Revista Binacional Brasil Argentina: diálogo entre as ciências

On-line. ISSN: 2316-1205

O ESTUDO DO MODELO COMBINATÓRIO DE PADOVAN POR MEIO DA ENGENHARIA DIDÁTICA

EL ESTUDIO DEL MODELO COMBINATORIO DE PADOVAN A TRAVÉS DE LA INGENIERÍA DOCENTE

THE STUDY OF PADOVAN'S COMBINATORY MODEL THROUGH TEACHING ENGINEERING

DOI: 10.22481/rbba.v12i01.11698

Renata Passos Machado Vieira
Universidade Federal do Ceará, Ceará, Brasil
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1966-7097
Id. Lattes: http://lattes.cnpq.br/0166320689075492
Endereço eletrônico: re.passosm@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3710-1561
Id. Lattes: http://lattes.cnpq.br/3288513376230522
Endereço eletrônico: fregis@gmail.com

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6917-5093
Endereço eletrônico: pcatarino@gmail.com

ISSN 2316-1205	Vit. da Conquista, Bahia, Brasil / Santa Fe, Santa Fe, Argentina	Vol. 12	Num.1	Jun/2023	p. 397-416

Submissão: 06.12.2023 Aprovação: 23.04.2023 Publicação: 08.06.2023

RESUMO

A presente pesquisa retrata os dados mais relevantes de uma investigação fundamentada na metodologia de pesquisa da Engenharia Didática em conjunto com a metodologia de ensino da Teoria das Situações Didáticas. Visando abordar estratégias e teorias de ensino para o estudo de História da Matemática e sequências, tem-se uma interpretação combinatória da sequência de Padovan, guiada pela Engenharia Didática. Assim, é proposta e discutida uma questão, denominada de situação-problema, permitindo uma investigação em torno dos números de Padovan. As análises são realizadas com base nas metodologias citadas, visando oferecer novas abordagens de resoluções, para que os estudantes se tornem os protagonistas do seu próprio conhecimento. A investigação poderá ocorrer em cursos de formação inicial de professores de Matemática, promovendo uma visualização e vislumbre da sequência de Padovan diante de sua abordagem combinatória. Por fim, conclui-se que a pesquisa fornece recursos para que ocorram repercussões e promoções de roteiros investigativos em cursos de formação inicial de professores de Matemática, no âmbito do ensino da sequência de Padovan.

Palavras chave: Engenharia Didática. Modelo Combinatório. Teoria das Situações Didáticas.

RESUMEN

Esta investigación recoge los datos más relevantes de una investigación basada en la metodología de investigación de la Ingeniería Didáctica junto con la metodología de enseñanza de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Con el objetivo de abordar las estrategias y teorías de enseñanza para el estudio de la Historia de las Matemáticas y las secuencias, tenemos una interpretación combinatoria de la secuencia de Padovan, guiada por la Ingeniería Didáctica. Así, se propone y discute un tema denominado situación problema, que permite una indagación en torno a los números padovanos, protagonistas de su propio saber. La investigación puede tener lugar en cursos de formación inicial para profesores de Matemática, promoviendo una visualización y vislumbre de la secuencia de Padovan frente a su enfoque combinatorio. Finalmente, se concluye que la investigación proporciona recursos para que la repercusión y promoción de los guiones investigativos se produzcan en los cursos de formación inicial de profesores de Matemática, en el ámbito de la enseñanza de la secuencia Padovan.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica. Modelo combinatorio. Teoría de las Situaciones Didacticas.

ABSTRACT

This research portrays the most relevant data from an investigation based on the research methodology of Didactic Engineering together with the teaching methodology of the Theory of Didactic Situations. Aiming to address teaching strategies and theories for the study of History of Mathematics and sequences, we have a combinatorial interpretation of the Padovan sequence, guided by Didactic Engineering. Thus, an issue called problem situation is proposed and discussed, allowing an investigation around the Padovan numbers. protagonists of their own knowledge. The investigation may take place in initial training courses for Mathematics teachers, promoting a visualization and glimpse of Padovan's sequence in front of his combinatorial approach. Finally, it is concluded that the research provides resources for the repercussions and promotion of investigative scripts to occur in initial training courses for Mathematics teachers, within the scope of teaching the Padovan sequence.

Keywords: Didactic Engineering. Combinatorial Model. Theory of Didactic Situations.

INTRODUÇÃO

Atualmente, existe uma vasta preocupação com a formação dos professores, sugerindo assim abordagens mais complexas durante o processo de ensino, oportunizando aos futuros professores a construção e identificação com a docência, bem como um maior interesse dos estudantes pela disciplina de Matemática abordada em sala de aula (SANTOS et al., 2020).

Estudos em torno de História da Matemática, predominam a sequência de Fibonacci e seus aspectos de curiosidade, deixando ausente o estudo de outras sequências, bem como outras abordagens matemáticas (BURTON, 2007).

Com isso, percebe-se o interesse em distintas abordagens e generalizações de sequências lineares e recorrentes, dando ênfase à sequência de Fibonacci. Desse modo, pode-se perceber a integração desses números com os números pertencentes à sequência de Padovan. A relação existente é devido ao fato de ambos pertencerem aos números mórficos. A sequência de Fibonacci possui relação com o número de ouro, já a sequência de Padovan possui relação com o número plástico. Porém, o número plástico e o número de ouro são as duas únicas soluções dos números mórficos (AARTS et al., 2001; FERREIRA, 2015; DUNLAP, 1997).

A partir de estudos relacionados ao número plástico, o arquiteto italiano Richard Padovan (1935-) criou a sequência de Padovan. Esta sequência é uma espécie de prima da sequência de Fibonacci, sendo, portanto, de terceira ordem (PADOVAN, 1994; VIEIRA, 2020; ALVES, CATARINO, 2022).

Ao realizar manipulações algébricas na recorrência desta sequência, temos então a sua equação característica, em que a única solução real é dada pelo número plástico, e as outras duas raízes são números complexos e conjugados. Realizando uma comparação com a recorrência de Fibonacci, podemos perceber que o valor do coeficiente da fórmula generalizada ( ), é igual a zero.

Diante desses aspectos matemáticos, tem-se a transposição desse conteúdo para a área de ensino. Segundo Masolanorma e Allevato (2019) diversas são as dificuldades dos estudantes na área de matemática, sendo necessário que o professor estabeleça estratégias de ensino para assim alcançar o aprendizado do estudante (ROCHA; AGUIAR, 2012). Desse modo, pode-se constatar diversos trabalhos apresentando abordagens matemáticas para a área de ensino, permitindo um estudo em torno de teorias e metodologias de pesquisa, para assim o professor estabelecer estratégias de ensino em suas aulas. A exemplo disso, tem-se os trabalhos de Zborowski e Pigatto (2018), Vieira, Alves e Catarino (2019), Silva (2019) e Oliveira (2015) em que tratam da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa integrada a diversos objetos matemáticos e á teoria de ensino da Teoria das Situações Didáticas.

Utiliza-se a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa (ARTIGUE; GLORIAN, 1991), e a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) como metodologia de ensino, com o propósito de compreender o objeto de estudo e as suas respectivas concepções e abordagens em sala de aula.

De fato, diversos pesquisadores que utilizam a Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas, destacam que os pressupostos didáticos são apresentados por meio das atividades propostas, e tornam possível a compreensão e construção coletiva dos sujeitos, em relação ao ensino do objeto matemático, promovendo uma percepção epistemológica da evolução do conteúdo matemático. No ponto de vista da cognição, é possível contemplar uma evolução matemática dos participantes durante as situações previstas na Teoria das Situações Didáticas, finalizando com a institucionalização.

Com base nos estudos de Vieira, Alves e Catarino (2022) em que tratam do estudo do modelo combinatório da sequência de Padovan, tem-se a questão norteadora desta pesquisa: como realizar um estudo investigativo em torno da sequência de Padovan, potencializando seus aspectos epistemológico e abordagem combinatória? Diante disso, traça-se o objetivo geral dessa pesquisa, sendo esse: realizar um estudo investigativo da abordagem combinatória de Padovan, fundamentada na teoria de ensino da Teoria das Situações Didáticas.

Assim, é então elaborada uma situação-problema fundamentada na teoria de ensino da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986) em torno do modelo combinatório de Fibonacci, oferecendo um aporte aos cursos de formação inicial de professores e aos professores de Matemática.

ANÁLISES PRELIMINARES

Durante esta primeira fase da Engenharia Didática, são então realizados levantamentos bibliográficos, abordando conceitos matemáticos para que os alunos possam utilizá-los posteriormente. Dessa forma, tem-se inicialmente uma breve a análise da sequência de Padovan e abordagens combinatórias e, posteriormente a construção do campo epistêmico-matemático.

A seleção do conteúdo deu-se com base na análise dos livros de História da Matemática, abordando a sequência de Fibonacci e ausentando outras sequências e interpretações combinatórias.

Assim, tem-se os trabalhos de Vieira, Alves e Catarino (2022), em que tratam da abordagem combinatória da sequência de Padovan. Spreafico (2014) definiu a noção de tabuleiro, servindo como embasamento para que os alunos possam interpretar a sequência por meio da noção de casas e células.

Com base nisso, tem-se o trabalho de Alves (2016), em que trata da aplicação da Engenharia Didática para formação inicial de professores, tem-se então proposta desta pesquisa. Tão logo, foi elaborado o seu respectivo campo epistêmico-matemático, a fim de propor aos estudantes a construção do conhecimento teórico sobre o tema, servindo como base para as fases posteriores da metodologia de pesquisa aplicada.

ENGENHARIA DIDÁTICA E TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Sem dúvidas, o processo de ensino e aprendizagem matemático não é considerado trivial para muitos alunos, necessitando de alternativas para estimular o raciocínio e interesse dos estudantes. Assim, em meados dos anos 80, surgiu na França uma metodologia de pesquisa com o viés de aperfeiçoar as práticas existentes no sistema de ensino, buscando ainda uma compreensão dos acontecimentos da aprendizagem matemática.

Com isso, surge-se então a metodologia da Engenharia Didática, em que segundo Artigue (1988), o seu trabalho é similar de um engenheiro, amparando-se em conhecimentos científicos técnicos de seu domínio e, obrigado a utilizar objetos mais complexos do que os depurados das Ciência. Além disso, essa metodologia, possibilita o estudo das práticas existentes em sala de aula, fornece recursos para a formação do professor e, analisa a sua respectiva atividade e transposição didática do conteúdo matemático (CHEVALLARD, 1991).

Diante da origem das perspectivas de analisar o papel do professor, em torno da Didática da Matemática, enfatizando a atividade de formação do professor de Matemática. Com isso, a presente pesquisa utilizou da Engenharia Didática, apresentada por micoengenharia ou macroengenharia. Onde a primeira possui um olhar mais restrito das práticas de sala de aula. Enquanto a segunda possui um olhar mais global. Assim sendo, emprega-se a microengenharia nesse trabalho, com o viés de realizar o ensino do objeto de estudo matemático. Artigue (1995) retrata ainda que a utilização dessa metodologia de pesquisa é algo complexo, visto que os dados coletados em sala de aula "não são fáceis de se desenvolver na prática" (ARTIGUE, 1995, p. 36).

Dividida então em quatro fases: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e a validação, tem-se o estudo entre a teoria e prática. Na primeira fase, são identificados os problemas referentes ao ensino e aprendizagem, buscando na literatura os trabalhos e livros sobre o objeto de estudo matemático, elencando os elementos de ordem epistemológica, cognitiva e didática (ARTIGUE, 1995).

Na concepção e análise a priori, são selecionadas as variáveis (microdidáticas ou macrodidáticas, discutidas mais adiante) e, desenvolvidas as situações de ensino com base no campo epistêmico-matemático, buscando alcançar o objetivo da pesquisa. Almouloud (2007) afirma que:

> A análise a priori é importantíssima, pois de sua qualidade depende o sucesso da situação-problema; além disso, ela permite, ao professor, poder controlar a realização das atividades dos alunos, e, também, identificar e compreender os fatos observados. Assim, as conjecturas que vão aparecer poderão ser consideradas, e algumas poderão ser objeto de um debate científico (ALMOULOUD, 2007, p.176).

Na experimentação, são aplicadas as situações de ensino elaboradas na fase anterior, devendo ocorrer um registro desses dados coletados (ALVES, 2016). Além disso, é indispensável que exista o contrato didático, apresentando as devidas responsabilidades dos professores e participantes da pesquisa. Destaca-se que existem casos em que ocorre a ruptura do contrato didático, visto que os estudantes não dispõem de interesse pelo processo de aprendizagem. E por fim, tem-se a última fase, análise a posteriori e na validação, que analisa os dados coletados na fase anterior, comparando-os com a fase da análise a priori, realizando assim a validação das hipóteses formuladas. A validação pode ser interna, analisando somente os estudantes participantes da pesquisa, ou externa, em que compara os participantes que utilizaram a metodologia de pesquisa com os sujeitos que não a utilizaram (LABORDE, 1997).

Visando apoiar as fases da Engenharia Didática, sente-se a conveniência de utilizar uma metodologia de ensino, que oportunize aos estudantes um local de aprendizado e troca de informações, sendo, portanto, a Teoria das Situações Didáticas, fundamentadas em situações didáticas de ensino (BLUM, ARTIGUE, MARIOTTI, STRABER, 2016).

Essa metodologia de ensino, propõe e estimula os estudantes a resolver situações didáticas de ensino, propiciando uma investigação durante o processo de ensino e aprendizado em matemática (BROUSSEAU, 1986). Destaca-se que a situação didática, segundo Brousseau (2006), é "o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina certo conhecimento” (BROUSSEAU, 2006, p. 19). Tão logo, não se deve esquecer a presença do milieu, representando o meio de aplicação da situação didática. De fato, a Teoria das Situações Didáticas é dividida em quatro situações: ação, formulação, validação e institucionalização.

Na situação de ação, segundo Alves (2016), é nesse momento que o sujeito tem o primeiro contato com a situação-problema proposta, sendo essa uma atividade composta por questões com enunciados diretos e objetivos. Assim, os participantes irão tentar resolvê-la realizando buscas nos conhecimentos já adquiridos. Na situação de formulação, os participantes transformam as ideias em linguagens mais técnicas e formais, objetivando conjecturar teoremas e propriedades (VIEIRA et al., 2019). A situação de validação acontece com a validação das resoluções apresentadas na fase da ação, propondo discussões. Por fim, na situação de institucionalização o professor analisa as resoluções apresentadas, revelando o objetivo da situação-problema (ALVES, 2019).

Em seguida, inicia-se a primeira fase da Engenharia Didática, com o levantamento do referencial teórico em torno do objeto de estudo e, demarcação do respectivo campo epistêmico-matemático.

CAMPO EPISTÊMICO-MATEMÁTICO

Iniciando o estudo em relação a sequência de Padovan, pode-se estabelecer que essa sequência é do tipo linear e recorrente. A ordem desses números é referente a terceira, possuindo relação de recorrência: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$, com $P_0 = P_1 = P_2 = 1$e sendo P_n o n-ésimo termo da sequência de Padovan. Assim, tem-se um estudo investigativo desses números, diante de sua abordagem combinatória, fundamentada no trabalho de Vieira, Alves e Catarino (2022).

Spreafico (2014) realizou um estudo, permitindo a definição de tabuleiro para o ensino de sequências lineares e recorrentes. Assim, tem-se que um tabuleiro é composto por quadrados, sendo denominados de células e/ou casas de acordo com a sua posição. Com isso, tem-se o estudo do modelo combinatório de Fibonacci, em que a quantidade de maneiras (f_n) de se cobrir um tabuleiro 1 x n com quadrados 1 x 1 e dominós 1 x 2 é igual a $f_n = F_{n+1}$ (SPIVEY, 2019).

Assim, seguindo as discussões apontadas por Koshy (2001; 2014; 2019) e Benjamin e Quinn (2003), que analisam o comportamento combinatório da sequência de Fibonacci via ladrilhamentos, define-se uma regra particular para o teorema referente aos ladrilhamentos de Padovan.

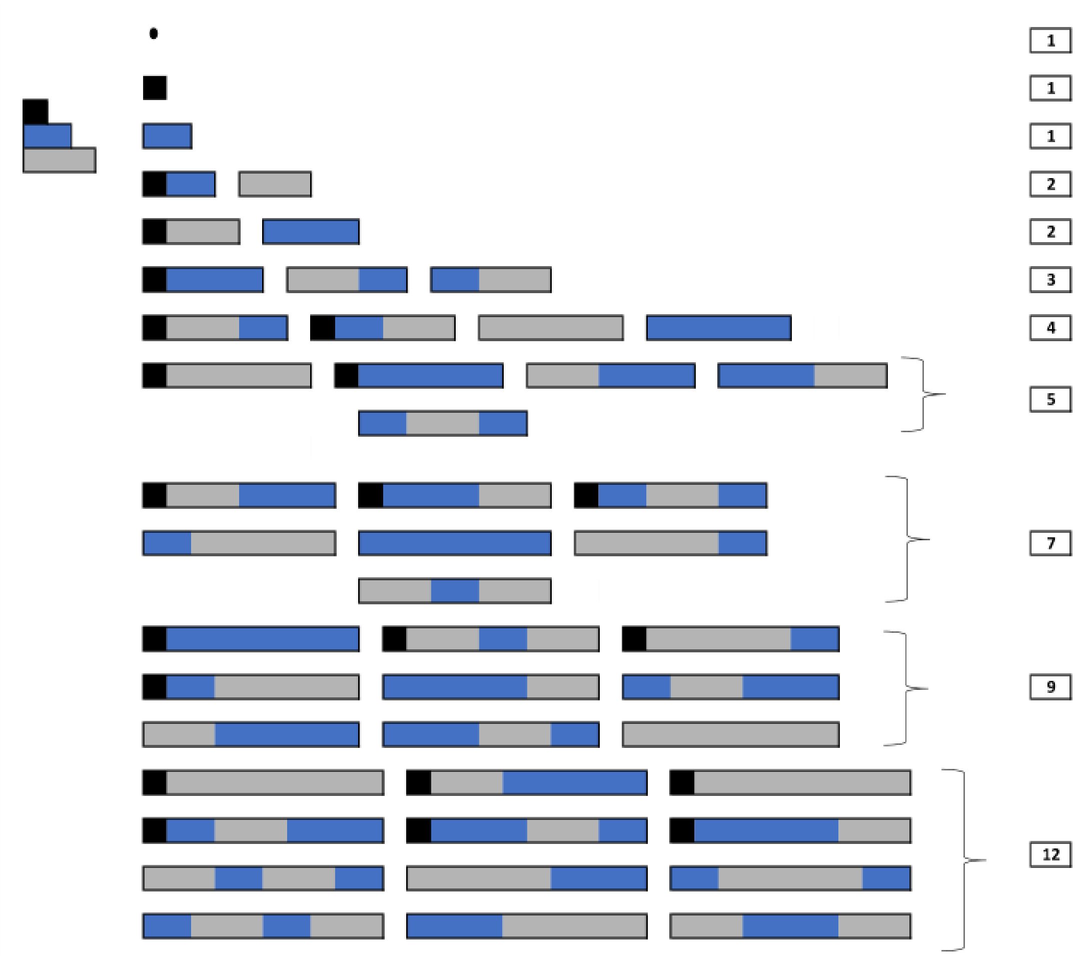
Aplicando a mesma ideia, considerando um dominó estendido, definido como um retângulo de tamanho 1 x 3, um quadrado preto 1 x 1 e o dominó 1 x 2, qualquer ladrilho de Padovan é formado pela disposição das formas definidas.

Definição 1. Considerando um dominó estendido, definido como um retângulo de tamanho 1 x 3; um quadrado preto 1 x 1 e o dominó 1 x 2, qualquer ladrilho de Padovan é formado pela disposição das formas definidas. O quadrado preto destina-se a complementar os ladrilhos vazios, sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho. As regras particulares mencionadas são definidas para o teorema referente ao ladrilhamento de Padovan.

Assim, considera-se um n-tabuleiro, com as seguintes formas de ladrilhos: quadrado preto 1 x 1, dominós azuis 1 x 2, dominós estendidos cinza 1 x 3, todos com peso 1. Na Figura

1, ao lado esquerdo, são fornecidos alguns exemplos visando preencher o n-tabuleiro correspondente à sequência de Padovan. Ao lado direito, encontram-se os termos correspondentes aos números de Padovan. Com isso, é possível perceber o termo p_n como sendo a quantidade de formas de ladrilhos do n-tabuleiro, seguindo as regras supracitadas, determinando a relação: $p_n = P_n, n \geq 0$. A seguir, é fixado $p_0 = 1 = P_0$, quando não existe nenhum tabuleiro de tamanho 1 x n, e $p_1 = 1 = P_1$, quando existe apenas um quadrado preto. Assim tem-se a exceção da regra, uma vez que nesse caso, o quadrado preto será a única figura, estando no início e consequentemente no final (simultaneamente).

Figura 1: Ladrilhamento de Padovan.



Fonte: Adaptado de Vieira, Alves e Catarino (2022).

Teorema 1. Para $n \geq 0$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos de quadrado preto, dominó azul e dominó estendido cinza é dado por:

$$p_n = P_n,$$

sendo p_n o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e P_n o n-ésimo termo da sequência de Padovan.

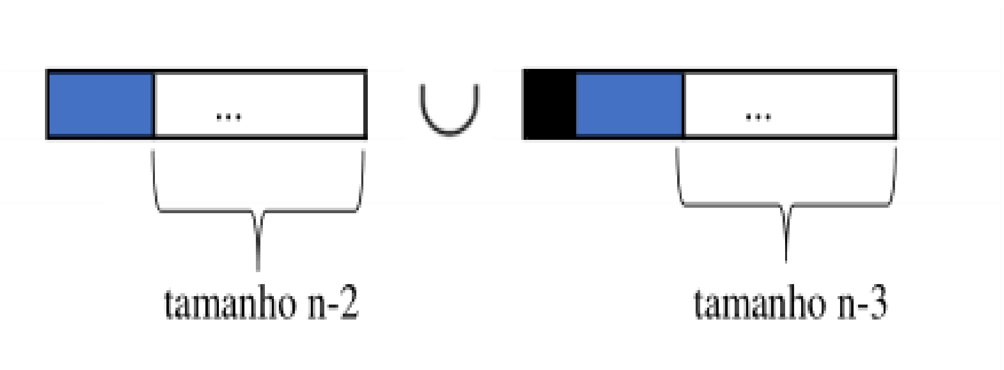
Demonstração. Com base nos argumentos e demonstrações contidos em Koshy (2001), tem-se que:

Seja p_n a soma das telas dos ladrilhamentos, em que $p_0 = 1 = P_0$, $p_1 = 1 = P_1$.

Considerando os ladrilhamentos de tamanho n-2, em que $n \geq 0$, tem-se:

> Caso 1: Sejam os subconjuntos dos ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto e outro subconjunto dos demais ladrilhamentos. Considere um novo conjunto de ladrilhamentos, começando com o dominó azul, de tamanho 1 x 2, justaposto com os ladrilhamentos de tamanho n-2 que não iniciam com o quadrado preto em união com o conjunto dos ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto, de tamanho 1 x 1, inserindo um dominó azul de tamanho 1 x 2, logo após esse quadrado. Essa união resulta em um conjunto de ladrilhamento de tamanho n (Figura 2).

Figura 2: União dos tabuleiros de tamanho n-2.

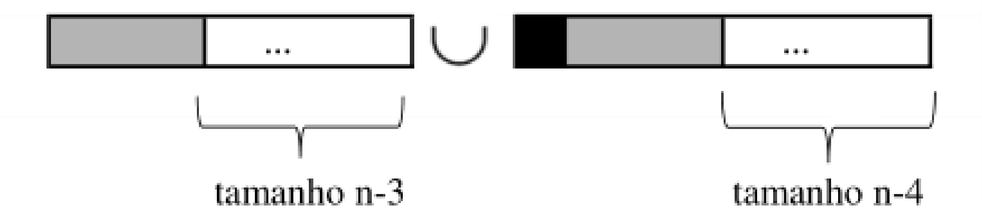


Fonte: Adaptado de Vieira, Alves e Catarino (2022).

Assim, o número de peças começando com o dominó azul é dado por p_{n-4}, enquanto o número de peças começando com o quadrado preto, seguido do dominó azul, é dado por p_{n-5}. A junção é dada por p_{n-2}.

> Caso 2: Sejam os subconjuntos dos ladrilhamentos que iniciam com o dominó estendido (ladrilhos que não iniciam com os quadrados pretos) e outro subconjunto dos ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto, seguido do dominó estendido. Considere um novo conjunto de ladrilhamentos, começando com o dominó estendido cinza, de tamanho 1 x 3, justaposto com os ladrilhamentos de tamanho n-3 que não iniciam com o quadrado preto em união com o conjunto dos ladrilhamentos que iniciam com o quadrado preto, de tamanho 1 x 1, inserindo um dominó estendido cinza de tamanho 1 x 3, logo após esse quadrado. Essa união resulta em um conjunto de ladrilhamento de tamanho n-3 (Figura 3).

Figura 3: União dos tabuleiros de tamanho n-3.



Fonte: Adaptado de Vieira, Alves e Catarino (2022).

Assim, o número de peças começando com o dominó estendido cinza é dado por p_{n-5}, enquanto o número de peças começando com o quadrado preto, seguido do dominó estendido cinza, é dado por p_{n-6}. A junção é dada por p_{n-3}.

Logo, pelo princípio da adição dos casos independentes analisados (sem a utilização da interseção), $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$. Satisfazendo a recorrência de Padovan ($P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$), com as condições iniciais $p_0 = P_0$ e $p_1 = P_1$. Logo $p_n = P_n$.

Algumas identidades de Padovan estão associadas as discussões oriundas para a interpretação de Fibonacci em Benjamin e Quinn (2003).

Identidade 1. A quantidade de peças de um tabuleiro de tamanho n que utilizam pelo menos um dominó é p_n ou p_{n-1}, a depender do valor de n.

Identidade 2. A quantidade de peças de um tabuleiro de tamanho n que utilizam pelo menos um dominó estendido é p_{n-1}.

CONCEPÇÃO E ANÁLISE A *PRIORI*

Ocorre nesta fase da Engenharia Didática, o desenvolvimento da situação-problema, sendo essas analisadas por intermédio da variável microdidática. Com isso, tem-se que a escolha é realizada devido ao fato de a organização da atividade ser dada em torno de uma possível experimentação.

Desse modo, foi desenvolvido um estudo em relação ao campo epistêmico-matemático abordado na seção anterior, permitindo uma investigação da interpretação combinatória de Padovan diante de uma análise epistemológica, cognitiva e didática no curso de formação inicial de professores de Matemática. Com isso, é realizada uma discussão da situação didática transposta por meio de uma situações-problema, fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas.

Assim, para a situação-problema 1, tem-se a análise das variáveis:

- noção de tabuleiro;
- modelo combinatório de Fibonacci;
- regras de configuração das peças da interpretação combinatória de Padovan;
- modelo combinatório de Padovan.

Situação-problema 1: A sequência de Padovan, criada pelo arquiteto italiano Richard Padovan (1935) (STEWART, 1996), é uma sequência numérica recorrente e considerada prima da sequência de Fibonacci, porém de terceira ordem. Gérard Cordonnier (1907 – 1977) também desenvolveu alguns estudos acerca destes números, mais especificamente sobre o número plástico (número radiante), com isso a sequência também é conhecida como sequência de Cordonnier. Esses números possuem a seguinte relação de recorrência com $n \in \mathbb{N}$: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$, $n \geq 3$, onde P_n é o n-ésimo termo da sequência e os primeiros termos são: $P_0 = P_1 = P_2 = 1$.

Assim, os primeiros dez termos dessa sequência são dados por: 1,1,1,2,2,3,4,5,7,9.

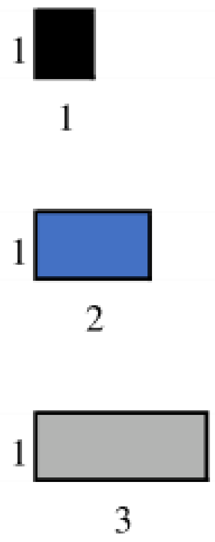
Desse modo, visando realizar uma interpretação combinatória para a sequência de Padovan, tem-se a noção de tabuleiro, em que apresenta um tabuleiro como sendo formado por quadrados denominados casas, células ou posições. Essas posições são enumeradas e essas enumerações descrevem a posição. Assim, um determinado tabuleiro será chamado apenas de n-tabuleiro (SPREAFICO, 2014).

Diante disso, tem-se a definição das seguintes regras:

Definição 1. Considerando um dominó estendido, definido como um retângulo de tamanho 1 x 3; um quadrado preto 1 x 1 e o dominó 1 x 2, qualquer ladrilho de Padovan é formado pela disposição das formas definidas. O quadrado preto destina-se a complementar os ladrilhos vazios, sujeito à regra de ser inserido apenas no início e, apenas uma vez em cada ladrilho. As regras particulares mencionadas são definidas para o teorema referente ao ladrilhamento de Padovan (VIEIRA, ALVES E CATARINO, 2022).

Desse modo, quantos ladrilhamentos de Padovan são possíveis obter, utilizando as regras e peças (ver Figura 4) definidas, com um tabuleiro de tamanho 1 x 7?

Figura 4: Peças disponíveis para o modelo combinatório de Padovan.

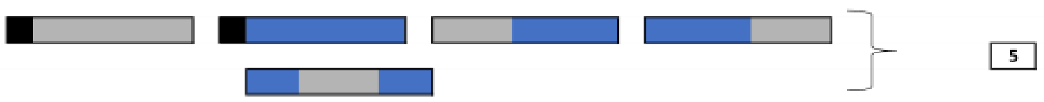


Fonte: Elaborado pelos autores.

Fase da ação: os estudantes deverão apropriar-se das peças disponíveis e da fórmula de recorrência da sequência de Padovan, para seguir com a compreensão das regras definidas para o manuseio das peças.

Fase da formulação: após a compreensão das regras, os estudantes deverão observar a possibilidade de 5 formas de preencher o tabuleiro 1 x 7, conforme apresenta a Figura 6.

Figura 6: Formas de ladrilhar em um tabuleiro 1 x 7 de Padovan.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Fase da validação: observando a recorrência da sequência de Padovan, busca-se que os estudantes analisem o valor correspondente da sequência para o termo 7, ou seja, o sétimo termo da sequência de Padovan. Assim, devem-se ainda compreender que esse valor também representa a quantidade de ladrilhos existentes para um tabuleiro de tamanho 1 x 7. Logo, $P_7 = p_7$, onde P_7 representa o sétimo termo da sequência de Padovan e p_7 a quantidade de formas de ladrilhar em um tabuleiro 1 x 7 do modelo combinatório de Padovan.

Fase da institucionalização: O professor irá validar as discussões realizadas durante a obtenção da resposta da atividade. Ressalta-se a importância em discutir não somente as conjecturas corretas, como também as resoluções que ocorreram de forma errônea. É nesse momento que o professor retoma a posição central da atividade e divulga ainda a intenção da proposta, sendo, portanto, a interpretação combinatória de Padovan, por meio de seus ladrilhamentos para um tabuleiro de tamanho 1 x n. Assim, para $n \geq 0$, tem-se que os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro 1 x n, com os ladrilhos de quadrado preto, dominó azul e dominó estendido cinza é dado por: $p_n = P_n$, sendo p_n o número de formas de preenchimento do tabuleiro 1 x n e P_n o n-ésimo termo da sequência de Padovan (VIEIRA, AVLES E CATARINO, 2022) (Teorema 1).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fundamentada na teoria construtivista do conhecimento, Engenharia Didática, e em suas respectivas fases, foram realizadas as análises internas e verificação das duas atividades propostas, baseada na Teoria das Situações Didáticas no curso de extensão para professores em formação inicial em Matemática. As situações didáticas foram elaboradas e aplicadas, podendo ainda serem reaplicadas em experimentações distintas da apresentada neste trabalho.

A fase inicial aconteceu realizando um estudo prévio dos conceitos e propriedades referentes ao objeto matemático, com o conteúdo da sequência de Padovan e sua abordagem combinatória. Com isso, aplica-se a metodologia de pesquisa e ensino, instigando os alunos a serem os protagonistas da construção do próprio conhecimento. Na segunda fase foi elaborada uma questão envolvendo o conteúdo de sequências prevendo os possíveis comportamentos dos sujeitos participantes. Durante a fase de experimentação, os professores em formação inicial poderão resolver e discutir formas de abordagem para a atividade proposta.

Na fase final, os dados da análise a *priori* e *posteriori* serão confrontados, realizando uma comparação dos resultados esperados com os obtidos. Por fim, é possível perceber a relevância dessas atividades no contexto de cursos de formação inicial de professores de Matemática, integrada ao conteúdo de sequências e sua interpretação combinatória.

AGRADECIMENTOS

A parte de desenvolvimento de pesquisas no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq e da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap). A vertente de desenvolvimento da investigação em Portugal é financiada por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID / CED / 00194/2020.

REFERÊNCIAS

AARTS, J.; FOKKINK, R.; KRUIJTZER, G. Morphic numbers. **Nieuw Archief voor Wiskunde**, v. 5, n. 2, p. 56–58, 2001.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. 3. ed. [S.l.]: São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A sequência de padovan ou cordonnier. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 22, n. 45, p. 21–43, 2022.

ALVES, F. R. V. Visualizing the olympic didactic situation (ods): teaching mathematics with support of the geogebra software. **Acta Didactica Napocensia**, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019.

ALVES, F. R. V. Transição complexa do Cálculo TCC: Engenharia Didática para as noções de Sequências e Séries de Potências. **Educação Matemática em Revista – RS**, v. 1, n. 17, p. 83-97, 2016.

ARTIGUE, M. **Ingenieria Didática**. Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. In: Ingeniéria didatica en Educacion Matemática, 1995.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M.; GLORIAN, M. J. P. Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. **For the Learning of Mathematics**, v. 11, n. 1, p. 13–18, 1991.

BENJAMIN, A. T.; QUINN, J. J. **Proofs the Realy Count: The art of Cominatorial Proof**. [S. l.]: American Mathematical Society, 2003.

BLUM, W.; ARTIGUE, M.; MARIOTTI, M. A.; STRABER, R.; HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. den. **European Traditions in Didactics of Mathematics**. [S. l.]: ICME 13. Springer Open, 2016.

BROUSSEAU, G. A etnomatemática e a teoria das situações didáticas. **Educação Matemática Pesquisa, São Paulo**, v. 8, n. 2, p. 267-281, 2006.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherchesen Didactiquedes Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BURTON, D. M. **The History of Mathematics: an introduction**. [S. l.]: New York: McGraw-Hill Companiesa, 2007.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble: La pensée sauvage, 1991.

DUNLAP, R. A. **The Golden Ratio and Fibonacci Numbers**. [S. l.]: World Scientific, 1997.

FERREIRA, R. **Números mórficos**. 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Universidade Federal da Paraíba, 2015.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. [S. l.]: New York: Wiley-Interscience, v. 1, 2001.

KOSHY, T. **Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications**. [S. l.]: New York: Wiley-Interscience, 2014.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. [S. l.]: New York: Wiley-Interscience, v. 2, 2019.

LABORDE, Cécile. Affronter la complexité des situations didátiques d'apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. **Didaskalia**, v. 1, p. 97-112, 1997.

MASOLANORMA, W. de J.; ALLEVATO, S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. **Educação Matemática Debates**, v. 3, n. 7, p. 52–67, 2019.

OLIVEIRA, A. S. dos S. **Uma Engenharia Didática para o Ensino das Operações com números racionais por meio da calculadora para o quinto ano do ensino fundamental**. 2015. 125 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Católica de São Paulo, 2015.

PADOVAN, R. **Dom Hans van der Laan: modern primitive**. [S. l.]: Amsterdam, Architecture and Natura Press, v. 1, 1994.

ROCHA A. M. C.; AGUIAR A. M. C. Aprender e ensinar construir identidade e profissionalidade docente no contexto da universidade: uma realidade possível. In: . [S. l.]: **35ª REUNIÃO ANUAL DA ANPED**, p.1–17. 2012.

SANTOS, Eliane Barcelo; et al. A importância do Programa de Residência Pedagógica na formação de professores no Instituto Federal Farroupilha – Campus São Vicente do Sul. **Revista Insignare Scientia**, v. 3, n. 1, p. 42-56, 2020.

SILVA, A. L. da. **Uma Engenharia Didática para aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio**. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, 2019.

SPIVEY, Z. M. **The Art of Proving Binomial Identities**. [S. l.]: London: Taylor and Francis Ltd, 2019.

SPREAFICO, E. V. P. **Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos**. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas - IME, 2014.

STEWART, I. Tales of a neglected number. Mathematical Recreations, **Scientific American**, v. 274, p. 102–103, 1996.

VIEIRA, R. P. M. **Engenharia Didática (ED): o caso da Generalização e Complexificação da Sequência de Padovan ou Cordonnier**. 2020. 266 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, 2020.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Combinatorial Interpretation of Numbers in the Generalized Padovan Sequence and Some of Its Extensions. **Axioms**, no prelo, 2022.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Uma Exploração da Sequência de Padovan num curso de Licenciatura em Matemática. **Indagatio Didactica**, v. 11, n. 4, p. 261-279, 2019.

ZBOROWSKI, C. A.; PIGATTO, A. G. S. Contribuições da engenharia didática como metodologia para o ensino de ciências nos anos iniciais. **Vidya**, v. 38, n. 2, p. 71–88, 2018.