Revista Binacional Brasil Argentina: diálogo entre as ciências

On-line. ISSN: 2316-1205

O TRAÇADO DE CURVAS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS COM BASE NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

EL TRAZADO DE CURVAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES BASADO EN LA TEORÍA DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

THE TRACING OF CURVES OF EXPONENTIAL FUNCTIONS BASED ON THE THEORY OF SEMIOTIC REPRESENTATION REGISTERS

DOI: 10.22481/rbba.v11i01.10681

Paulo César Oliveira
Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, São Paulo, Brasil
ID Lattes: http://lattes.cnpq.br/7516513469811353
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2514-904X
Endereço eletrônico: paulooliveira@ufscar.br

Adriano Ortiz Souza
Colégio Ser, Sorocaba, São Paulo, Brasil
ID Lattes: http://lattes.cnpq.br/6804767238372469
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7232-9097
Endereço eletrônico: adriano.souza@estudante.ufscar.br

Édrei Henrique Lourenço
Colégio Politécnico de Sorocaba, Sorocaba, São Paulo, Brasil
ID Lattes: http://lattes.cnpq.br/8659652947335064
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7119-8988
Endereço eletrônico: henrique.edrei@gmail.com

Submissão: 26/04/2022 Aprovação: 23/05/2022 Publicação: 01/06/2022

O TRAÇADO DE CURVAS DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS COM BASE NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Resumo

Este artigo apresenta uma proposta metodológica para o processo ensino-aprendizagem de função exponencial, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, para o procedimento de interpretação global do esboço de curvas de funções exponenciais. Essa estratégia busca um olhar mais amplo para o estudo do objeto de conhecimento na representação gráfica de curvas exponenciais, em comparação com a abordagem ponto a ponto convencionalmente utilizada em seu estudo em contextos de Ensino Médio, uma vez que o traçado é compreendido como representação de um objeto descrito por uma expressão algébrica. A interpretação global figural permite estabelecer conexões das representações matemáticas entre os registros algébrico e gráfico, de modo que se perceba as articulações entre ambos, ao mesmo tempo que evidencia a dupla representação do mesmo objeto matemático, com conteúdos e significados distintos.

Palavras chave: Propriedades figurais. Função exponencial. Abordagem ponto a ponto.

Resumen

Este trabajo presenta una propuesta metodológica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la función exponencial, basada en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval, para el procedimiento de interpretación global del croquis de las curvas de las funciones exponenciales. Esta estrategia busca una mirada más amplia al estudio del objeto de conocimiento en la representación gráfica de las curvas exponenciales, en comparación con el enfoque punto a punto utilizado convencionalmente en su estudio en contextos de bachillerato, ya que el croquis se entiende como una representación de un objeto descrito por una expresión algebraica. La interpretación figural global permite establecer conexiones de las representaciones matemáticas entre los registros algebraico y gráfico, de modo que se perciben los vínculos entre ambos, a la vez que se muestra la doble representación de un mismo objeto matemático, con contenidos y significados diferentes.

Palabras clave: Propiedades de la figura. función exponencial. Enfoque punto a punto.

Abstract
This paper presents a methodological proposal for the teaching-learning process of exponential function, based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Registers, for the procedure of global interpretation of the sketch of curves of exponential functions. This strategy seeks a broader look to the study of the object of knowledge in the graphical representation of exponential curves, compared to the point-to-point approach conventionally used in its study in high school contexts, since the sketch is understood as a representation of an object described by an algebraic expression. The global figural interpretation allows to establish connections of mathematical representations between the algebraic and graphical registers, so that it is perceived the links between both, while highlighting the dual representation of the same mathematical object, with different contents and meanings.

Keywords: Figural properties. Exponential function. Point-to-point approach.

INTRODUÇÃO

Na Base Nacional Comum Curricular- BNCC (Brasil, 2018), o estudo de funções é um objeto de conhecimento da unidade temática Álgebra, no 9º ano do Ensino Fundamental. Em termos de habilidade, o aluno deve compreender as funções por meio das representações numérica, algébrica, gráfica e na língua natural (relação de dependência unívoca entre duas variáveis).

No Ensino Médio, "a área de Matemática e suas Tecnologias propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental" (BRASIL, 2018, p.527). No que diz respeito à função exponencial, nosso objeto de conhecimento e pesquisa neste texto, uma das habilidades da BNCC, é a análise e a relação funcional com as representações matemáticas na forma de "tabela e plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) da função" (BRASIL, 2018, p.544).

A resolução e formulação de problemas como eixo articulador das habilidades e competências em Matemática na BNCC, associa-se com a função exponencial no sentido de "compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da

Matemática Financeira" (BRASIL, 2018, p.536). De forma convencional, o estudo de progressões geométricas (PG) é destaque na relação com a função exponencial "de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p.541).

Interpretamos que a coordenação e mobilização de registros de representação semiótica prescritos nas habilidades e competências específicas para o estudo de função de modo geral perpassa pela relação entre alguns valores particulares e pontos referenciais do plano cartesiano, na identificação de pares ordenados (x, y).

Com base na literatura, discutimos na seção seguinte as limitações desse procedimento mecanizado de obter pares ordenados e apresentamos uma estratégia metodológica para o estudo de funções exponenciais.

1. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Raymond Duval é um filósofo, psicólogo francês que desenvolve suas pesquisas em psicologia cognitiva desde os anos 1970 com importantes contribuições para a aprendizagem matemática via teoria dos registros de representação semiótica.

No Brasil a difusão dessa teoria teve um impulso com a publicação do texto 'Registros de Representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática' (DUVAL, 2003), como parte do livro 'Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica', organizada por Machado (2003). Todos os textos dessa coletânea tomaram por base a obra em francês intitulada 'Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels', a qual teve a introdução e o primeiro capítulo traduzidos, formando um fascículo, cujo objetivo, segundo Duval (2009), consiste em apresentar o quadro teórico global abordado na obra original (DUVAL, 1995).

Na condição de professor visitante em universidade brasileira, Raymond Duval em 2010, a partir da disciplina de Seminários Avançados no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da atual Universidade Anhanguera de São Paulo -UNIAM, foi publicado o livro 'Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas' (DUVAL, 2011a). Neste livro, de acordo com Pontes e Kluppel (2011), é feita uma abordagem sobre a distinção de aspectos fundamentais das representações semióticas relacionados ao conteúdo e à forma, contemplados nas transformações semióticas de tratamento e conversão. Essa distinção coloca em destaque os procedimentos metodológicos necessários para a identificação de variáveis pertinentes em cada registro e a necessária correspondência para que se torne possível a distinção entre o objeto matemático e suas diversas representações com conteúdo e significados distintos; mas com mesma referência ao objeto em estudo.

Posteriormente, Raymond Duval com colaboradores brasileiros publicaram o segundo volume do livro 'Ver e ensinar a matemática de outra forma', cujo foco foi 'Introduzir a álgebra no ensino: qual é o objetivo e como fazer isso?' (DUVAL, 2015). Para Lourenço e Oliveira (2019), no contexto da educação francesa, o objetivo do ensino da álgebra é a aquisição das equações, cuja manipulação de propriedades e procedimentos algébricos conduzem à solução de problemas.

Por fim destacamos a obra 'Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval' elaborada por Moretti e Brandt (2020), a partir de pesquisas orientadas por estes dois educadores. Mais especificamente, o *e-book* contém pesquisas sobre as especificidades relacionadas à aprendizagem de objetos matemáticos, como por exemplo, álgebra e geometria; outras pesquisas relacionadas às formas de conduzir o ensino subsidiadas pela teoria de Duval; e, ainda, pesquisas sobre a aprendizagem de pessoas deficientes: uma cega congênita e um estudante com Discalculia do Desenvolvimento.

A disponibilidade destes materiais, entre outros, tem contribuído para o pensar e repensar a aprendizagem matemática em diversos segmentos escolares, tanto em contextos de prática, quanto de pesquisa no campo da Psicologia da Educação Matemática.

A Semiótica é a ciência dos signos e, como tal, tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis capazes de produção de significados e sentido. Santaella (1983, p. 11) destaca que "não chegamos a tomar consciência de que o nosso estar no mundo, como indivíduos sociais que somos, é mediado por uma rede intrincada e plural de linguagens".

Na especificidade da Matemática, quando consideramos $f(x) = 2^x$, cada um dos elementos que formam esta igualdade constitui um signo. A interpretação mental sobre a igualdade é uma ação humana que, na perspectiva de Duval (2009), corresponde ao 'significante'. As interpretações (significados) associadas a essa igualdade que expomos contribuem no processo de significação ao se relacionar o significante com o significado (DUVAL, 2009). Se a significação dada por um sujeito for de uma expressão algébrica cujo primeiro membro da igualdade representa a ideia de uma relação funcional e o segundo membro a expressão desta relação na variável ‘x’, então a referência é um objeto da área da matemática, no caso, a função exponencial na variável ‘x’.

A Matemática utiliza uma grande variedade de representações semióticas, de modo que Duval (2003, 2009) utiliza o termo ‘registros’ de representação para designar diferentes tipos de representação semiótica como a linguagem natural, figuras geométricas, sistemas de escrita, gráficos cartesianos, entre outros. A palavra abstrato diz respeito ao fato de que o objeto matemático não é perceptível, mas seu acesso se dá por meio de representações semióticas.

Um ponto fundamental para Duval (2009) é a necessidade de não confundir os objetos matemáticos com suas representações, pois diversas representações com significados distintos em seu conteúdo podem estar associadas ao mesmo objeto. Se considerarmos o objeto matemático função exponencial, podemos apresentá-la a partir da representação na língua natural, como por exemplo: seja ‘a’ um número real positivo e diferente de 1. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = a^x$, é chamada de função exponencial na base ‘a’.

O enunciado no parágrafo anterior está parcialmente representado no registro em linguagem natural, ou seja, utilizamos as palavras para expressá-lo. De acordo Duval (2003, 2009), para que o aluno tenha sucesso nas atividades matemáticas, é necessário que ele saiba mobilizar e coordenar diferentes representações semióticas na resolução de uma mesma tarefa matemática proposta. Para que a coordenação de registros ocorra, alguns processos transformadores das representações semióticas são primordiais, no caso, o tratamento e a conversão (DUVAL, 2003, 2009).

O tratamento é uma atividade cognitiva que envolve uma transformação que ocorre internamente ao mesmo sistema semiótico ou registro de representação semiótica. Considerando que a representação algébrica descrita como $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = a^x$ é uma das apresentações da função exponencial na base ‘a’, obter pares ordenados (x, y) a partir de valores atribuídos para $x \in \mathbb{R}$ na função $f(x) = 2^x$ é um exemplo de atividade cognitiva de tratamento, pois o sistema semiótico requerido é apenas o simbólico numérico.

Já a conversão é uma atividade cognitiva que consiste em “transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro” (DUVAL, 2009, p. 58). Por exemplo, podemos transformar de forma coordenada a mudança da representação algébrica da função exponencial para sua representação gráfica, o que implica a mudança de sistema semiótico, porém há conservação da referência ao mesmo objeto matemático.

A transformação do tipo tratamento é mais comum nas práticas de ensino, mas Duval (2009) destacou que é justamente na transformação do tipo "conversão" que reside a maior fonte de incompreensão dos alunos. Lourenço e Oliveira (2019) ressaltaram que no ensino de funções quadráticas, é comum a atividade de conversão ser reduzida a um procedimento mecanizado que Duval (2011b) chamou de '*ponto a ponto*'. Esse procedimento estende-se para também para os demais tipos de outras funções estudadas no decorrer da Educação Básica e limita-se a associar alguns valores particulares e pontos referenciais do plano cartesiano. Segundo Duval (2011b, p. 98),

> esta abordagem favorece quando se quer TRAÇAR o gráfico correspondente de uma equação do primeiro grau ou o gráfico de uma equação do segundo grau. Favorece ainda quando se quer LER as coordenadas de algum ponto interessante (porque é ponto de intersecção com os eixos ou com alguma reta, porque é máximo, etc.).

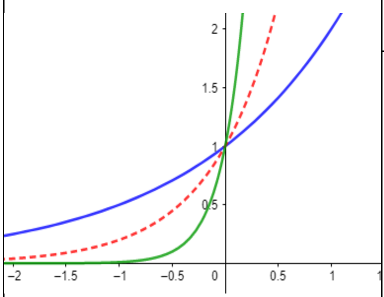
Lourenço e Oliveira (2019), com base em Duval (2011b), afirmam que o procedimento ponto a ponto, mesmo após prática contínua, não favorece a associação das variáveis visuais de representação e as unidades significativas da expressão algébrica. Simonetti e Moretti (2020) complementam que um olhar voltado para as unidades simbólicas significativas da equação e para as unidades visuais discriminadas no gráfico, considerando as possíveis associações entre essas unidades caracteriza-se, em termos de atividade cognitiva de conversão, como uma interpretação global de propriedades figurais.

Lourenço e Oliveira (2019) destacam que na abordagem interpretação global de propriedades figurais é analisada, inclusive em termos de congruência, toda modificação visível no traçado de uma curva e seu impacto na representação algébrica e vice-versa. Esse procedimento favorece significativamente a transformação gráfico-equação que no procedimento ponto a ponto é pouco evidente. E é justamente nesse sentido de conversão que o grau de não congruência aumenta e, portanto, a dificuldade dos alunos.

Assim, na seção seguinte, aplicamos tal procedimento no estudo das funções exponenciais, explicitando as principais observações em quadros.

2. Abordagem da interpretação global das propriedades figurais da curva e sua expressão algébrica

Utilizando das reflexões advindas da seção anterior, será realizado o tratamento das variáveis visuais da função exponencial, tendo como abordagem a interpretação global das propriedades figurais. Para isto, será utilizado o *software* GeoGebra para construir as representações gráficas que serão utilizadas. Conforme já destacado anteriormente, entende-se por função exponencial toda função de reais em reais cuja lei de formação tenha a forma base $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Observe a 'figura 1'.

<table>
<tr><th colspan="2">Representação gráfica</th><th>Representação algébrica</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Variáveis Visuais
Crescimento da curva exponencial em relação aos eixos coordenados.</td><td>A: $f(x) = 5^x$
B: $f(x) = 2^x$
C: $f(x) = 100^x$</td></tr>
<tr><td>Valores das Variáveis Visuais
A: inclinação referencial

B: a curva exponencial é menos inclinada para valores positivos de x.

C: a curva exponencial é mais inclinada mais inclinada para valores positivos de x.</td><td>Unidades Significativas

A: o valor do parâmetro 'a' é igual a cinco, isto é, a=5.

B: o valor do parâmetro 'a' é igual a dois, isto é, a=2

C: o valor do parâmetro 'a' é igual a cem, isto é, a=100</td></tr>
</table>

Figura 1: Associação das variáveis visuais às unidades algébricas significativas para f(x) = a^x com $a >$ 1. Fonte: arquivo da pesquisa.

Analisando a 'figura 1', percebe-se que o parâmetro 'a' possui relação com a maneira com que a função exponencial cresce, fazendo com que a 'forma' de crescimento seja influenciada: (i) para valores da variável x menores do que zero a função apresenta como imagem um valor **maior** quando 'a' apresenta valor **menor** – observe que, à esquerda do eixo vertical, a curva azul (a=2) está acima da curva referenciada em vermelho (a=5), enquanto que a curva verde (a=100) está abaixo da curva vermelha; (ii) além disso, para valores de x maiores do que zero a situação descrita se inverte, isto é, para valores maiores de 'a' a curva aumenta sua inclinação e para valores menores de 'a' a curva apresenta menor inclinação – observe que à direita do eixo vertical a curva azul fica abaixo da curva referenciada em vermelho, ao passo que a curva verde assume posição acima da curva vermelha.

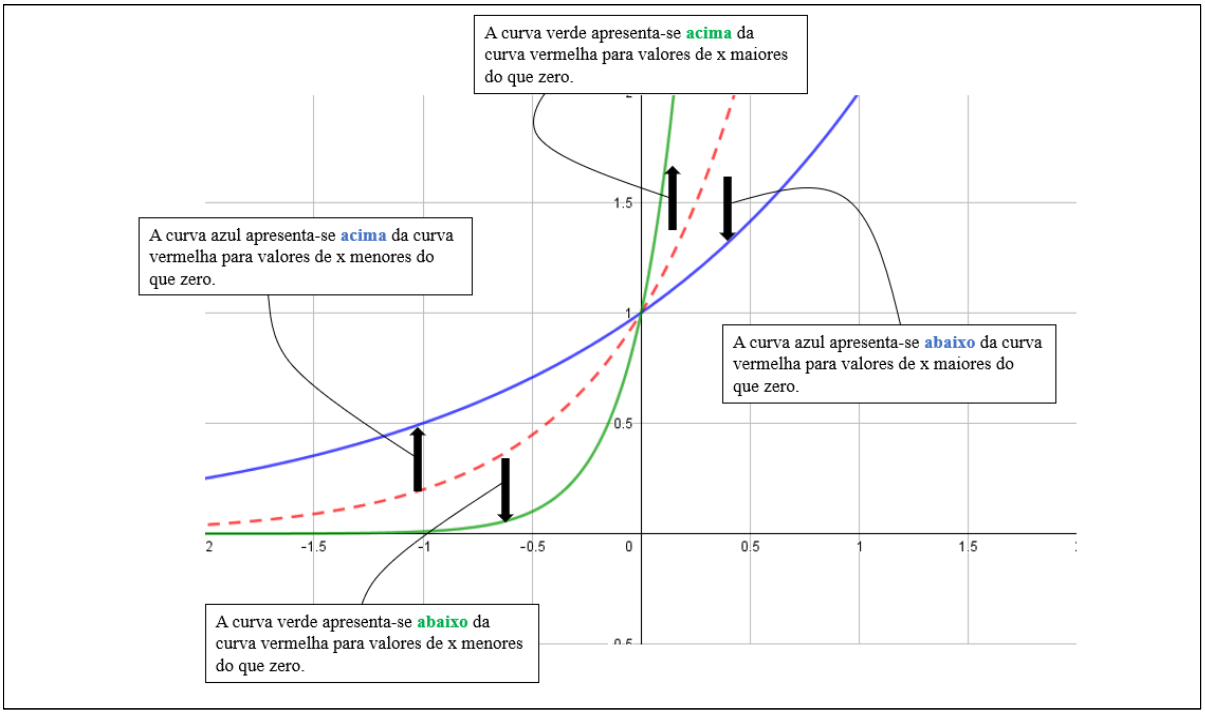


Figura 2: Valores das variáveis visuais às unidades algébricas significativas para f(x) = a^x com *a* > 1.
Fonte: arquivo da pesquisa

O que fora destacado na ‘figura 2’ acerca da mudança de posição das curvas azul e verde em relação à curva representada na cor vermelha apresenta-se como um fator de extrema importância, pois possui relação direta com o custo cognitivo ao se realizar a conversão entre as representações algébrica e gráfica da função exponencial, em ambos os sentidos. O custo cognitivo dessa conversão depende em muito do que Duval (2009) chama de fenômeno da não congruência.

De acordo com Duval (2009, p.68-69), o custo cognitivo quando a conversão é congruente é menor do que quando a conversão é não congruente. Assim, elenca-se, na teoria, três critérios para determinar a congruência envolvida em uma transformação do tipo conversão: (A) correspondência “semântica” dos elementos significantes; (B) univocidade “semântica” terminal; (C) ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações. No caso das curvas que estão sendo consideradas, verifica-se a não preservação do critério da univocidade “semântica” terminal (B), pois nem sempre um maior valor para a o parâmetro ‘a’ conduzirá a um maior valor para a curva, isto é, nem sempre a maior-acima será a relação observada, conforme já destacado.

Outrossim, há de se destacar que a depender do problema apresentado ao estudante, essa não congruência pode não ser sentida, visto que em muitos problemas a variável x está associada ao tempo, não podendo assumir valores negativos. Nesta situação, existiria congruência semântica, pois teríamos três representações semióticas distintas (expressão discursiva, representação gráfica e expressão algébrica) fornecendo a mesma informação a partir dos seguintes elementos: quanto maior o valor do parâmetro a (a>1), maior é a ascendência da curva exponencial.

Há, portanto, a necessidade primordial de que no ensino de tal tópico, sejam feitas as devidas associações entre as variáveis visuais e seus respectivos valores, coordenando-as com a representação algébrica da função, inclusive destacando a questão de expoentes negativos (x<0) possuírem relação com o conceito de número inverso.

Em tempo, vale ressaltar que nas representações gráficas da ‘figura 1’, independente do valor atribuído ao parâmetro ‘a’, à medida que os valores de ‘x’ diminuem, os respectivos valores de ‘y’ tendem a zero. No entanto, não ocorre a intersecção da curva com o eixo das abcissas; uma característica dessa curva, designada pela reta assíntota horizontal y=0.

Outro ponto importante a ser destacado (figura 1) é que independente da ‘velocidade’ de crescimento da curva exponencial, ela intercepta o eixo ‘y’ no par ordenado (0, 1). Isso poderá não ocorrer caso haja outros elementos inseridos na representação base da função exponencial, conforme será explorado mais adiante.

A ‘figura 3’ contempla uma síntese do comportamento da função exponencial quando o parâmetro ‘a’ apresenta a variabilidade $0 < a < 1$.

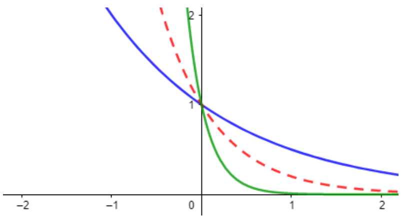
Representação gráfica		**Representação algébrica**
	**Variáveis Visuais** Decrescimento da curva exponencial em relação aos eixos coordenados.	A: $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ B: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ C: $f(x) = \left(\frac{1}{100}\right)^x$
	Valores das Variáveis Visuais A: inclinação referencial B: a curva exponencial é menos inclinada em relação a inclinação referencial. C: a curva exponencial é mais inclinada em relação a inclinação referencial.	**Unidades Significativas** A: o valor do parâmetro ‘a’ é igual a um quinto, isto é, a=1/5. B: o valor do parâmetro ‘a’ é igual a um meio, isto é, a=1/2. C: o valor do parâmetro ‘a’ é igual a um centésimo, isto é, a=1/100.

Figura 3: Associação das variáveis visuais às unidades algébricas significativas para $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$. Fonte: arquivo da pesquisa

Na ‘figura 3’ forma atribuídos valores inversos para o parâmetro ‘a’ (1/5, ½ e 1/100) em relação aqueles respectivos valores dispostos na ‘figura 1’ (a = 5, 2 ou 100). Analisando a ‘figura 3’, percebe-se que as curvas se tornaram decrescentes, ou seja, para cada valor do parâmetro ‘a’, quanto maior o valor atribuído à variável ‘*x’,* menor será o valor correspondente de ‘y’. Paralelamente ao caso esboçado na ‘figura 1’, também observa-se que o parâmetro ‘a’ está relacionado com o decrescimento da função exponencial, fazendo com que a ‘velocidade’ de descendência da curva sofra influência, alterando sua posição em relação ao referencial adotado (**A**), no que tange ao lado direito ou esquerdo do eixo vertical. Portanto, o decrescimento da curva é **menos** ou **mais** rápido, conforme for menor ou maior o valor do parâmetro a, para valores positivos de x.

Da mesma forma que as representações gráficas na ‘figura 1’, os registros gráficos da ‘figura 3’, contém a reta assíntota horizontal y=0 e interceptam o eixo ‘y’ no par ordenado (0, 1). Assim como discutido no caso da ‘figura 1’, o conteúdo da ‘figura 3’ não expressa uma congruência semântica, pois temos três representações semióticas distintas (expressão discursiva, representação gráfica e expressão algébrica) que não fornecem a mesma informação a partir dos seguintes elementos: quanto maior o valor do parâmetro a (0 < a <1), menor é a ascendência da curva exponencial.

Isto permite criar a noção de que o valor de ‘a’ ao modificar a inclinação da curva, pode alterá-la entre crescente e decrescente, à medida que ‘a’ assume valores maiores que ‘1’ ou no intervalo numérico aberto entre ‘0’ e ‘1’. Mas será que existe ainda mais relações advindas apenas da alteração entre os valores de ‘a’? Por meio do ‘gráfico 1’ será possível perceber que funções exponenciais cujos valores de ‘a’ são números inversos, geram representações gráficas simétricas em relação ao eixo vertical do plano cartesiano.

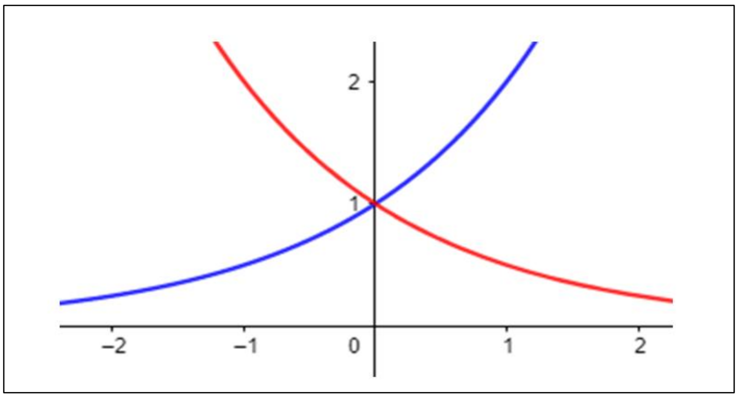


Gráfico 1: Representações gráficas com valores inversos para o parâmetro ‘a’. Fonte: arquivo da pesquisa.

No caso do ‘gráfico 1’ foram utilizadas funções no formato $f(x) = a^x$ (curva na cor azul) e $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ (curva na cor vermelha), sendo a = 2. Em termos de representação figural as curvas estão dispostas segundo a propriedade de simetria de reflexão em torno do eixo vertical do plano cartesiano. Em relação às coordenadas cartesianas, há uma transformação que leva (x, y) em (-x, y).

Acrescentando agora o parâmetro ‘k’, de tal forma que a função f seja $f(x) = a^x + k$, será analisada qual a influência de ‘k’ na representação gráfica da função.

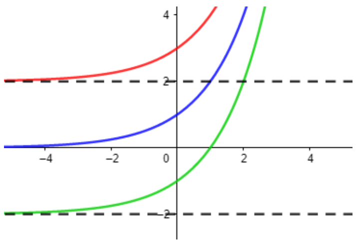
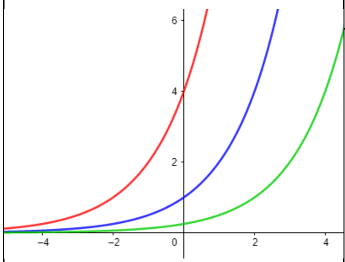
Representação gráfica		Representação algébrica
	**Variáveis Visuais** Posição da curva em relação ao eixo horizontal.	A: $f(x) = 2^x + 2$ B: $f(x) = 2^x$ C: $f(x) = 2^x - 2$
	Valores das Variáveis Visuais A: a curva deslocou-se verticalmente para cima em relação a posição referencial. B: posição referencial. C: a curva deslocou-se verticalmente para baixo em relação a posição referencial.	**Unidades Significativas** A: o valor do parâmetro ‘k’ é positivo, isto é, k>0. B: o valor do parâmetro ‘k’ é igual a zero, isto é, k=0. C: o valor do parâmetro ‘k’ é negativo, isto é, k<0.

Figura 4: Associação das variáveis visuais às unidades algébricas significativas para f(x) = a^x + k, com $a > 0$, $a \neq 1$ e k∈ ℝ. Fonte: arquivo da pesquisa

Na ‘figura 4’ fixamos o valor de a=2 e consideramos a curva referencial para k =0. Neste contexto, percebe-se que a posição da curva exponencial em relação ao eixo horizontal é variável, deslocando para cima na medida que ‘k’ é um valor estritamente positivo e para baixo quando ‘k’ é estritamente negativo. Nota-se também que, da mesma forma que a curva exponencial é deslocada, a sua assíntota também se desloca, designada pela representação algébrica y=k, com k∈ ℝ.

Nota-se também que a função exponencial $f(x) = 2^x + k$, com k∈ ℝ, relaciona-se com a função $g(x) = 2^x$ de tal forma que $f(x) = g(x) + k$, ou seja, a função f é igual a função g acrescida de ‘k’ unidades. Por um lado, essa relação em termos de representação figural, implica diretamente no deslocamento vertical da curva exponencial. Por outro lado, a intersecção da curva com o eixo y ocorre no ponto de coordenadas (0, k + 1), ou seja, um deslocamento de ‘k’ unidades (k∈ ℝ).

Avançamos nossa análise considerando o parâmetro ‘t’ (t∈ ℝ), de tal forma que a representação algébrica da função f seja $f(x) = a^{x+t}$. Qual a influência de ‘t’ nas representações gráficas dispostas na ‘figura 5’?

<table>
<tr><th colspan="2">Representação gráfica</th><th>Representação algébrica</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Variáveis Visuais
Posição da curva em relação ao eixo vertical.</td><td>A: $f(x) = 2^{x+2}$
B: $f(x) = 2^{x}$
C: $f(x) = 2^{x-2}$</td></tr>
<tr><td>Valores das Variáveis Visuais
A: a curva deslocou-se horizontalmente para esquerda em relação a posição referencial.

B: posição referencial.

C: a curva deslocou-se horizontalmente para direita em relação a posição referencial.</td><td>Unidades Significativas
A: o valor do parâmetro ‘t’ é positivo, isto é, t>0.

B: o valor do parâmetro ‘t’ é igual a zero, isto é, t=0.

C: o valor do parâmetro ‘t’ é negativo, isto é, t<0.</td></tr>
</table>

Figura 5: Associação das variáveis visuais às unidades algébricas significativas para f(x) = a^{x+t}, com $a > 0$, $a \neq 1$ e t∈ ℝ. Fonte: arquivo da pesquisa.

Na análise da ‘figura 5’, percebe-se que a posição da curva exponencial em relação ao eixo horizontal é variável, deslocando para esquerda na medida que ‘*t*’ é estritamente positivo e para direita quando ‘*t*’ é estritamente negativo.

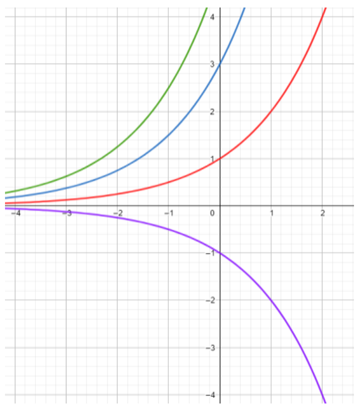
Nota-se também que a função exponencial $f(x) = 2^{x+t}$, com t∈ ℝ, relaciona-se com a função $g(x) = 2^{x}$ de tal forma que $f(x) = g(x + t)$, ou ainda, $f(x - t) = g(x)$, ou seja, a função f é igual a função g com abcissa designada na forma ‘x+t’ unidades. Uma situação equivalente é afirmar que a função f com abcissa designada na forma ‘x-t’ unidades é igual a função g(x). Por um lado, essa relação em termos de representação figural, implica diretamente no deslocamento horizontal da curva exponencial. Por outro lado, a intersecção da curva com o eixo y ocorre no ponto de coordenadas (0, 2^{t}), ou seja, um deslocamento de ‘t’ unidades (t∈ ℝ).

Se considerarmos a representação genérica f(x) = a^{x}, com que com $a > 0$ e $a \neq 1$, verificamos que quando o valor de ‘a’ não está multiplicado por um número negativo a curva exponencial está disposta na região positiva do eixo vertical, ou seja, para todo x∈ ℝ temos y>0. O caso contrário, ou seja, h(x) = - a^{x}, com que com $a > 0$ e $a \neq 1$, a curva exponencial está disposta na região negativa do eixo vertical, ou seja, para todo x∈ ℝ temos y<0.

Na análise da disposição das curvas exponenciais em relação ao eixo ‘x’, associamos o parâmetro ‘a’ e seu valor oposto como unidade significativa na representação algébrica. Em termos de representação figural essas curvas estão dispostas segundo a propriedade de simetria de reflexão em torno do eixo horizontal do plano cartesiano. Em relação às coordenadas cartesianas, há uma transformação que leva (x, y) em (x, -y).

Nesta situação, portanto, verifica-se que há congruência semântica entre a representação gráfica e a representação algébrica, uma vez que se convencionou em matemática que o eixo vertical tem sua orientação positiva para cima (y>0) e a orientação negativa para baixo (y<0).

Com isso, verifica-se a necessidade de acrescentar o parâmetro ‘*c*’, de tal forma que a função *f* seja $f(x) = c.a^x$, sendo $c \neq 0$, será analisada qual a influência de ‘*c*’ na representação gráfica da função.

<table>
<tr><th colspan="2">REPRESENTAÇÃO GRÁFICA</th><th>REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Variáveis Visuais
Inclinação e posição da curva em relação ao eixo horizontal.</td><td>A: $f(x) = 1.2^x$
B: $f(x) = 3.2^x$
C: $f(x) = 5.2^x$
D: $f(x) = (-1).2^x$</td></tr>
<tr><td>Valores das Variáveis Visuais
A: a curva está totalmente sob a posição inicial.

B: posição referencial.

C: a curva está totalmente sobre a posição inicial.

D: a curva possui simetria com a posição referencial em relação ao eixo das abscissas.</td><td>Unidades Significativas
A: o valor do parâmetro ‘c’ é igual a um, isto é, c>0.

B: o valor do parâmetro ‘c’ é igual a três, isto é, c=3.

C: o valor do parâmetro ‘c’ é igual a cinco, isto é, c = 5.
D: o valor do parâmetro ‘c’ é igual a um negativo, isto é, c = -1.</td></tr>
</table>

Figura 6: Tratamento das variáveis visuais da função exponencial: interferência do parâmetro c.
Fonte: arquivo da pesquisa

Na análise da ‘figura 6’, percebe-se que a posição da curva exponencial é variável, admitindo uma maior velocidade de crescimento conforme maior for o valor do parâmetro ‘*c*’. Nota-se também que curvas que apresentam valores opostos para tal parâmetro admitem representações gráficas simétricas em relação ao eixo das abcissas.

Além disto, percebe-se que contrariamente ao caso analisado na figura 1, o ponto cujas retas cruzam o eixo das ordenadas também é alterado passando a ser (0, c), o que também acontece com o parâmetro *k* porém a assíntota não se altera, ou seja, o único parâmetro responsável pelo deslocamento na assíntota é o parâmetro ‘*k*’.

Por outro lado, foi apresentado que o parâmetro *k* também é responsável pelo deslocamento da interseção da curva com o eixo das ordenadas, o que acontece então se ambos os parâmetros influenciarem a representação gráfica? Isto pode ser visualizado através da 'Figura 7'.

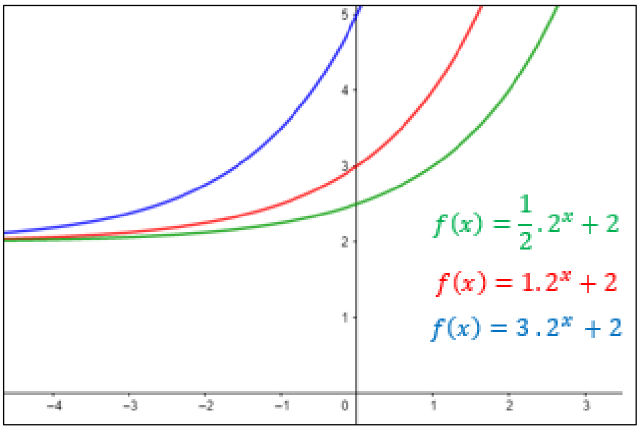


Figura 7: Funções exponenciais com valores variáveis para o parâmetro 'k'. Fonte: arquivo da pesquisa.

Tem-se que, por mais que ambos os parâmetros influenciem diretamente no deslocamento vertical, destacado pelo ponto no qual as curvas cortam o eixo das ordenadas, existe uma ordem que deve ser respeitada. Assim como, em manipulações algébricas, primeiro se deve operar o produto e só posteriormente a adição, na construção do gráfico da função exponencial esta ordem também precisa ser respeitada, ou seja, primeiro considera-se o deslocamento realizado por 'c' e só então o realizado por 'k', tendo $(0, c + k)$ como o ponto de interseção com o eixo das ordenadas.

Nota-se então, admitindo a forma geral $f(x) = c.a^{x+t} + k$, que o parâmetro 'a' está diretamente relacionado com a velocidade de crescimento/decrescimento da curva, mas sem alterar o ponto de interseção entre a curva e o eixo das ordenadas, o parâmetro 'c' também se relaciona com o índice de crescimento alterando o ponto de interseção entre a curva e o eixo das ordenadas, o parâmetro 't' é responsável pelo deslocamento horizontal e o parâmetro 'k' pelo deslocamento vertical.

Tomando todas as considerações realizadas, criou-se os 'Quadros 1 e 2' com o intuito de analisar todas as suas possíveis características da curva levando em consideração apenas o seu tratamento visual, analisando a influência que cada parâmetro traz na representação gráfica.

Parâmetro	**Unidades significativas (expressão algébrica)**	**Variáveis visuais (curva)**
a	Para $a > 1$: Valor do parâmetro 'a' maior que um.	Curva em sentido crescente.
	Para $0 < a < 1$: Valor do parâmetro 'a' entre zero e um.	Curva em sentido decrescente.
k	Para $k = 0$: Valor do parâmetro 'k' igual a zero.	Função base. A assíntota é a reta *y=0.*
	Para $k > 0$: Valor do parâmetro 'k' é maior que zero.	A curva e a assíntota são deslocadas verticalmente para cima em k unidades em relação a função base.
	Para $k < 0$: Valor do parâmetro 'k' menor que zero.	A curva e a assíntota são deslocadas verticalmente para baixo em k unidades em relação a função base.
t	Para $t = 0$: Valor do parâmetro 't' igual a zero.	Função base.
	Para $t > 0$: Valor do parâmetro 't' é maior que zero.	A curva é deslocada horizontalmente para esquerda em k unidades em relação a função base.
	Para $t < 0$: Valor do parâmetro 't' menor que zero.	A curva é deslocada horizontalmente para direita em k unidades em relação a função base.

Quadro 1. Características das curvas da forma $f(x) = a^{x+t} + k$. Fonte: do próprio autor.

O parâmetro *'c'* foi analisado separadamente através do Quadro 2 uma vez que existe um fator condicional, notando que transformará o formato da curva de crescente para decrescente ou de decrescente para crescente caso *'c'* seja negativo.

Unidades significativas (expressão algébrica)		**Variáveis visuais (curva)**
Para $a > 1$: Valor do parâmetro 'a' maior que um.	Para $c > 0$: Valor do parâmetro 'c' é maior ou igual a um.	Curva em sentido crescente.
	Para $c < 0$: Valor do parâmetro 'c' é maior ou igual a um.	Curva em sentido decrescente.
Para $0 < a < 1$: Valor do parâmetro 'a' entre zero e um.	Para $c > 0$: Valor do parâmetro 'c' é maior ou igual a um.	Curva em sentido decrescente.
	Para $c < 0$: Valor do parâmetro 'c' é maior ou igual a um.	Curva em sentido crescente.

Quadro 2. Características das curvas da forma $f(x) = c.a^{x+t} + k$. Fonte: do próprio autor.

Conforme já destacado, a representação é o meio para se ter acesso ao objeto de estudo e não é, de fato, o objeto representado. É nesse sentido que Duval (2009) destacou a necessidade de não se confundir o objeto com sua representação. Além de se lançar mão de diferentes representações semióticas, esses dois (ou mais) registros devem ser trabalhados concomitantemente, de forma que haja uma articulação entre eles.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente artigo foi discutido acerca das contribuições da teoria semiocognitiva dos Registros de Representação Semiótica para o processo ensino-aprendizagem do conceito de função, mais precisamente, para a interpretação global das propriedades figurais da escrita gráfica e algébrica da função exponencial.

Segundo Duval (2011, p. 99), todas as modificações realizadas na imagem (conjunto traçado/eixos) "determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica", de modo que identificamos na representação algébrica tais modificações.

Assim, a coordenação e articulação das representações algébrica e gráfica das funções exponenciais, portanto, são pontos fundamentais a serem explorados no Ensino Médio para que haja uma compreensão mais completa do conceito de função, porém se faz necessário, igualmente, explorar com o devido cuidado as outras representações desse conceito, para que o aluno tenha uma visão macroscópica do tópico estudado, sempre coordenando as representações, pois representações distintas apresentam informações diferentes do mesmo objeto matemático representado, de modo que uma ou outra representação favoreça o tratamento do objeto matemático.

Atrelado à base conceitual discutida nesse texto, vale destacar, por fim, a importância das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no processo ensino-aprendizagem da função exponencial.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC:** educação é a base. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 abr. 2022.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O cenário da pesquisa no campo da educação matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica. **Perspectiva em Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v.7, n.13, p.22-37, 2014.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 14-69.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais.** Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011a.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.6, n.2, p. 96-112, 2011b.

DUVAL, Raymond et al. **Ver e ensinar a matemática de outra forma. Introduzir a álgebra no ensino: qual é o objetivo e como fazer isso?** São Paulo: PROEM editora, 2015, v. 2.

LOURENÇO, E. H.; OLIVEIRA, P. C. Articulação e coordenação das representações algébrica e gráfica da função quadrática: A importância da interpretação figural. **Revista Insignare Scientia – RIS,** Chapecó, v.2, n.4, p.238-257, 2019.

MACHADO, S.D.A. (org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C.F. (orgs.). **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval**. Florianópolis: REVEMAT/UFSC, 2020. 485 p.

PONTES, H. M. S.; KLUPPEL, G. T. DUVAL, Raymond. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Org. Tânia M. M. Campos. Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. **Práxis Educativa**, v. 7, n. 2, p. 603-607, 11.

SIMONETTI, D.; MORETTI, M. T.; Esboço da parábola por meio de translações no ensino médio. In: MORETTI, M. T.; BRANDT, C.F. (orgs.). **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval**. Florianópolis: REVEMAT/UFSC, 2020. 485 p.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 1983.