

CONECTANDO ARTE Y MATEMÁTICA: MOSAICOS CON GEOGEBRA

CONECTANDO ARTE E MATEMÁTICA: MOSAICOS COM GEOGEBRA

CONNECTING ART AND MATHEMATICS: MOSAICS WITH GEOGEBRA

DOI: 10.22481/rbba.v12i02.13839

Alberto Rodríguez Fernández
Universidad de Santiago de Compostela – España
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9064-216X>
Dirección electrónica: albertorodriguez.fernandez@usc.es

Gonzalo Castiñeira Veiga
Universidad de Santiago de Compostela – España
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3094-1971>
Dirección electrónica: gonzalo.castineira.veiga@usc.es

Julio Rodríguez Taboada
Instituto de Educación Secundaria “As Barxas”, España
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-4676-0040>
Dirección electrónica: juliotab@edu.xunta.gal

Teresa F. Blanco
Universidad de Santiago de Compostela – España
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4215-8677>
Dirección electrónica: teref.blanco@usc.es

RESUMEN

En este trabajo se analiza una propuesta didáctica, diseñada para alumnos de 14-15 años, que integra matemáticas, arte y el software de geometría dinámica GeoGebra como recurso tecnológico. La propuesta se apoya en la

Publicado sob a Licença Internacional – CC BY-NC-SA 4.0

ISSN 2316-1205	Vit. da Conquista, Bahia, Brasil / Santa Fe, Santa Fe, Argentina	Vol. 12	Num.2	Dez/2023	p. 52-71
----------------	--	---------	-------	----------	----------

metodología Aprendizaje Basado en Proyectos STEAM y se focaliza en contenidos y procedimientos relacionados con el espacio, la medida y el aspecto socioafectivo de las matemáticas. El objetivo es estudiar el problema del recubrimiento del plano y la construcción de mosaicos desde un marco interdisciplinar. Se destaca el papel de los recursos tecnológicos en el desarrollo de procesos y habilidades matemáticas, como la visualización, argumentación, formulación de conjeturas, representación y comunicación. La propuesta se estructura en cinco sesiones que recorren las cinco fases del modelo educativo de Van Hiele y que termina con la creación de un mosaico. Como conclusión, la propuesta promovió el trabajo en grupo y enfatizó la importancia de obtener un producto final como estrategia motivadora para despertar el interés hacia las matemáticas.

Palabras Clave: STEAM. Mosaicos. Isometrías GeoGebra.

RESUMO

Este trabalho analisa uma proposta de ensino, destinada a alunos de 14 a 15 anos, que integra matemática, arte e o software de geometria dinâmica GeoGebra como recurso tecnológico. A proposta baseia-se na metodologia STEAM Project-Based Learning e concentra-se em conteúdos e procedimentos relacionados ao espaço, à medição e ao aspecto socioafetivo da matemática. O objetivo é estudar o problema da cobertura plana e da construção de mosaicos a partir de um arcabouço interdisciplinar. Destaca-se o papel dos recursos tecnológicos no desenvolvimento de processos e habilidades matemáticas, como visualização, argumentação, formulação de conjeturas, representação e comunicação. A proposta está estruturada em cinco sessões que percorrem as cinco fases do modelo educacional de Van Hiele e termina com a criação de um mosaico. Concluindo, a proposta promoveu o trabalho em grupo e enfatizou a importância da obtenção de um produto final como estratégia motivacional para despertar o interesse pela matemática.

Palavras Chave: STEAM. Mosaicos. Isometrias. GeoGebra.

ABSTRACT

This work analyzes a teaching proposal, designed for students aged 14-15, that integrates mathematics, art and the dynamic geometry software GeoGebra as a

technological resource. The proposal is based on the STEAM Project-Based Learning methodology and focuses on content and procedures related to space, measurement, and the socio-affective aspect of mathematics. The objective is to study the problem of plane covering and the construction of mosaics from an interdisciplinary framework. The role of technological resources in the development of mathematical processes and skills is highlighted, such as visualization, argumentation, formulation of conjectures, representation, and communication. The proposal is structured in five sessions that go through the five phases of Van Hiele's educational model and ends with the creation of a mosaic. In conclusion, the proposal promoted group work and emphasized the importance of obtaining a final product as a motivational strategy to awaken interest in mathematics.

Keywords: STEAM. Mosaics. Isometries. GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

Las tendencias actuales en educación matemática inciden en la idoneidad de propuestas que integran contenidos, conocimientos y procedimientos de dos o más áreas del conocimiento. Como ejemplo de esta línea, podemos destacar las propuestas STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas), que promueven elementos clave en el aprendizaje como la investigación basada en proyectos o el trabajo colaborativo (BLANCO et al., 2021, ZAMORANO ESCALONA et al., 2018).

Dentro de las diferentes modalidades de propuestas STEAM, aquellas que exploran la conexión entre arte y matemáticas presentan ventajas específicas, como incentivar el interés de los estudiantes por las manifestaciones culturales, favorecer discusiones matemáticas fructíferas que ayuden a comprender y consolidar conocimientos matemáticos abstractos (BLANCO et al., 2020; PORTAANKORVA-KOIVISTO & HAVEA, 2019). Estas propuestas también contribuyen a que los estudiantes perciban las matemáticas como parte de la cultura, integradas en la realidad social (GARCÍA AGRA & RODRÍGUEZ TABOADA, 2019).

En este contexto se enmarca el presente trabajo. La propuesta está diseñada para estudiantes de Educación Secundaria (14-15 años), con la que se pretende trabajar contenidos y procedimientos propios de los sentidos espacial, de medición y socioafectivo a través del estudio del problema del recubrimiento del plano y la construcción de mosaicos. En la propuesta juegan un papel importante los recursos tecnológicos (PEÑA MECINA, 2018; STEEGMAN et

al., 2016), en particular del software de geometría dinámica GeoGebra, que contribuye a desarrollar procesos y habilidades propias de la competencia matemática, como la visualización, la argumentación, la formulación de conjeturas, la representación o la comunicación (DE ALBORNOZ TORRES, 2010; SAAVEDRA, 2020). Las ventajas de estos proyectos y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) también se tuvieron en cuenta para la elaboración de la propuesta a la hora de mejorar la motivación de los estudiantes hacia el trabajo matemático y el desarrollo de habilidades relacionadas con el ámbito socioafectivo de la dimensión del aprendizaje (BLANCO, 2012; LÓPEZ & ALBADALEJO, 2009; ORTEGA, 2005).

APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS STEAM

Un elemento curricular que, sin ser novedoso, cobra mucha relevancia en la propuesta es la situación de aprendizaje, descrita como "situaciones y actividades que implican el despliegue por parte de los estudiantes de acciones asociadas a habilidades clave y habilidades específicas". y que contribuyan a la adquisición y desarrollo de los mismos" (MEFP, 2022, p. 7). A pesar de que estas características no están recogidas en la definición contenida en la norma legal, las Administraciones educativas exigen que estas situaciones contengan varias tareas o actividades, que se desarrollen en contextos de la vida real y que su resolución implique la preparación del producto final. También se hace hincapié en la importancia de trabajar habilidades específicas en varias materias de forma conjunta y coordinada, lo que hace que el trabajo basado en situaciones de aprendizaje tenga características comunes con el trabajo basado en la metodología ABP (Aprendizaje Basado en Proyectos) (MARTÍN & MARTÍNEZ, 2018). Estas metodologías tienen en común que parten de un problema como elemento motivador, de la necesidad de utilizar herramientas y recursos propios del tema para su resolución y finalizan con el desarrollo de teorías que permiten abarcar el procedimiento utilizado para formalizar o generalizarlo en un concepto matemático. Considerando esta metodología, la elección de un buen problema es esencial para el éxito de la educación matemática (GRAAFF, 2003).

En el trabajo realizado por Martín y Martínez (2018) podemos encontrar estudios, realizados en los últimos 30 años, que revelan evidencia de las ventajas de la metodología ABP a la hora de desarrollar habilidades propias de la competencia matemática y generar una mejor retención de conocimientos a largo plazo. La idoneidad de la metodología de trabajo por

proyectos para mejorar la motivación de los estudiantes y su predisposición a aprender matemáticas también es defendida por Batanero y Díaz (2011). Estas autoras se centran en la diferencia que supone para los estudiantes el uso de conceptos y propiedades matemáticas en situaciones reales y contextualizadas, frente al trabajo rutinario habitual en las aulas tradicionales. Arce et al. (2022) y Diego-Mantecón et al. (2021) también resaltan la importancia de la metodología ABP en el caso particular de los proyectos STEAM para la generación de conexiones entre las matemáticas y otras áreas del conocimiento y la realidad, lo que da una dimensión más completa y real de qué son las matemáticas, de cómo crean y surgen nuevos conceptos para responder a problemas complejos.

Dentro de las posibilidades que ofrecen los proyectos STEAM, la conexión entre arte y matemáticas contribuye a desarrollar capacidades como la imaginación, la toma de decisiones, la capacidad de innovar y la participación en el aula (BLANCO et al., 2021; ORTEGA, 2005). Estas ventajas se complementan perfectamente con las derivadas del uso de los recursos TIC. Según el NCTM (2000), la tecnología es un elemento fundamental en la práctica y enseñanza de las matemáticas, y con su ayuda y uso adecuado de ella, los estudiantes deberían aprender más matemáticas y con mayor profundidad. Además de los argumentos que, a su juicio, respaldan esta importancia de la tecnología en el aula, existe la necesidad de formar a los profesores para que puedan utilizar estas herramientas de forma óptima y modificar tanto las matemáticas que enseñamos como la forma en que las enseñamos, garantizando que el uso de las TIC no se limite a la realización más rápida de cálculos complejos. Estudios como el de Grisales Aguirre (2018) y López y Albadalejo (2019) destacan la mejora de algunos aspectos relacionados con la competencia matemática al trabajar actividades a través de recursos y entornos tecnológicos. Por ejemplo, López y Albadalejo (2019) se centran en la mejora producida en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas y las actividades propuestas, especialmente significativa en los estudiantes que mostraron un mayor desinterés por la materia. Estas mejoras también son evidentes en otros aspectos cognitivos y de razonamiento, como la flexibilidad de pensamiento, la creatividad o la argumentación.

MOSAICOS PARA EL ESTUDIO DE LAS ISOMETRÍAS EN EL PLANO

El uso de las creaciones artísticas como contexto para la introducción, construcción y estudio de conceptos matemáticos resulta especialmente adecuado cuando hablamos de conceptos geométricos. La belleza de las manifestaciones artísticas es una motivación adicional

para los estudiantes a la hora de afrontar la resolución de una actividad matemática como puede ser, por ejemplo, la construcción y estudio de mosaicos (BLANCO et al., 2020; BLANCO et al., 2021; SÁEZ, 2022; URIBE GARZÓN et al., 2014). Además, atendiendo al componente socioafectivo de la educación matemática (MARBÁN, 2016; SILVA et al., 2020), el hecho de poder crear obras artísticas a partir de los conocimientos matemáticos adquiridos aportará a los estudiantes una nueva dimensión, proporcionando una mayor conexión emocional con los conceptos y procedimientos trabajados (FLORES et al., 2015). En ese sentido, García Agra y Rodríguez Taboada (2020) exploran la presencia de la geometría en diferentes creaciones artísticas, incluidos los mosaicos, haciendo hincapié aspectos no habitualmente asociados a la práctica matemática, como la creatividad y la búsqueda de la belleza.

En particular, Jaime y Gutiérrez (1990) hacen varias referencias a la idoneidad de los mosaicos planos y teselados y revestimientos como herramienta para el estudio de isometrías planas, sirviendo como actividad integradora de los conceptos matemáticos implicados en su construcción y análisis. En un análisis más específico de las posibilidades de los mosaicos de Escher para su uso en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, Gutiérrez (2005) incluye actividades que les permiten trabajar desde una perspectiva más centrada en la manipulación y la experimentación, con la ayuda de recursos tecnológicos adecuados o desde una perspectiva más formal.

En su propuesta, Mazzitelli (2018) insiste en las posibilidades de trabajar con mosaicos a la hora de desarrollar habilidades geométricas básicas en los estudiantes, partiendo de que todas las personas son capaces de ver obras artísticas, pero no de saber interpretarlas, por lo que es necesario un proceso de aprendizaje. Estas habilidades básicas incluyen, entre otras, habilidades de razonamiento y argumentación, comunicación, construcción y modelado. Todos ellos están directamente relacionados con los procesos matemáticos y, por tanto, con las habilidades específicas de esta materia.

METODOLOGÍA

El principal objetivo de este proyecto es mostrar a los estudiantes cómo la geometría permite utilizar elementos artísticos y crear belleza al mismo tiempo que resuelve problemas como el revestimiento regular de una superficie plana. La elección del estudio de los mosaicos como contexto sobre el que desarrollar la actividad obedece a la necesidad de romper la dicotomía ciencia o letras en los estudiantes, evidenciando la presencia de elementos

matemáticos en entornos a priori asociados a materias y áreas no científicas. Siguiendo a García Agra y Rodríguez Taboada (2020), interesa también que el alumnado valore la creatividad y la búsqueda de la belleza como aspectos relevantes en el quehacer matemático.

El estudio es de corte cualitativo formado por una muestra de 17 estudiantes de secundaria (14-15 años). El enfoque pedagógico se basa en varios aspectos fundamentales. En primer lugar, busca promover un aprendizaje significativo, donde los estudiantes construyen su propio conocimiento a partir de una actividad inicial de indagación y conexión con conceptos previos. Además, se prioriza la resolución de problemas como eje central del proceso de enseñanza-aprendizaje, proporcionando a los estudiantes estrategias trasladables a situaciones matemáticas y de la vida real. Se integran recursos TIC para modelar, conjeturar, comprobar y representar. Siguiendo las indicaciones de la metodología ABP, se fomenta el desarrollo de la autonomía de los estudiantes, permitiéndoles tomar decisiones y elegir los recursos adecuados para resolver los problemas propuestos. Se valora la comunicación como un proceso fundamental en el razonamiento matemático, promoviendo un ambiente de trabajo en el que se explica, argumenta y justifica, sin centrarse únicamente en el resultado correcto, sino valorando todas las intervenciones de los estudiantes (MARTÍN & MARTÍNEZ, 2018).

DISEÑO

La propuesta está diseñada siguiendo las indicaciones de Escalona et al. (2018) para la construcción de una actividad STEAM, donde el alumno es el protagonista y el profesor actúa como simple guía. El rol del docente se centrará más en hacer buenas preguntas que en dar respuestas de manera inmediata, ayudando y guiando el camino de los estudiantes hacia la construcción de su conocimiento con pistas. De esta forma se consigue que sean los alumnos quienes descubran o intuyan las propiedades, relaciones, patrones y conceptos ocultos en el proceso de resolución de las tareas, realizando el profesor un trabajo final de formalización y fijación de los mismos.

Teniendo en cuenta que el uso de materiales y recursos variados enriquece la comprensión de un determinado concepto al proporcionar a los estudiantes diferentes modelos del mismo (Arce et al., 2022), para el desarrollo de este proyecto contaremos con los siguientes recursos: Software Mathigon (<https://es.mathigon.org/>), Polypad (<https://es.mathigon.org/polypad>), Software específico para el estudio de la geometría,

concretamente GeoGebra (<https://www.GeoGebra.org/>), maquetas en plástico o madera de las principales formas elementales bidimensionales y material de papelería.

El tiempo previsto para la implementación de esta propuesta es de cinco sesiones presenciales, de cincuenta minutos de duración, donde los estudiantes trabajan en parejas. En la Tabla 1 se muestra un esquema de los contenidos y recursos que se utilizan en cada una de las sesiones. Nos apoyamos en el modelo de aprendizaje de geometría de Van Hiele (Van Hiele, 1986) para que los estudiantes avancen por las fases de discernimiento, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración hasta llegar a la formalización y clasificación de las formas y movimientos en el plano.

Tabla 1. Estructura de la propuesta

Sesión	Contenidos	Recursos	Fases Van Hiele
1	Figuras planas. Ángulos interiores. Mosaicos regulares e semirregulares.	Equipos informáticos Material manipulativo Mathigon, Polypad GeoGebra	Discernimiento
2	Translación, vector de translación.	Equipos informáticos Polypad GeoGebra	Orientación dirigida y explicación
3	Rotación. Centro y amplitud de una rotación.	Equipos informáticos GeoGebra	Orientación dirigida y explicación
4 e 5	Figuras planas, coordenadas cartesianas, translaciones y giros.	Equipos informáticos GeoGebra Polypad Ferramentas de debuxo	Orientación libre e integración

Elaboración propia.

INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS

Como instrumentos de análisis se utiliza un cuestionario de valoración de los estudiantes de la propuesta y la guía de coevaluación. El cuestionario de valoración consta de 6 items, formulados como afirmaciones y valorados bajo una escala Likert de 1 (muy en desacuerdo) a 4 (muy de acuerdo), salvo el item 2 que he de respuesta dicotómica. El cuestionario se responde anónimamente de forma online (<https://docs.google.com/forms/d/1bWUQRZ->

qcnwIXTdHN9HjuIzi8iEkDUBU8F7-WBChzgc/edit?pli=1). Siguiendo con una dinámica de favorecer la comunicación, este cuestionario se acompaña de un breve diálogo que permite al docente conocer las impresiones y sensaciones del alumnado ante la propuesta.

La guía de coevaluación se crea siguiendo a Chamoso et al. (2022) quienes consideran que la evaluación aparece como un elemento del proceso formativo, que permite no sólo saber en qué punto de este proceso se halla cada estudiante sino también identificar dificultades y tomar decisiones sobre la tarea o actividad, modificándola o aplicando ampliaciones o refuerzos. Es desde esta perspectiva desde la que se debe entender la coevaluación integrada en este proyecto: no se trata de que el alumnado ponga una nota al trabajo de sus compañeros, sino que se busca que todas las personas implicadas, el autor del trabajo evaluado y el evaluador, reflexionen sobre la tarea, sobre los contenidos y competencias puestos en juego y su comprensión y manejo de los mismos. La guía de coevaluación recoge los siguientes indicadores: i1) la tesela recubre el plano, i2) centro de rotación, i3) amplitud de la rotación, i4) simetría, i5) parte de un polígono que recubre el plano y i6) similitud descripción con figura.

ANÁLISIS DEL PROYECTO

En este apartado se analiza el desarrollo del proyecto a través de cada una de las sesiones, conectando y apoyando los resultados del análisis con investigaciones anteriores. También se analiza la coevaluación llevada a cabo.

Desarrollo de las sesiones

En la primera sesión, de carácter introductorio, se presentan imágenes de mosaicos sin ahondar en contenidos matemáticos. Se pretende estimular la curiosidad del alumnado por conocer cómo las matemáticas contribuyeron a la creación de esas obras. Posteriormente los estudiantes experimentaron e investigaron cómo crear mosaicos con material manipulativo y Polypad (Figura 1). En la puesta en común, los estudiantes argumentan y justifican qué piezas recubren o no el plano. Las primeras justificaciones del alumnado aludían a propiedades como la paridad de los lados o que los lados no podían superar un cierto número, lo que se ajusta a los resultados obtenidos en la investigación realizada por Gutiérrez (2005). Después de un tiempo de reflexión, los estudiantes centraron su atención en los ángulos interiores, lo que los llevó hacia la propiedad matemática buscada.

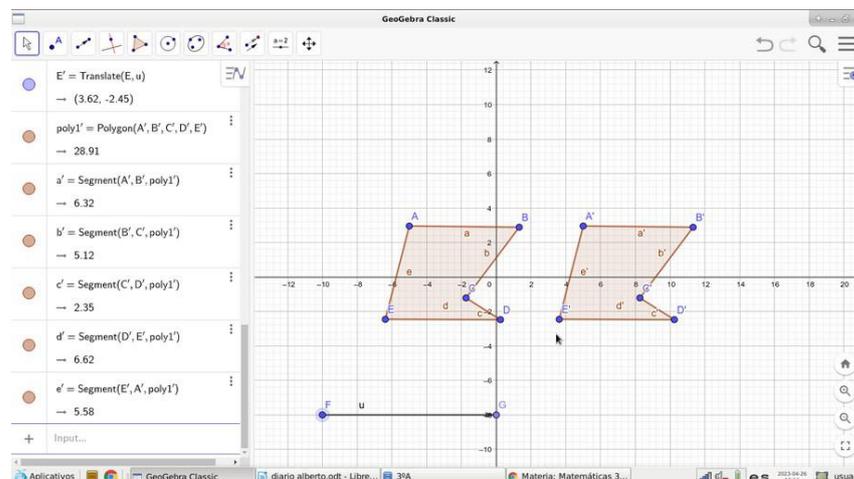
Figura 1. Estudiantes experimentando el recubrimiento del plano con Polypad.



Elaboración propia.

En la segunda sesión se introduce el concepto de transformación, isometría y, en particular, traslación. La idea intuitiva de la traslación fue entendida fácilmente por todos los estudiantes, viendo la necesidad de tener un elemento que nos indique dónde queremos mover el objeto, es decir, el vector de traslación. A pesar de que era la primera vez que los alumnos entraban en contacto con este concepto matemático, el hecho de trabajarlo con ejemplos concretos les ayudó a comprenderlo. Posteriormente, el trabajo de cada pareja comenzó con GeoGebra (ver ejemplo en la Figura 2), en el que encontraron algunos obstáculos, unas veces relacionados con su habilidad en el manejo de la herramienta y otras con la comprensión de los conocimientos matemáticos trabajados, fundamentalmente del vector de traslación, al igual que recogen López y Albaladejo (2009). Estos obstáculos provocaron diálogos entre los estudiantes que contribuyeron a afianzar el concepto de traslación y a hacer más visibles las matemáticas que habían visto en la sesión anterior.

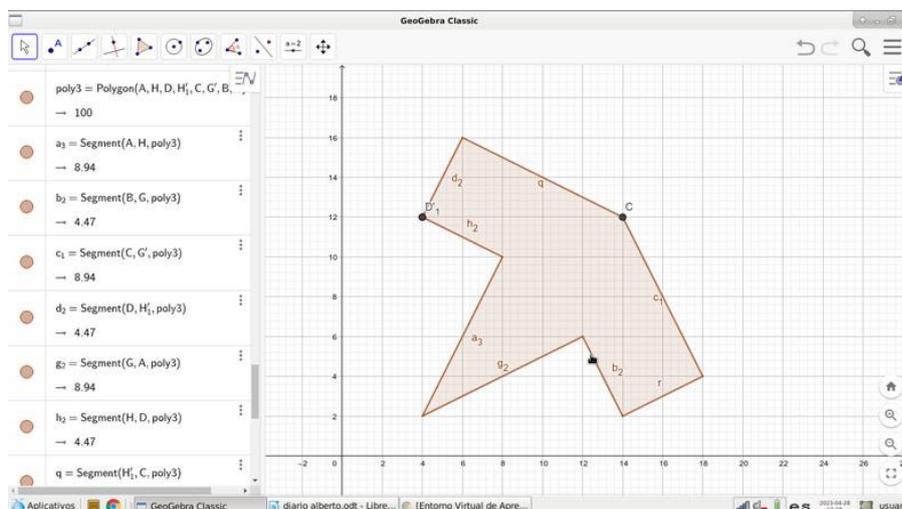
Figura 2. Translación con GeoGebra.



Elaboración propia.

En la tercera sesión el trabajo fue semejante a la de la anterior, aunque en este caso el concepto introducido fue lo de rotación, centro y amplitud del giro. Comprendieron la necesidad de fijar cada uno de estos elementos para conocer la rotación y también la importancia de definir el sentido de giro. En este sentido es importante señalar que la herramienta TIC fue de mucha ayuda, pues para la realización de un giro pide al usuario que defina uno a uno estos elementos de manera muy intuitiva. Una vez conocido el concepto y habiendo realizado alguna práctica sencilla con GeoGebra, todas las parejas realizaron de manera guiada la creación de una tesela de la Alhambra que implicaba el uso de rotaciones (Figura 3). Todo el alumnado consiguió seguir las indicaciones del profesor y llegar a finalizar la construcción propuesta.

Figura 3. Clavo nazarí en GeoGebra.

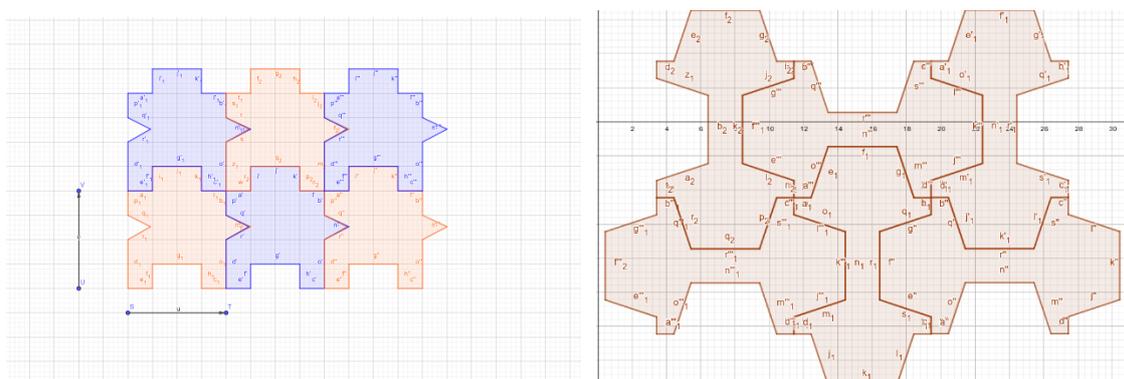


Elaboración propia.

La cuarta y quinta sesión constituyeron el foco principal de la propuesta, que consiste en el diseño de una o dos teselas que permitieran recubrir el plano. Siguiendo a Blanco et al. (2021) y Diego-Mantecón et al. (2021), la creación de un producto final es fundamental en la metodología basada en proyectos STEAM para favorecer el interés en el aprendizaje.

En particular, en la cuarta sesión, el alumnado comenzó el trabajo de indagación, que difirió sensiblemente de unos grupos a otros. Algunos grupos buscaron ejemplos de teselas en Internet que les pudieran dar ideas y otros se mostraron especialmente preocupados por la parte estética, valorando la belleza del producto final mediante bocetos que ellos mismos hacían en el cuaderno. En la quinta sesión, una vez las teselas se fueron definiendo en la anterior, el alumnado empezó con la modelización del mosaico con la ayuda del GeoGebra. En algún grupo, la forma elegida resultaba bastante complicada para reproducir con el GeoGebra, lo que los llevó a simplificar la idea inicial sustituyendo algún arco de circunferencia por líneas poligonales. Al final de la quinta sesión todos los grupos finalizaron el trabajo, a pesar de que algunos necesitaron de tiempo extra fuera del aula para la elaboración del mosaico completo. En la Figura 7 se muestran dos ejemplos de las producciones del alumnado, el de la izquierda es un ejemplo de las teselas más simples, donde se parte de un cuadrado al que se le quita un pequeño triángulo y un rectángulo que recolocan para crear esa nueva tesela, siguiendo el método de formación de teselas a partir de polígonos regulares que recubren el plano. El ejemplo de la derecha, en la Figura 4, más complicado, imita la conocida tesela ‘hueso’ de la Alhambra.

Figura 4. Ejemplos de mosaicos hechos por los estudiantes.



Elaboración propia.

COEVALUACIÓN

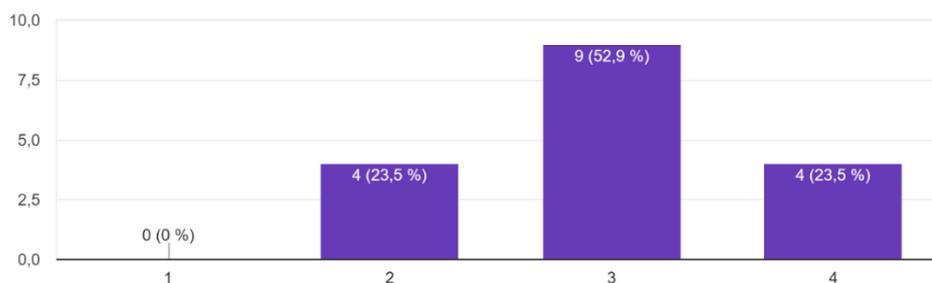
En algunas sesiones se incluyeron tareas que debían ser evaluadas por el otro miembro del grupo, siguiendo la guía de coevaluación que incluye cinco ítems, como se ha descrito en la sección 3.2 y que sólo admite dos opciones: logrado o no logrado. Esta evaluación fue revisada posteriormente por el docente, lo que sirvió para conocer aspectos de la situación del proceso de aprendizaje en cada alumno. La claridad y sencillez de la guía contribuyó a que todo el alumnado pudiese realizar esta coevaluación sin problema. Este procedimiento ayudó a detectar algunas dificultades de comprensión, principalmente para describir con precisión el centro del giro (i2) o la amplitud del ángulo de rotación (i3).

CUESTIONARIO DE VALORACIÓN DE LOS ESTUDIANTES

A pesar de que el estudio tiene carácter cualitativo, dado lo reducida que es la muestra, mostraremos en este apartado un análisis descriptivo de las respuestas del alumnado a cada uno de los seis ítems de que consta el cuestionario de valoración de los estudiantes. La presentación se va a hacer agrupando aquellos ítems que hacen alusión al uso de la tecnología en general, ítem 1, ítem 3 e ítem 4. El ítem 2 hace referencia al caso particular del GeoGebra como software tecnológico y los Ítem 5 y 6 se centran en los Mosaicos como soporte para trabajar las isometrías. En la línea de Martín y Martínez (2018), se acompañan estos resultados de comentarios de los alumnos, fruto del intercambio de comunicación entre profesorado y alumnado.

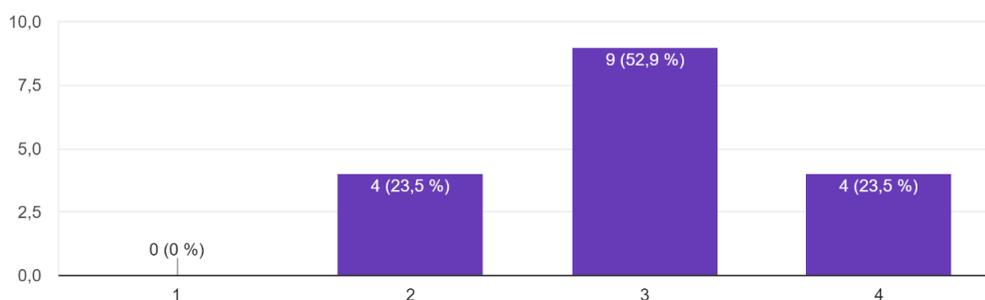
Respecto a aquellos ítems centrados en la tecnología, las respuestas dadas tanto para el ítem 1 como para el ítem 4 fueron las mismas, como se puede observar en la Figuras 5 y la Figura 6. Los resultados muestran que el 76,4% están de acuerdo o muy de acuerdo con la afirmación de que el uso de recursos TIC en el aula les ayuda a entender mejor los conceptos matemáticos y con la afirmación de que los recursos TIC se deberían utilizarse habitualmente en el aula de matemáticas.

Figura 5. Ítem 1: Los recursos TIC en el aula me ayudan a entender mejor los conceptos matemáticos.



Elaboración propia.

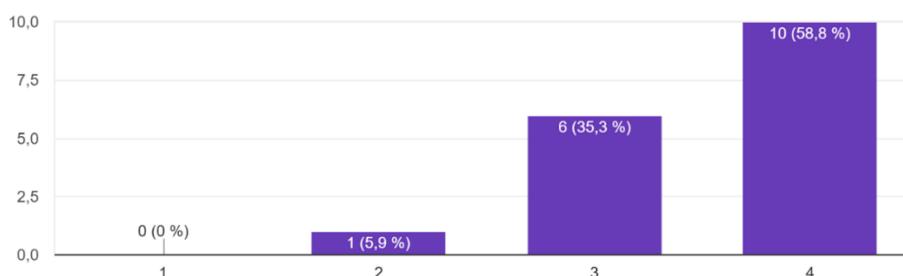
Figura 6. Ítem 4: Considero que los recursos TIC se deberían utilizar habitualmente en el aula de matemáticas.



Elaboración propia.

El ítem 3 incorpora la componente socioafectiva al preguntar por la sensación del alumnado al trabajar con tecnología en grupo. La distribución de respuestas (Figura 7) muestra que el 94,1% del alumnado está de acuerdo o muy de acuerdo con la sensación de comodidad cuando resuelve actividades en grupo con ayuda de la tecnología.

Figura 7. Ítem 3: Me siento cómodo/a en la clase cuando resuelvo actividades en grupo con ayuda de la tecnología.

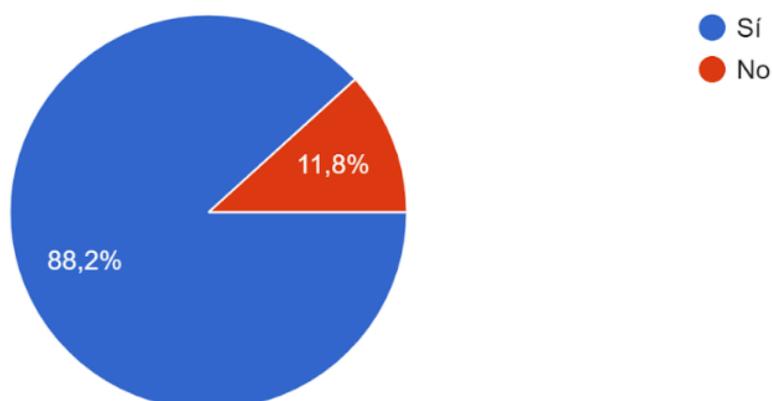


Elaboración propia.

En el ítem 2 el alumnado debía considerar si el uso del GeoGebra era beneficioso para ellos, pidiendo además una breve justificación de la respuesta. Un porcentaje alto del alumnado (82%) respondió afirmativamente, como puede observarse en la Figura 8. Algunas de las justificaciones aportadas por el alumnado fueron las siguientes:

- ‘Ayuda a entender las matemáticas de manera más interactiva’
- ‘Puedes crear y experimentar con muchas cosas, como figuras y funciones’
- ‘Es una herramienta útil para hacer cosas que son complicadas en papel’
- ‘Es más fácil visualizar y la clase se hace más divertida’
- ‘Gracias a GeoGebra soy capaz de desarrollarme mejor en matemáticas’.

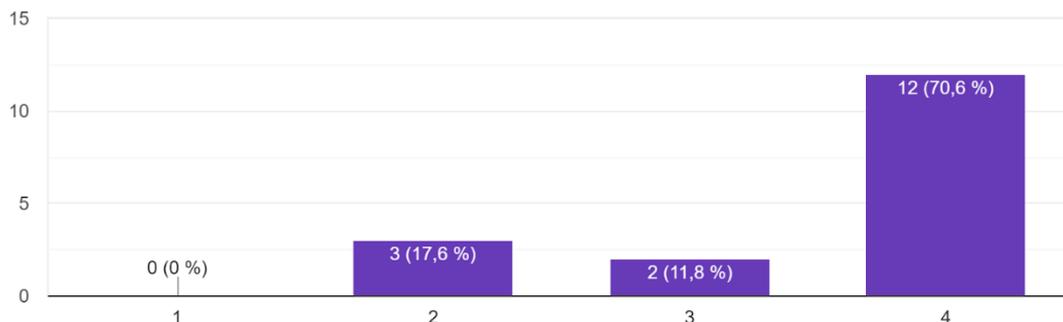
Figura 8. Ítem 2: Creo que el uso del GeoGebra en clase de matemáticas es beneficioso para mí.



Elaboración propia.

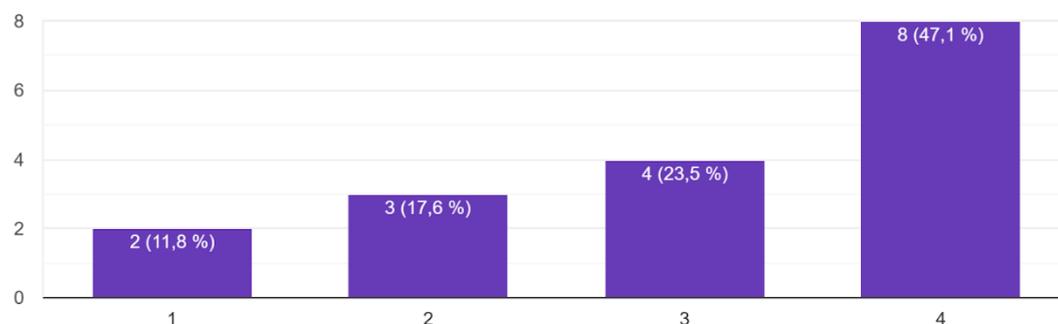
En los ítems 5 y 6, se preguntó al alumnado si consideraba que el proyecto sobre los mosaicos contribuyó a su comprensión de las isometrías en el plano y a conocer una perspectiva diferente de las matemáticas, respectivamente. Se obtuvieron resultados muy positivos en ambos ítems, tal y como se muestra en las Figuras 9 y 10.

Figura 9. Ítem 5: Considero que trabajar sobre los mosaicos me ayudó a entender los conceptos de traslación, simetría y giro.



Elaboración propia.

Figura 10. Ítem 6: Considero que la actividad de mosaicos me ayudó a conocer las matemáticas desde una perspectiva diferente.



Elaboración propia.

Un análisis global de los resultados del cuestionario indica que una gran parte del alumnado valora positivamente aspectos claves de esta propuesta como el uso de las TIC, el trabajo colaborativo y el uso de los mosaicos como contexto desde lo que abordar conceptos matemáticos como los relacionados con las isometrías del plano. A pesar de la escasa duración de este proyecto, todos y todas se vieron muy implicados y manifestaron una actitud positiva hacia la propuesta y una buena motivación, considerando que las clases fueron divertidas y dinámicas.

CONCLUSIONES

Este trabajo presenta una propuesta didáctica con una serie de objetivos relacionados con diferentes aspectos de la educación matemática. Por un lado, trabajar en un contexto real, propio de STEAM, para mejorar la comprensión de las matemáticas y su conexión con otras áreas y con la realidad. Por otro lado, está el uso de las TIC en la búsqueda de modificar la

rutina laboral promovida por la enseñanza tradicional, en la búsqueda de desarrollar capacidades y habilidades asociadas a los procesos del pensamiento matemático. La tercera y última línea contemplada en los objetivos de la propuesta estaría relacionada con el componente socioafectivo del aprendizaje, buscando una mejora en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, la gestión del error, el respeto y aceptación de las aportaciones de los demás y el trabajo colaborativo.

El trabajo de una propuesta STEAM enmarcada en la conexión arte-matemática se mostró como un contexto ideal para introducir, estudiar y analizar los contenidos matemáticos relacionados con las isometrías en el plano. El trabajo con creaciones artísticas fue una motivación extra para los estudiantes desde el primer momento, la posibilidad de poder crear su propia obra de arte representó un desafío que hizo que los estudiantes se involucraran con la propuesta.

La observación del trabajo diario de los estudiantes, las discusiones conjuntas, los diferentes diálogos y el análisis de los productos elaborados permiten recoger el desarrollo de habilidades como la argumentación, la reflexión, el razonamiento espacial, el uso de diferentes representaciones de objetos matemáticos, comunicación y comprensión de los conceptos trabajados. La organización del aula y las actividades de la propuesta promovieron la participación activa de todos los estudiantes, incluso de aquellas personas con menor confianza en sus habilidades y conocimientos.

Tanto los productos elaborados por los estudiantes como su valoración final, recogida en el cuestionario, nos muestran que los objetivos fueron ampliamente alcanzados, y explicitaron las ventajas del uso de las TIC y del uso de la metodología ABP. Estas ventajas son especialmente relevantes en los aspectos socioafectivos, pues en todo momento el alumnado mostró una actitud positiva, curiosidad e interés por la importancia de las matemáticas para comprender la realidad. También se pudo observar, en cada una de las sesiones, cómo esta metodología impacta positivamente en las relaciones interpersonales dentro del aula, mejorando la comunicación entre los alumnos y entre estos y el profesor, aprendiendo a valorar todas las intervenciones de los compañeros.

Como trabajo futuro, sería interesante profundizar en las posibilidades de este proyecto STEAM involucrando a más alumnado para ampliar la muestra y a profesores de otras materias, especialmente de Educación Plástica, para trabajar los aspectos artísticos de los mosaicos. Desde el punto de vista de la tecnología, se podría hacer uso de la impresión 3D para crear

teselas y construir mosaicos físicos. Desde un punto de vista más avanzado de la investigación, se podría analizar la idoneidad didáctica del proyecto y aplicar cuestionarios validados sobre el uso de las tecnologías y sobre el dominio afectivo en matemáticas.

Agradecimientos

Plan Estatal de Investigación Científica, Técnica y de Innovación 2021-2023.
Referencia PID2021-122326OB-I00.

REFERENCIAS

ARCE, M., ARNAL, M., CONEJO, L., GARCÍA, I., & MÉNDEZ, M. Matemáticas transversales. En L., Blanco, N., Climent, M.T., González-Astudillo, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro, y C. Jiménez-Gestal. (eds.). **Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática**. Editorial Universidad de Granada. 2022. 530p.

BATANERO, C., & DÍAZ, C. **Estadística con proyectos**. ReproDigital. Facultad de Ciencias, 2021. 278p.

BLANCO, L. J. Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En N. Planas (Ed.), **Teoría, crítica y práctica de la educación matemática** Graó. 2012. Cap. 9, p. 171-185.

BLANCO, T. F., ÍNSUA, S. V., & ROEL, V. G. (2020). Diseño de una propuesta STEAM para crear un rosetón. Análisis en un contexto de inclusión. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo Entre Las Ciencias**, vol. 9, n. 1, p. 241-268 <https://doi.org/10.22481/rbba.v9i1.6536>

BLANCO, T. F., GONZÁLEZ-ROEL, V., DIEGO-MANTECÓN, J. M., & ORTIZ-LASO, Z. Análisis de la conexión arte-matemáticas en los libros de texto de Educación Primaria. **Educación matemática**, v.33, n. 3, p. 67-93, 2021.

DE ALBORNOZ TORRES, A. C. GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. **Unión-revista iberoamericana de educación matemática**, vol. 6, n. 23, 2010.

CHAMOSO, J. M, CÁCERES, M. J. Y CÁRDENAS, J. A. La evaluación en Matemáticas. En L., Blanco, N., Climent, M.T., González-Astudillo, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro, y C. Jiménez-Gestal. (eds.). **Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática**. Editorial Universidad de Granada. 2022. 530p.

DIEGO-MANTECÓN, J. M., BLANCO, T. F., ORTIZ-LASO, Z., & LAVICZA, Z. Proyectos STEAM con formato KIKS para el desarrollo de competencias clave. **Comunicar**, vol. 66, p. 33-43. 2021.

FLORES, P., RAMÍREZ, R., & DEL RÍO, A. (2015). Sentido Espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), **Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria**. Pirámide. 2015. p. 127-146.

GARCÍA AGRA, P. & RODRÍGUEZ TABOADA, J. A. **Las Matemáticas del Arte. Más allá del número de oro**. Editorial Catarata. 2019. 98p.

GRAAFF, E. DE & KOLMOS, A. CharacterisTIC of problem-based learning. **International Journal of Engineering Education**, v. 19, n. 5, p. 657-662, 2003.

GRISALES-AGUIRRE, A. M. Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. **Entramado**, v. 14, n. 2, p.198-214, 2018.

GUTIÉRREZ, A. Los cubrimientos de Escher en la enseñanza de las isometrías del plano, **Integra+**, p.15-28, 2005.

LÓPEZ, M. D. M. G., & ALBALADEJO, I. M. R. Influencia de las nuevas tecnologías en la evolución del aprendizaje y las actitudes matemáticas de estudiantes de secundaria. **Electronic Journal of Research in Educational Psychology**, v. 7, n. 1, p. 369-396, 2009.

MARBÁN, J.M. Matemáticas y el dominio afectivo. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L.González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruíz, T. Fernández e A. Berciano (Eds.), **INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XX**. Universidade de Granada, SEIEM. 2016, p. 69-74.

MARTÍN, J. G., & MARTÍNEZ, J. E. P. Aprendizaje basado en proyectos: método para el diseño de actividades. **Revista Tecnología, Ciencia y Educación**, p. 37-63, 2018.

MAZZITELLI, M. J. Desarrollo de habilidades básicas a través del estudio de mosaicos. En Lestón, Patricia (Ed.), **ACTAS DE LA XII CONFERENCIA ARGENTINA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**. Buenos Aires, Argentina: SOAREM. 2018, p. 631-637.

MEFP (Ministerio de Educación y Formación Profesional). **Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria**. MEFP. España. 2022.

NCTM. *Principles and standards for school mathemaTIC*. Versión castellana: Principios y estándares para la educación matemática. Traducción y edición realizada por **SAEM Thales**. Sevilla, 2003.

ORTEGA, T. **Conexiones matemáticas: motivación del alumnado y competencia matemática**. Graó. 2005. 212p.

PEÑA MECINA, A. **Enseñanza de la geometría con TIC en Educación Secundaria Obligatoria**. 2010. Tesis doctoral. Madrid. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Facultad de Educación.

PORTAANKORVA-KOIVISTO, P. & HAVINGA, M. (2019). Integrative phenomena in visual arts and mathematics. **Journal of Mathematics and the Arts**, v. 13, n2, p.4-24, 2019.

SAAVEDRA, J. C. M. GeoGebra como herramienta de transformación educativa en Matemática. **Mamakuna**, n. 14, p. 70-81. 2020.

SÁEZ, A. J. P. Mathigon, el patio de juegos matemático. **Uno: Revista de didáctica de las matemáticas**, n. 98, p.1003-1003, 2022.

SILVA, J. E. R., GUSMÃO, T. C. R. S., & DORIA, M. C. F. Percepciones y reacciones de profesores y alumnos frente a las emociones en la clase de matemáticas. **Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo Entre Las Ciencias**, vol. 8, n. 2, p. 95-109. 2020. <https://doi.org/10.22481/rbba.v8i2.6265>

URIBE GARZÓN, S. M., CÁRDENAS FORERO, Ó. L., & BECERRA MARTÍNEZ, J. F. Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. **Educación matemática**, v. 26, n. 2, p. 135-160. 2014.

STEEGMAN, C., PÉREZ-BONILLA, A., PRAT, M., & JUAN, A. A. Math-Elearning@ cat: factores claves del uso de las TIC en educación matemática secundaria. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 19, n. 3, p. 287-310. 2016.

VAN HIELE, P. M. **Structure and insight: A theory of mathemaTIC education**. Academic press.1986.

ZAMORANO ESCALONA, T., GARCÍA CARTAGENA, Y. & REYES GONZÁLEZ, D. Educación para el sujeto del siglo XXI: principales características del enfoque STEAM desde la mirada educacional. **Contextos: Estudios De Humanidades Y Ciencias Sociales**, n. 41. Recuperado a partir de <http://revistas.umce.cl/index.php/contextos/article/view/1395>.