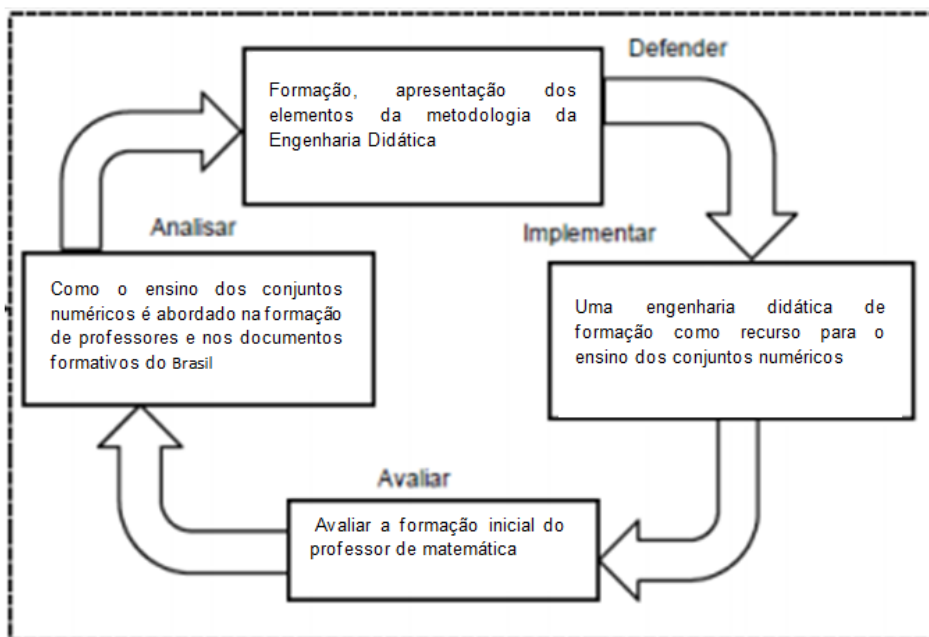
No percurso metodológico, usamos duas fases da Engenharia Didática: análise preliminar e concepção e análise a priori, por se tratar da formação de professores de Matemática resolvemos utilizar a engenharia didática de formação, que compõe o quadro de pesquisa acerca das fases da engenharia didática clássica (PERRIN-GLORIAN, 2009; TEMPIER, 2016).

Nesse aspecto, apresentamos um estudo vinculado à formação inicial de professores de Matemática que cursam o último semestre da licenciatura em Matemática em uma disciplina optativa do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do estado do Ceará *campus* Fortaleza-CE. Para sermos mais precisos, trabalhamos com a microengenharia, no que se refere a estudar os fenômenos encontrados na sala de aula. A partir disso, conduzimos os momentos de estudos com os professores-alunos norteados pelas fases da engenharia didática no ensino dos conjuntos numéricos.



Elaboramos o nosso trabalho por uma engenharia didática de formação, balizada pela metodologia experimental, para tanto, organizamos as etapas pelo método da engenharia de formação desenhada por Bailleul (2015), na qual se constrói dispositivos para a formação, tendo como elementos: analisar, defender, implementar e avaliar, conforme mostra a Figura 1.

**Figura 1:** Organização de uma engenharia de formação.



FONTE: adaptado de Bailleul (2015, p. 144)

Como supracitado, nossa pesquisa vai delimitar apenas em duas fases da engenharia didática, deixamos como um recurso para os professores de matemática utilizarem em suas aulas a respeito dos conjuntos numéricos. Apresentamos no Quadro 2 como ocorreu os encontros.

**Quadro 2:** Descrição dos encontros baseado na engenharia didática

1° encontro	Data: 11/02/2019	Análise do livro usado na disciplina
2° encontro	Data: 06/03/2019	Elaboração das situações-problemas
3° encontro	Data: 27/03/2019	Organização das fases da EDF

FONTE: dados da pesquisa



A cada encontro ocorreu uma descrição da engenharia didática baseado na construção dos conjuntos numéricos para a formação inicial dos professores de matemática.

### Análise Preliminar

Seguindo a primeira fase da engenharia didática, em que o pesquisador deve fazer uma organização sobre o objeto matemático pela parte histórica (ARTIGUE, 1988). Partindo disso, fizemos uma construção histórica e dos principais teoremas dos conjuntos: naturais, inteiros, racionais e reais, pelo livro “A construção dos Números” utilizado na disciplina conforme mostra a Figura 2.

**Figura 2:** Livro utilizado na análise preliminar



FONTE: arquivo pessoal

De acordo com Ferreira (2012) a ideia de número tomou destaque no quadro atual da Matemática, a ideia intuitiva de contagem proporcionou um grande desenvolvimento para o entendimento da Matemática, sabendo que a “Ciência dos números” representa resultados da atividade cotidiana humana, atualmente temos a organização estruturada axiomaticamente dos conjuntos numéricos.

### **Campo epistêmico dos Naturais ( $\mathbb{N}$ )**

Atualmente o conjunto dos naturais é representado pelo símbolo  $\mathbb{N}$ , em que os elementos são chamados de números naturais, assim,  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  os elementos do conjunto são sucessões dos elementos anteriores. Apesar de que a apresentação dos números naturais no Ensino Fundamental seja feito de forma simples, a sua verdadeira definição não é trivial, sendo totalmente formalizada pelos matemáticos do século XIX e XX, como Richard Dedekind (1831-1916), George Cantor (1845-1916) e Giuseppe Peano (1858-1932).

Apresentamos o teorema mais importante dos naturais, desenvolvido por Peano, no que se concerne um grupo de propriedades que mostram o processo de sucessor, conhecido por “Axiomas de Peano”, assim:

- Todo número natural tem um único sucessor;
- Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- Existe um único número natural, chamado “um” (simbolicamente definido como: 1), que não é sucessor de nenhum outro;
- Seja  $X$  um conjunto de números naturais (isto é,  $X \subset \mathbb{N}$ ). Se  $1 \in X$  e se além disso, o sucessor de todo elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .

### **Campo epistêmico dos Inteiros ( $\mathbb{Z}$ )**

Os números inteiros ( $\mathbb{Z}$ ) podem ser construídos de diversas formas, no entanto, Ferreira (2012) aborda pelos princípios de Dedekind. Sendo uma extensão do campo dos naturais, ou seja, o campo dos inteiros possui uma cópia algébrica no conjunto dos naturais.

Primeiramente supomos já definida as operações de adição e multiplicação entre números naturais ( $\mathbb{N}$ ,  $+$ ,  $\times$ ). Partindo disso, o objetivo é dar um sentido matemático a todas as expressões do tipo  $a - b$  para  $a, b \in \mathbb{N}$ , de maneira a poder tratar como entes do mesmo conjunto tanto aquelas como  $(7 - 3)$ ,  $(5 - 1)$  e  $(4 - 0)$ , em que são facilmente demonstradas em  $\mathbb{N}$ , como também  $(3 - 7)$ ,  $(1 - 3)$  e  $(0 - 2)$ , estas com resultado em  $\mathbb{Z}$ .

Dessa forma, observa-se primeiro que, subjacente a cada “diferença”  $a - b$ , está o par ordenado  $(a, b)$  que pertence ao produto dos naturais. Assim, se  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq b$  e  $c \geq d$ .

### **Campo epistêmico dos Racionais ( $\mathbb{Q}$ )**

A construção do conjunto dos números racionais ( $\mathbb{Q}$ ) é semelhante à construção dos números inteiros, o conjunto dos racionais também possui uma cópia algébrica no conjunto dos inteiros. Essa construção será a busca de um conjunto numérico contendo  $\mathbb{Z}$  no qual o quociente  $a/b$  esteja definido, quaisquer que sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$  com  $b \neq 0$ .

Além do mais, como existe um número infinito de frações equivalentes a  $a/b$ , outrossim, frações  $c/d$ , de modo que  $a/b = c/d$  (escrevemos assim:  $a \cdot d = b \cdot c$ ), é possível criar uma relação de equivalência na qual  $(a, b) \equiv (c, d) \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$ . Assim, o conjunto dos números racionais será a classe de equivalência de um par ordenado  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , módulo a relação de equivalência ( $\equiv$ ).

### **Campo epistêmico dos Reais ( $\mathbb{R}$ )**

Os números reais ( $\mathbb{R}$ ) é uma junção dos elementos dos números racionais e irracionais cujos, ou seja, os números reais podem ser racionais ou irracionais. A descrição mais simples para  $\mathbb{R}$  consiste na definição de um corpo ordenado completo.

Ferreira (2012) estabelece a construção dos reais, via corte de Dedekind, em que identificou cada número de  $\mathbb{Q}$ , e os que não pertenciam a  $\mathbb{Q}$  com um corte antes definido. Vamos mostrar o principal teorema dos reais:

**Teorema:** Existe um corpo ordenado  $\mathbb{R}$  com a propriedade do supremo no qual o conjunto dos números racionais de um conjunto denso. Mais do que isso,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$  como um subcorpo.

A demonstração desse teorema está na completude dos números racionais formando um processo contínuo. De início, é preciso verificar que o conjunto dos cortes é um conjunto ordenado, usado à relação de ordem, após demonstrar a existência de ordem no conjunto dos cortes, é preciso demonstrar que o conjunto dos corte está incluído a propriedade do supremo. De modo derradeiro, demonstra-se que o conjunto dos cortes é corpo.

### **Concepção e análise a priori**

Na segunda fase na engenharia didática, é descrito as situações didáticas e a criação das situações-problemas, bem como a escolha das variáveis de comando. Nossa pesquisa se adequa

a uma *microdidática*, elegemos essa variável que está relacionada à organização, planejamento e execução das sequências de ensino em sala de aula.

Almouloud (2016) descreve que uma situação-problema faz parte de uma situação adidática (momento em que o aluno constrói seu conhecimento sem o professor), passando a ser construídas por um conjunto de questões abertas ou questões fechadas e formuladas em um contexto matemático.

Os alunos devem compreender os dados do problema e se engajar na sua resolução usando seus conhecimentos disponíveis. [...] É imprescindível que o aluno perceba que seus conhecimentos antigos não são insuficientes para a resolução imediata do problema. Além disso, os conhecimentos, objeto de aprendizagem, fornecem as ferramentas convenientes para obter a solução final (ALMOULOUD, 2016, p. 116).

Portanto, elaboramos quatro situações-problemas a fim de deixar como um recurso para ser utilizada pelos professores de Matemática, conforme descrevemos no Quadro 2.

**Quadro 2:** Elaboração das situações-problemas

Situação-problema	Descrição das situações	Objetivo das situações-problemas
1	Como professor de Matemática, você acredita nas seguintes inclusões indicadas na cadeia dos conjuntos numéricos?	O objetivo é levar o professor em formação discutir o reconhecimento e a inclusão dos conjuntos numéricos a partir da parte axiomática.
2	Explique em que sentido existe ou não existe uma imersão do conjunto dos números naturais dentro do conjunto dos inteiros.	O objetivo é levar o professor em formação compreender que o conjunto dos números Naturais tem suas propriedades e construções a partir da axiomatização de Peano, e o conjunto dos números Inteiros possuem propriedades diferentes dos Naturais. Assim, passando a existir uma cópia isomórfica dos $\mathbb{Z}$ nos $\mathbb{N}$ .
3	Consideremos a relação entre os pares $(m,n)$ e $(a, b)$ e que são equivalentes se, e somente se, ocorrer através da adição no conjunto dos Inteiros, em que $(m,n) \sim (a, b) m+b' = n+a$ .	Espera-se do professor em formação formar pares ordenados, na adição dos números inteiros, como também os professores em formação devem fornecer a concepção de classe de equivalência.
4	Forneça uma interpretação dos racionais mediante a noção de classe de equivalência no plano.	Espera-se dos professores em formação possuírem o conhecimento de que os números racionais são construídos pelas classes de equivalência de pares ordenados dos números inteiros, e, posteriormente abordar uma interpretação no plano cartesiano, a partir da ideia de classes de equivalência.

FONTE: Elaboração própria

Conforme apresentado, as nossas situações-problemas foram construídas a partir do livro de Ferreira (2012) como supracitado, dessa forma, no primeiro momento (análise preliminar) foi levantado à construção dos conjuntos numéricos partindo do conjunto dos naturais, e se desenvolvendo para os demais conjuntos (inteiros, racionais e reais). No segundo momento (concepção e análise a priori), elaboramos as quatro situações-problemas contendo o que deseja obter dos professores em formação. Portanto, a partir da engenharia didática de formação, deixamos como recurso para os professores de matemática utilizarem em aulas que envolvem os tópicos de análise real e derivadas.

## CONCLUSÃO

A escolha da engenharia didática de formação como metodologia tem proporcionado nesta pesquisa aproximar o campo da pesquisa e do funcionamento de uma sala de aula durante a formação inicial do professor de matemática. Durante a formação, o professor pode desempenhar múltiplos papéis, como: aluno, observador, gestor de atividade, reflexivo diante da prática, entre outros.

As fases da engenharia didática permite que o professor/pesquisador compreenda os fenômenos do interior de uma sala de aula, aproximando os elementos professor-aluno-saber, uma vez que, a engenharia didática é oriunda dos trabalhos de didatas e pesquisadores da educação matemática dos anos 80, e atualmente o seu estudo se resume a dois polos: engenharia didática de investigação (engenharia didática clássica) e engenharia didática de formação (ou ainda de segunda geração), como nosso interesse esteve centrado na formação inicial de professores, a EDF nos proporcionou a construir situações-problemas que envolvem os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais).

Diante dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a construção do ensino da matemática desde o Ensino Básico (Fundamental e Médio) e Superior é construído pelos pressupostos dos conjuntos numéricos, por isso a relevância desses conjuntos na formação dos professores se torna uma emergência, apesar de que o estudo dos conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ , e  $\mathbb{R}$  na licenciatura de matemática é visto somente nas disciplinas de análise real e derivadas, sendo uma das últimas disciplinas do curso, no caso deste trabalho a disciplina era optativa para os alunos da graduação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará.

No momento da análise preliminar (primeira fase), o estudo a partir do livro adotado pela disciplina possibilitou-nos conhecer melhor o objeto matemático na parte da construção

dos conjuntos numéricos, partindo dos principais teoremas e axiomas e também, propor que os professores em formação inicial, obtivessem informações extras sobre o objeto matemático. Na concepção e análise a priori, é o momento de organizar as situações didáticas e construir as situações-problemas a partir do estudo dos materiais de consulta, no caso fizemos as quatro situações-problemas partindo da análise do livro.

Por fim, nossa pesquisa manteve o interesse de mostrar o uso da engenharia didática de formação, bem como a construção das fases diante da formação inicial de professores, ao finalizarmos a nossa pesquisa, deixamos um recurso didático para os professores de matemática enriquecer as aulas e auxiliar o ensino-aprendizagem.

## REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.; SILVA, M. Engenharia didática: evolução e diversidade. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012.

ALMOULOUD, S. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**, v. 11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ALVES, F. R. V; CATARINO, P. M. M. C. Engenharia Didática de Formação (EDF): repercussões para a formação do professor de matemática no Brasil. **Educação Matemática em Revista**, v. 2, n. 18, p. 121-137, 2017.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática (ED): Análises preliminares e a priori para a equação diferencial de Claireaut, **REVEMAT**, v. 15, p. 1-33, 2020.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE. M. & Al (Eds). **Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France**. Grenoble: La pensée sauvage, 1992.

ARTIGUE, M. **Epistémologie et didactique de recherches em Didactique des Matemática**, Grenoble: Lá pensée sauvage, v. 10, n. 20, p. 241-286, 1996.

BAILLEUL, M. Engenharia de Formação: o exemplo do treinamento de estudantes de treinamento em formação de professores. **Educação, Matemática e Pesquisa de São Paulo**, v. 17, n. 1, p. 137-161, 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília (DF), 2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Média. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2. Brasília: MEC, 1998.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.7, n. 2, p.33-116, 1986.

CIDRÃO, G. G; ALVES, F. R. V. O percurso Investigativo acerca da Engenharia Didática de Desenvolvimento no cenário educacional brasileiro. **UNIÓN- Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 16, n. 60, p. 57-75, 2020.

DOUADY, R. La ingeniere didáctica y la evolución de su relación com el conocimiento. Gomez, P. (org). **Ingeniere Didactique em Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano, p. 61-97, 1995.

FERREIRA, J. **A construção dos números**. Editora: Sociedade Brasileira de Matemática, p. 1-139, 2012.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. in Margolinas et all.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV<sup>a</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.

ROBINET, F. **Le L'ingeniere Didactiques. Les cahiers Blancs**, v. 1, n. 1, p. 1-11, 1983.

TEMPIER, F. Novas perspectivas para a Engenharia Didática: um exemplo para o desenvolvimento de um recurso para o ensino decimal número sistemático de matemática para o professor. **Educação**, v. 19, n. 1, p. 261-276, 2016.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.