VIÑETAS CONCEPTUALES PARA LA ENSEÑANZA DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

VINHETAS CONCEITUAIS PARA O ENSINO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

CONCEPTUAL VIGNETTES FOR TEACHING DIDACTICS OF MATHEMATICS

DOI: 10.22481/rbba.v13i01.14230

Cristina Ochoviet
Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9069-3469
Dirección electrónica: cristinaochoviet@gmail.com

Sebastián Parodi
Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9663-3990
Dirección electrónica: Parodiseb@gmail.com

RESUMEN
Exploramos el potencial de una secuencia de viñetas conceptuales para la enseñanza y el aprendizaje de resultados de investigación relativos a la comprensión del signo igual en la entrada al algebra. Diseñamos una secuencia de tres viñetas conceptuales, con base en evidencia empírica, adaptada para la enseñanza de resultados de investigación. Participa un grupo de clase integrado por cinco futuras profesoras de matemática que cursan el cuarto y último año de la carrera de profesor en un instituto de formación docente de Uruguay. Implementamos la secuencia de viñetas conceptuales en una sesión de trabajo de 120 minutos dirigida a todo el grupo. Las participantes evidencian un progreso respecto de

Submissão: 28/12/2024 Aprovação: 06/06/2024 Publicação: 16/06/2024

la comprensión de que algunos entendimientos del signo igual pueden interferir en el aprendizaje del álgebra. La secuencia de viñetas conceptuales favoreció el entendimiento de resultados de investigación sobre la comprensión del signo igual en la entrada al álgebra; más estudios se requieren para profundizar en esta línea de investigación.

Palabras clave: Viñetas conceptuales. Enseñanza de la didáctica. Resultados de investigación. Formación de profesores.

RESUMO

Explorar o potencial de uma sequência de vinhetas conceituais para o ensino e a aprendizagem de resultados de pesquisas relacionadas à compreensão do sinal de igualdade na entrada à álgebra. Projetamos uma sequência de três vinhetas conceituais, baseadas em evidências empíricas, adaptadas para o ensino de resultados de pesquisas. Participa uma turma de cinco estudantes de ensino de matemática que cursam o quarto e último ano da carreira docente em um instituto de formação de professores no Uruguai. Implementamos a sequência de vinhetas conceituais em uma sessão de trabalho de 120 minutos dirigida a todo o grupo. Os participantes demonstram avanços quanto à compreensão de que alguns entendimentos do sinal de igualdade podem interferir na aprendizagem da álgebra. A sequência de vinhetas conceituais favoreceu a compreensão de resultados de pesquisas sobre o entendimento do sinal de igualdade na entrada da álgebra. São necessários mais estudos para aprofundar esta linha de pesquisa.

Palavras-chave: Vinhetas conceituais. Ensino de didática. Resultados de pesquisa. Formação de professores.

ABSTRACT

We explored the potential of a sequence of conceptual vignettes for the teaching and learning of research findings related to understanding the equals sign in algebraic entry. We designed a sequence of three conceptual vignettes based on empirical evidence adapted for teaching research findings. In their fourth and final year of a teaching program at a teacher training institute in Uruguay, a class group comprising five students specialising in mathematics education participated. We implemented the sequence of conceptual vignettes in a 120-minute working session with the entire group. The participants demonstrated progress in understanding that specific interpretations of the equals sign can interfere with learning algebra. The sequence of conceptual vignettes facilitated the understanding of research findings regarding the comprehension of the equals sign in algebraic entry. Further studies are required to delve deeper into this line of research.

Keywords: Concept cartoons. Teaching of didactics. Research results. Teacher training.

INTRODUCCIÓN

La formación de profesores de matemática demanda, en particular, la enseñanza de saberes propios del campo de la didáctica de la matemática. Existe amplia investigación acerca de la enseñanza de aspectos relativos a la práctica de la enseñanza de la matemática en la formación de profesores (BUCHBINDER; KUNTZE, 2018), pero ¿cómo enseñar la didáctica?

La didáctica de la matemática no solo refiere a saberes vinculados a las prácticas de enseñanza sino también a contenidos teóricos del campo, como, por ejemplo, el vasto contenido de las teorías y los resultados de investigación. Al respecto, Brousseau (2007) señala que "la enseñanza de la didáctica a los maestros en formación presenta dificultades que provienen del hecho de que la transposición didáctica de la didáctica misma es, todavía, un trabajo por hacer" (p. 117). En este sentido pretende aportar este trabajo.

Específicamente, nos propusimos diseñar y poner a prueba una secuencia de viñetas conceptuales (en adelante, CC, del inglés *Concept Cartoons*) para enseñar a futuros profesores (FP) de qué manera algunos entendimientos del signo igual pueden interferir en el aprendizaje del álgebra (KNUTH et al., 2008; PARODI et al., 2017; 2020). La secuencia consistió en una serie de tres CC (DOLYENKO et al., 2020; KEOGH et al., 2008) que fueron adaptadas para enseñar didáctica, mediante el abordaje de resultados de investigaciones previas (PARODI, 2016; PARODI, 2021). Nos preguntamos: ¿Qué aprendizaje promueve la implementación de una secuencia de CC diseñada para enseñar resultados de investigación sobre la comprensión del signo igual en la entrada al álgebra?

ANTECEDENTES TEMÁTICOS

Reportamos trabajos en los que se utilizan CC en el ámbito de la formación docente, para explorar el conocimiento del contenido o el conocimiento pedagógico del contenido (BALL et al., 2008) de los FP, las reacciones de estos frente a contingencias (ROWLAND et al., 2014) o el desarrollo de la mirada profesional (JACOBS et al., 2010).

Samková y Hošpesová (2015) investigaron cómo futuros maestros de primaria reaccionan frente a contingencias en situaciones matemáticas mediadas por CC para indagar qué aspectos del conocimiento matemático de los FP pueden investigarse usando ese recurso. Adoptaron la perspectiva del cuarteto de conocimientos (ROWLAND et al.; 2014). Participaron 64 docentes de primaria en formación. Se les entregaron cuatro CC sobre adición y sustracción en el conjunto de los números naturales y se les solicitó la opinión sobre las intervenciones de los personajes de las viñetas. Concluyeron que las CC resultaron ser herramientas flexibles para indagar el conocimiento matemático de los FP que permitieron distinguir entre conocimiento conceptual y procedimental, así como entre conocimiento didáctico del contenido y conocimiento del contenido. También permitieron evidenciar la dificultad de los participantes para decodificar errores en los procedimientos de los personajes de las CC. Destacan particularmente que las CC ofrecen la posibilidad de preparar el contenido de las burbujas intencionalmente, con un propósito elegido, a diferencia de otras herramientas de diagnóstico como videos o escenarios de aula. Destacan particularmente que las CC ofrecen la posibilidad de preparar el contenido de las burbujas intencionalmente, con un propósito elegido, a diferencia de otras herramientas de diagnóstico como videos o escenarios de aula.

Samková (2016) estudió la pertinencia del uso de CC como representaciones de la práctica y como una herramienta de diagnóstico en la formación de maestros de primaria tanto del conocimiento matemático como del conocimiento didáctico. Los participantes todavía no habían cursado la didáctica del proceso de formación. Para el diseño de las CC utilizó las de Keogh et al. (2008) y luego se modificaron basándose en la experiencia docente de uno de los autores, de sus colegas, en resultados de investigación y en libros de texto. Las CC abordaban contenidos matemáticos, como es habitual, y a los futuros maestros se les propusieron preguntas adicionales para responder con base en los contenidos de la CC. Se concluyó que las CC fueron adecuadas, por ejemplo, para indagar el conocimiento de los participantes sobre errores de los alumnos, distintas estrategias para resolver un problema, así como el conocimiento de diferentes representaciones y explicaciones a problemas estándar.

Samková (2018) comparó la información que brindan las CC y los problemas verbales estándar, respecto del tópico fracciones, cuando se utilizan como herramienta de diagnóstico del conocimiento matemático de los maestros en formación. Participaron dos grupos de futuros docentes de primaria: uno en República Checa y otro en Eslovenia. Primero se les entregaron problemas verbales sobre fracciones y luego se les entregó una CC de dificultad similar a uno de estos problemas. Los participantes trabajaron en forma individual y por escrito. Se reporta que tendían a resolver con éxito los problemas verbales, pero que evidenciaban una dificultad referida al entendimiento de la fracción como parte–todo al abordar la CC. Se concluyó que este estudio confirma el potencial de utilizar CC en la formación de futuros maestros, porque pueden proporcionar información sobre el conocimiento matemático de los futuros docentes de primaria que no podría obtenerse mediante el planteo de problemas verbales estándar.

Molfino y Ochoviet (2019) presentaron el diseño de dos actividades para la formación de FP, elaboradas a partir de reportes de investigación de la didáctica de la matemática. Participaron dos grupos de FP con grupo a cargo en la enseñanza secundaria, que estaban realizando el curso de didáctica correspondiente al cuarto y último año de la carrera de profesor. En uno de estos dos grupos se propuso el estudio de los aspectos conceptuales y metodológicos de las CC, mediante la lectura y el análisis de Keogh et al. (2008), así como una revisión de varios artículos relativos al potencial didáctico de este tipo de tarea (KEOGH; NAYLOR, 1996; NAYLOR; KEOGH, 2013; entre otros). Luego se les propuso el diseño y la implementación de una CC en sus respectivos grupos de práctica docente, un reporte de esa implementación y una narrativa sobre el aporte de este proceso para la profesión docente. Se reporta que los participantes conciben a las CC como un recurso potente para fomentar la conversación productiva en la clase, focalizar en los errores de los estudiantes y posibilitar una mayor comprensión de los conceptos. Concluyeron que este tipo de aproximaciones, en ámbitos de formación docente, posibilita la producción de conocimiento didáctico que resulta valioso para la práctica profesional del futuro profesor.

Friesen y Knox (2022) utilizaron viñetas con caricaturas para apoyar el aprendizaje de futuros docentes de primaria, con respecto a la resolución de problemas centrada en el uso de las estrategias empleadas por los estudiantes de primaria. Se puso en evidencia que los participantes percibieron que las viñetas con caricaturas constituyeron valiosas oportunidades de aprendizaje. Si bien permitieron profundizar en el análisis de las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes de primaria, esta tarea continúa siendo desafiante. Las viñetas con caricaturas que utilizaron presentan a un docente proponiendo un problema y a los estudiantes dando su respuesta a la situación planteada, a través de personajes con apariencia de caricatura. En ellas, el docente interviene apoyando el razonamiento de los estudiantes, concilian la reflexión sobre las estrategias de los estudiantes y sobre cómo retroalimentar el trabajo estudiantil. Concluyeron que las viñetas con caricaturas resultaron apropiadas para analizar situaciones de la práctica de aula y que ayudaron a los futuros maestros de primaria a conectar la práctica con la teoría donde el conocimiento del contenido y los estudiantes (BALL et al., 2008) resultó ser un requisito previo esencial para comprender esas conexiones y para tomar decisiones para intervenir en el proceso de aprendizaje.

Kuntze et al. (2022) utilizaron una CC para indagar las dificultades de futuros maestros para reaccionar y dar apoyo en el proceso de aprendizaje a alumnos de primaria, en el contexto de la divisibilidad, desde la perspectiva de la mirada profesional. Ofrecen evidencia sobre cómo los futuros maestros conciben ese apoyo al estudiante. Reportan que más de la mitad de los participantes evidenciaron déficit en el conocimiento del contenido. La intervención docente que predominó fue la de informar a los alumnos sobre reglas matemáticas o soluciones estándar y algoritmos. Los futuros maestros todavía se encontraban aprendiendo los contenidos de divisibilidad y se explica que ello podría estar incidiendo en la tendencia a evaluar reglas recién aprendidas y procedimientos estándar, ya sea de los estudiantes o de los personajes de la CC. Advierten que esto también podría evidenciar el modo en que los participantes comprenden la manera de apoyar a los alumnos en el proceso de aprendizaje. Finalmente, destacan el potencial de las CC para promover la mirada profesional en torno a contenidos matemáticos específicos en un nivel dado, análisis del pensamiento matemático de los alumnos y toma de decisiones para apoyar los procesos de aprendizaje.

MARCO CONCEPTUAL

Las CC han sido ampliamente utilizadas para enseñar matemática (KEOGH et al., 2008; NAYLOR; KEOGH, 2013), y también como instrumentos para analizar las reacciones de profesores en servicio y en formación ante situaciones matemáticas presentadas mediante ese recurso (KUNTZE et al., 2022). El uso de representaciones de la práctica, ya sea en formato de videoclips cortos, diálogos entre docentes y estudiantes o con dibujos animados, ha demostrado ser un enfoque eficaz en la formación docente y en la investigación de estos temas (BUCHBINDER; KUNTZE, 2018).

En este trabajo abordamos un tema poco explorado, que es la enseñanza del corpus de la didáctica de la matemática (OCHOVIET; OKTAC, 2011; FERNÁNDEZ et al., 2016), en particular, a través del uso de CC. Diversos trabajos intentan poner en relación aspectos teóricos provenientes de la didáctica con situaciones de la práctica de aula y para ello utilizan recursos didácticos que ofician como mediadores con la práctica, es decir, operan como representaciones de la práctica. En esos trabajos, el conocimiento teórico se considera dado previamente y no se explicita el modo en que los FP estudiaron ese conocimiento (por ejemplo, IVARS et al., 2017). Parecería inferirse que, o bien los formadores se lo han presentado, o bien los FP lo han leído por su cuenta. Como docentes formadores nos preguntamos cómo enseñar el corpus de la didáctica de la matemática y qué dispositivos deberían utilizarse para esa enseñanza.

Esbozamos una secuencia didáctica de CC para enseñar contenidos específicos de la didáctica de la matemática. Una CC para enseñar didáctica de la matemática (adaptado de DOLYENKO et al., 2020) consiste en una serie de cuatro personajes que representan FP y opinan sobre una temática que se plantea a partir de una producción de una alumna de enseñanza media extraída de investigaciones previas. Tres de los personajes ofrecen su respuesta en una burbuja de diálogo mientras que el cuarto la tiene en blanco para que los FP la completen. La pregunta ¿Qué piensas tú? subraya el CC e invita a emitir una opinión sobre la respuesta de cada personaje y a completar la burbuja de diálogo en blanco. La diferencia sustantiva con los CC que hemos reportado (por ejemplo, KEOGH et al., 2008; SAMKOVÁ, 2016; 2018) o con las viñetas con caricaturas (por ejemplo, FRIESEN; KNOX, 2022) es que aquí los personajes son FP y estos dan su opinión acerca de la producción de una alumna de enseñanza media que resuelve una tarea relativa a ecuaciones. No es la representación de una situación de aula, no se pregunta acerca de cómo apoyar o retroalimentar el aprendizaje de la alumna, sino que apunta a interpretar su pensamiento a partir de la información brindada. La primera CC (CC1) de la secuencia didáctica se presenta en la figura 1.

Figura 1. Diseño de CC1

Una estudiante de 13 años que cursaba 8º grado resolvió la siguiente tarea como se muestra a continuación:

Tarea	Respuesta
Escribe una ecuación que tenga por solución al número 5. Explica tu razonamiento.	$10 - x = 5 \rightarrow$ solución $\downarrow$ $10 - 5 = 5$ *x = es 5, por lo tanto, al restarle 5 al 10, nos quedaría como solución el número 5*

¿Por qué la estudiante presenta esa ecuación?

¿Qué piensas tú?

Los contenidos específicos de la didáctica que se abordan en esta secuencia de CC refieren a los distintos entendimientos del signo igual y su incidencia en las primeras aproximaciones de los estudiantes al estudio del álgebra (KNUTH et al., 2008; PARODI et al., 2017; 2020). Ha sido ampliamente reportado que los estudiantes de distintos niveles educativos tienden a interpretar este signo como un indicador del resultado de una operación, en lugar de interpretarlo como un indicador de una relación de equivalencia (KIERAN, 1981; PARODI et al., 2017). Esta comprensión operacional queda en evidencia, por ejemplo, cuando los estudiantes se enfrentan a una igualdad numérica para completar (BURGELL; OCHOVIET, 2015) o a una ecuación para resolver (PARODI et al., 2017). Una interpretación del signo igual como indicador de equivalencia provee mayores posibilidades de resolver con éxito una ecuación o de identificar que dos ecuaciones dadas tienen la misma solución (KNUTH et al., 2008). Quienes interpretan el signo igual como un operador, presentan dificultades para comprender el concepto de solución de una ecuación. Los docentes no conocen la problemática del signo igual y evidencian dificultades para anticipar objetivos de enseñanza, prever estrategias de resolución o gestionar tareas que requieren la interpretación de este signo (STEPHENS, 2006; PREDIGER, 2010; PARODI, 2021).

El abordaje de esta secuencia de CC, en torno a la temática didáctica señalada, requiere que los FP interpreten la comprensión matemática de la alumna en cuestión. En este trabajo, la destreza de interpretar la comprensión matemática de los estudiantes es entendida como una de las tres destrezas de la mirada profesional del profesor (JACOBS et al., 2010). Consiste en inferir el entendimiento matemático que reflejan las estrategias de resolución de los estudiantes. Requiere atribuir sentido a los aspectos matemáticamente relevantes de estas estrategias, para deducir el modo en que esos aspectos revelan la forma en que los estudiantes están comprendiendo los distintos conceptos y procedimientos matemáticos. Por ejemplo, si un alumno completa el espacio en blanco de una igualdad numérica con el resultado de la operación planteada a la izquierda del signo igual: 2+3=5+4, un aspecto matemáticamente relevante de esta estrategia es que involucra una lectura unidireccional, de izquierda a derecha, contrariamente a lo que plantea la propiedad simétrica de la igualdad. Esto revela que el signo igual se está interpretando como el indicador del resultado de una operación, lo que refleja una comprensión operacional de este signo.

MARCO METODOLÓGICO

Este estudio es de corte cualitativo y consistió en un estudio de caso: un grupo de clase integrado por cinco FP de matemática que cursan el cuarto y último año de la carrera de profesor de matemática en un instituto de formación docente de Uruguay.

Contexto y participantes

Las cinco FP de matemática (FP1, FP2, FP3, FP4, FP5) participantes tienen aprobados dos cursos anuales de didáctica de la matemática–práctica docente. Al participar en esta investigación cursan el tercero de estos cursos, por lo que tienen un grupo de enseñanza secundaria a su cargo en el que cumplen el rol completo de profesor. En su práctica de aula son supervisados por un profesor de didáctica que también es responsable de los aspectos teóricos del curso didáctica de la matemática–práctica docente.

En el instituto que se realiza este estudio funcionan tres grupos de cuarto año de profesorado de matemática: uno en turno matutino y dos en turno nocturno. Participa en esta investigación el grupo del turno matutino. Los FP no contaban con formación teórica previa relativa a la problemática del signo igual, ni experiencia anterior en el abordaje de CC para aprender didáctica. Sí los conocían como recursos para la enseñanza de la matemática y los habían implementado en sus grupos de práctica.

Instrumentos

Se diseña e implementa una secuencia de tres CC (CC1, CC2, CC3). La cuestión base de cada CC se basa en producciones y fragmentos de entrevistas que refieren al caso de una estudiante de enseñanza media resolviendo tareas sobre el signo igual (PARODI, 2016). Las opiniones de los personajes se apoyan en interpretaciones que evidencian FP sobre este caso, en un estudio que explora la mirada profesional en torno a este signo (PARODI, 2021). Se fueron entregando los CC en forma sucesiva y se solicitó responder individualmente por escrito. No se realizan aclaraciones adicionales respecto de las producciones y entrevistas incorporadas a cada CC, ya sea sobre los conceptos previos de la alumna, o respecto al curso o el tema en que se encontraba trabajando la estudiante. Tampoco se aporta información teórica relativa al signo igual.

La situación base de CC1 (figura 1) muestra la producción de una alumna en la que, ante la solicitud de escribir una ecuación con solución 5, propone una ecuación que tiene solución 5 y segundo miembro 5 (PARODI, 2016). En este caso, la alumna evidencia dos ideas con respecto al concepto de solución de una ecuación: como número que transforma la ecuación en una igualdad numérica y como valor numérico del segundo miembro de la ecuación. Estos dos entendimientos del concepto de solución de una ecuación, a su vez, se corresponden respectivamente con dos maneras de interpretar el signo igual: como expresión de una equivalencia condicional y como indicador de un resultado. En particular, la interpretación operacional del signo igual, junto con una asociación entre las palabras resultado y solución, son los dos aspectos del pensamiento matemático de la alumna que explican que ella haya propuesto una ecuación con segundo miembro 5. Esto, porque la alumna entiende que solución es lo mismo que resultado y considera que el signo igual se utiliza para informar el resultado de una operación. La producción de esta alumna deja al descubierto no solamente distintas interpretaciones del signo igual en un contexto algebraico de ecuaciones, sino también las formas en que esas interpretaciones pueden interferir, por ejemplo, en la conceptualización del concepto de solución de una ecuación. A su vez, queda ejemplificado un fenómeno de compartimentalización (VINNER, 1990), porque coexisten dos ideas contradictorias en la mente de la estudiante con respecto al concepto de solución de una ecuación.

Los tres personajes de CC1 brindan una opinión sobre la producción de la alumna que está alineada con resultados de investigaciones previas (PARODI, 2021). El personaje Pablo focaliza en que la alumna escribe una ecuación que tiene solución 5, dejando entrever que ella comprende el concepto de solución de una ecuación; mientras que el personaje Lucía centra su atención en que la alumna escribe una ecuación con segundo miembro 5, dejando entrever que presenta una dificultad con respecto a la comprensión de este concepto. La opinión de estos dos personajes da cuenta de una dificultad para interpretar el fenómeno de compartimentalización involucrado, porque no se identifica o no se explicita que la alumna está evidenciando distintos estados del saber, incluso contradictorios, con respecto al concepto de solución de una ecuación. Además, si bien Lucía menciona la asociación entre solución y segundo miembro, ninguno de los dos personajes alude explícitamente a las interpretaciones del signo igual. El personaje Sofía, en tanto, concibe como válidas las respuestas de Pablo y Lucía en simultáneo, pero tampoco atiende específicamente las interpretaciones del signo igual. Esta cuestión podrá ser notada por los FP, por ejemplo, al completar la burbuja en blanco que se incluye en CC1. Si bien la interpretación de la producción de la alumna requiere un conocimiento de resultados de investigación y de conceptos teóricos que son propios del corpus de la didáctica de la matemática, la identificación y puesta en uso de estos conocimientos podrá aflorar mediante el análisis de las opiniones de los personajes de CC1 sobre esa producción, favoreciendo, a su vez, la comprensión de esos conocimientos.

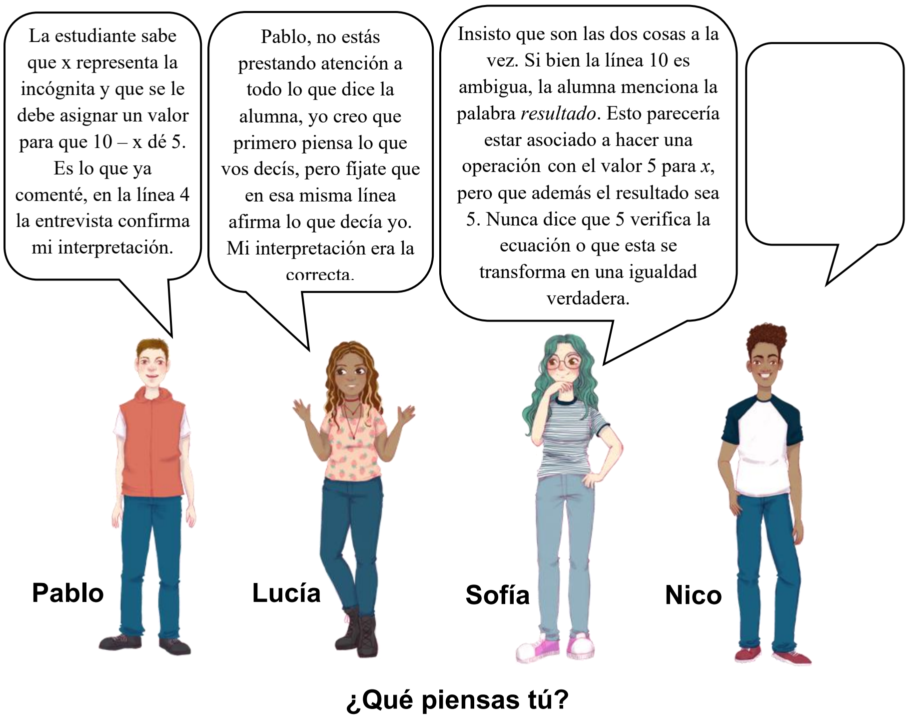
En la CC2 (figura 2) se presenta un fragmento de la entrevista que se mantuvo con la misma alumna cuya producción se enfocó en CC1.

Figura 2. Diseño de CC2

Se mantuvo una entrevista con la alumna para profundizar en su razonamiento. Presentamos un fragmento a continuación.

1. Entrevistador: ¿Por qué te parece que la ecuación $10 - x = 5$ tiene solución 5?
2. Alumna: Porque x es 5, entonces, al restarle 5 al 10, nos queda como solución 5.
3. E: ¿Cómo se te ocurrió esta ecuación?
4. A: Puse $10 - x$, que x tenía que ser la solución, y como resultado, o sea, lo que te está pidiendo que sea 5. Entonces, hice $10 - 5$, 5... Ah, claro, marqué solución como resultado…
5. E: A ver, ¿cómo es eso?
6. A: Claro, esta tendría que ser la solución (señala la x) y este el resultado (señala el segundo miembro).
7. E: Pero, la ecuación que escribiste, ¿tiene solución 5 o no?
8. A: No sé…, creo que no… No, pará… Sí, para mí sí… No estoy segura.
9. E: ¿Por qué te parece que 5 es solución de esa ecuación?
10. A: Porque al restarle 5 a 10, le estoy restando 5 y el resultado es 5. No sé…

¿Por qué la estudiante presenta esa ecuación?



El fragmento presenta información adicional sobre las ideas de la alumna que guiaron la elaboración de la ecuación que presentó y se vuelve a formular la misma pregunta que en CC1: ¿Por qué la estudiante presentó esa ecuación? En la entrevista se hace patente que la alumna entiende solución de la ecuación como lo escrito en el segundo miembro de la ecuación y como valor de la incógnita que verifica la ecuación. Al igual que en la producción de la alumna analizada en CC1, estos dos entendimientos del concepto de solución de una ecuación reflejan dos maneras distintas de interpretar el signo igual: como indicador de un resultado y como expresión de una equivalencia condicional.

El personaje Pablo refuerza la opinión que dio en CC1 y afirma que la alumna comprende solución de la ecuación como el valor de la incógnita que verifica la ecuación. El personaje Lucía defiende la opinión que dio en CC1 basada en la información de la línea 4 de la entrevista en la que la alumna afirma: “Puse 10 − x, que x tenía que ser la solución, y como resultado, o sea, lo que te está pidiendo que sea 5. Entonces, hice 10 − 5, 5... Ah, claro, marqué solución como resultado…”. El personaje pierde de vista que la alumna también está afirmando que x tenía que ser la solución. Al personaje Lucía, al igual que al personaje Pablo, se lo dota de un tipo de pensamiento que no admite la posibilidad de que, para la alumna, solución signifique el valor de la x que verifica la ecuación y, al mismo tiempo, miembro derecho de la ecuación. Un pensamiento que entiende ambas ideas de manera excluyente: es una o es otra, pero no ambas.

El personaje Lucía es el que admite ambas ideas a la vez y da cuenta de que para ella es admisible una compartimentalización, aunque no conozca el fenómeno en estos términos. CC2 también incluye una burbuja de diálogo en blanco para ser completada con lo que los FP consideren oportuno. CC2 ofrece una oportunidad para que aquellos FP que previamente se identificaron más con el pensamiento de Pablo o de Lucía, puedan ahora cambiar de opinión, coincidiendo más con Sofía, que es quien manifiesta ideas más consistentes con los resultados de investigación obtenidos acerca del caso de la alumna que se analiza.

En la CC3 (figura 3) se presenta otra producción de la misma alumna, a partir de una tarea en la que se pide completar una sentencia numérica en la que aparecen operaciones a ambos lados del signo igual.

Figura 3. Diseño de CC3

A la alumna se le propuso también la siguiente cuestión:

Tarea	Respuesta
¿Cuál es el número que falta en el espacio vacío? ¿Hay más de una opción?	La alumna escribió lo que está subrayado:
$14 \times 3 = \_\_\_\_ - 3$	$14 \times 3 = \underline{42} - 3 \underline{= \mathit{39}}$

¿Por qué la estudiante completó la expresión de ese modo?

¿Qué piensas tú?

La producción de CC3 muestra a la alumna completando el espacio en blanco de la sentencia dada con el resultado de la operación que está planteada a la izquierda del signo igual, quien también agrega un segundo signo igual para colocar el resultado de la otra operación. Con esta producción la alumna evidencia una comprensión operacional del signo igual, porque entiende que a la derecha de cada aparición de este signo se coloca el resultado de la operación que se encuentra a la izquierda. La alumna no reconoce que al trabajar de ese modo obtiene dos expresiones aritméticas ligadas por el signo igual que no refieren al mismo número.

El personaje Pablo valora que la alumna haya realizado operaciones correctamente y atribuye el error a una cuestión genérica de distracción y planteo. Este personaje, en consonancia con sus opiniones en CC1 y CC2, pierde de vista que el error de la alumna radica específicamente en la interpretación del signo igual. El personaje Lucía explicita que la alumna completa el espacio en blanco de la sentencia dada con el resultado de la operación planteada a la izquierda del igual y relaciona esta respuesta de la alumna con la asociación entre solución y resultado identificada por este personaje en CC1 y CC2. Este personaje logra describir la estrategia de la alumna, sin profundizar en la interpretación de la comprensión matemática que revela esa producción. El personaje Sofía recupera un extracto de la entrevista analizada en CC2 y lo contrasta con la nueva producción de la alumna, para mantener su opinión sobre la coexistencia de ideas contradictorias en la mente de la alumna. Si bien este personaje explicita que la interpretación del signo igual es la causa del error de la alumna, no explica el modo en que esa interpretación está interfiriendo en ese error. Esta cuestión, por ejemplo, podrá ser considerada y complementada por los FP al completar la burbuja en blanco que también se incluye en esta CC. CC3 aporta elementos para que los FP profundicen en la interpretación de la comprensión matemática que evidencia la respuesta la alumna, mientras se avanza en el entendimiento de resultados de investigación relativos a la problemática del signo igual en el contexto escolar.

Sesión de trabajo con el grupo

La sesión de trabajo con el grupo fue de 120 minutos de duración, estuvo a cargo de una integrante del equipo de investigadores y fue audiograbada. Se distinguen tres momentos.

En el momento 1, se aplicó la situación a analizar de CC1, pero sin los personajes y sin las burbujas, con el fin de conocer las impresiones iniciales de las FP (figura 4). Las participantes registraron su respuesta por escrito.

Figura 4. Situación a analizar en CC1, sin personajes y sin burbujas

Una estudiante de 13 años que cursaba 8º grado resolvió la siguiente tarea como se muestra a continuación:

Tarea	Respuesta
Escribe una ecuación que tenga por solución al número 5. Explica tu razonamiento.	$10 - x = 5 \rightarrow$ solución $\downarrow$ $10 - 5 = 5$ x = es 5, por lo tanto, al restarle 5 al 10, nos quedaría como solución el número 5

¿Por qué la estudiante presenta esa ecuación?

En el momento 2, se aplicó la secuencia CC1-CC2-CC3. Las participantes respondieron por escrito. Luego, explicaron oralmente sus respuestas. En el momento 3, se les preguntó oralmente a las participantes qué aprendieron con la secuencia tal como ellas lo percibieron.

ANÁLISIS DE DATOS

La presentación de los datos con su respectivo análisis se organiza de acuerdo al momento de la sesión de trabajo en el que estos se recolectaron.

Momento 1

La totalidad de las participantes explican que la estudiante presenta la ecuación $10–x=5$, ante la solicitud de escribir una ecuación con solución 5, porque confunde solución de una ecuación con resultado de una operación o, en este caso, con el miembro derecho de la ecuación. En la producción que se analiza, la alumna también saca una flecha de la incógnita y sustituye por 5, pero esto parece no ser reconocido por las participantes como evidencia de que la alumna conoce el concepto de solución de una ecuación. La tabla 1 muestra los comentarios que realizan inicialmente las participantes para interpretar esta producción.

Tabla 1. Comentarios iniciales de las FP para interpretar la producción de la alumna

Respuesta de FP
Considera que la solución de la ecuación tiene que ser el resultado de lo que plantea, en este caso, en el primer miembro. (FP1)
Cree que el concepto de solución está vinculado al resultado de realizar una operación. Por ejemplo: 2 + 2 =__. Está acostumbrada a tener toda la información del miembro de la izquierda y que el miembro de la derecha de la igualdad sea la solución. La ecuación que plantea busca encontrar un número que, al realizar la operación correspondiente al miembro de la izquierda, dé como resultado 5. Además, podría confundirse porque el valor de x también coincide. (FP2)
Como saca una flecha del = 5 y escribe "solución", creo que presentó esa ecuación porque si $x = 5$, si hago la cuenta 10 – 5, me da como resultado 5. (FP3)
Confunde la solución de la ecuación con el miembro del lado derecho de la igualdad (reflejaría el "resultado" de una cuenta). (FP4)
Piensa que la solución de una ecuación es el miembro de la igualdad en el que no se encuentra la x, "el resultado de la cuenta". Pudo haber presentado la ecuación $7 - x = 5$, por ejemplo. Quizás se deba a que usualmente decimos "¿cuál es la solución de 8 – 4?" en lugar de decir "¿cuál es el resultado?" o "¿a qué es igual?". (FP5)

FP2 observa que "el valor de x también coincide", pero parece tratarlo como una casualidad y no como una decisión intencional de la alumna mediante la que logra tanto que 5 sea raíz de la ecuación como que el miembro derecho sea 5. Por su parte, FP3 también observa que la alumna asigna a x el valor 5, pero explica que lo hace como medio para que el miembro derecho sea igual a 5.

Momento 2

A partir de un análisis global de todas las respuestas que brindan las participantes en este momento de la sesión de trabajo, se observa que cada FP acuerda principalmente con un solo personaje de cada CC. La elección de este personaje puede variar de un CC a otro (por ejemplo, FP3 pasa de acordar con el personaje Lucía en CC1, a acordar con el personaje Sofía en CC2), pero el acuerdo se da, principalmente, con uno solo de los personajes en cada CC. A continuación, se focaliza en el análisis de los comentarios que vierten los FP para justificar estos acuerdos.

CC1

Al abordar CC1, tres FP responden que están de acuerdo principalmente con la opinión del personaje Lucía (FP3, FP4 y FP5), mientras que dos FP responden que están de acuerdo principalmente con la opinión del personaje Sofía (FP1 y FP2). Ningún FP responde que está de acuerdo con la opinión del personaje Pablo. La tabla 2 muestra los comentarios que realizan las participantes para justificar sus acuerdos con el personaje correspondiente en CC1.

Tabla 2. Comentarios de las FP para justificar su acuerdo con Lucía o Sofía en CC1

Lucía	Sofía
No coincido con Pablo, la estudiante escribe esa ecuación porque el segundo miembro es 5. Confunde solución con segundo miembro de la ecuación.	Mmm… para mí la alumna presenta esa ecuación por los dos motivos: porque 5 verifica la ecuación y porque 5 coincide con el segundo miembro.
Coincido con lo que plantea Lucía. La estudiante escribe esa ecuación porque el segundo miembro es 5. (FP3)	Pienso igual. Sofía observa la coincidencia de que 10–5=5 y que justo es 5 la solución de la ecuación. (FP2)
Estoy de acuerdo con la postura de Lucía. La alumna confunde solución con segundo miembro de la ecuación porque, al explicar, dice que x=5 es la solución porque el resultado de 10–5 es 5. (FP4)	Comparto que quizá tuvo la intención de que el valor de x fuera 5, porque podría haber pensado una operación más sencilla, como 2+3=5. De todas formas, se observa claramente que la noción de solución no es la correcta. Quizás, aparte de pensar que el miembro de la derecha tiene que valer 5, también piensa que simultáneamente se tiene que cumplir que el valor de x es 5. (FP1)
Estoy de acuerdo con Lucía, aunque no sé si la estudiante confunde la solución con el segundo miembro o con el resultado de una operación. Habría que ver qué responde si la x se encuentra en el segundo miembro. (FP5)	

FP3 transcribe textualmente una parte de la opinión del personaje Lucía para justificar su acuerdo con este personaje: “la estudiante escribe esa ecuación porque el segundo miembro es 5”. FP4 transcribe otra parte de la opinión del personaje Lucía: “la alumna confunde solución con segundo miembro de la ecuación”, pero lo relaciona con un extracto de la producción de la alumna que está siendo analizada: “dice que x=5 es la solución porque el resultado de 10–5 es 5”. FP5 cuestiona si la asociación no será entre solución y resultado de una operación, y se pregunta qué respuesta daría la alumna si la variable estuviera en el segundo miembro de la ecuación.

Estas tres FP, en consonancia con el personaje Lucía en CC1, focalizan en la asociación entre solución y segundo miembro que se infiere de la ecuación que presenta la alumna, porque se pedía una ecuación con solución 5 y la alumna escribe una ecuación con segundo miembro 5. Sin embargo, estas FP no reparan en que la ecuación en cuestión también tiene solución 5, o bien relativizan ese aspecto de la respuesta de la alumna: “creo que fue coincidencia que la solución real sea 5” (E5, con respecto al personaje Sofía). Hasta aquí, FP3, FP4 y FP5 no profundizan en la interpretación de la comprensión matemática de la alumna, porque no explicitan a qué puede deberse esa asociación entre solución y segundo miembro. En particular, no hacen alusión a las interpretaciones del signo igual que pueden estar incidiendo en tal asociación. Por el contrario, se limitan a transcribir parcialmente la opinión del personaje Lucía (FP3), a relacionar esas transcripciones con algún pasaje puntual de la respuesta de la alumna (FP4) o a demandar más información para avanzar en la interpretación solicitada (FP5).

Por otra parte, el acuerdo inicial de estas tres FP con el personaje Lucía implica un desacuerdo, al menos parcial, con el personaje Sofía. Este desacuerdo con este otro personaje revela una dificultad inicial de estas participantes para identificar e interpretar el fenómeno de compartimentalización involucrado en el caso analizado. La alumna de enseñanza media presenta una respuesta que da cuenta de dos ideas contradictorias respecto del concepto de solución de una ecuación, que a su vez están ligadas a distintas interpretaciones del signo igual, pero las tres FP interpretan que la alumna está evidenciando un solo entendimiento de este concepto.

FP2 reelabora la respuesta del personaje Sofía para justificar su acuerdo con este personaje, focalizando especialmente en la operación 10–5=5 que realiza la alumna: “Sofía observa la coincidencia de que 10–5=5 y que justo es 5 la solución de la ecuación”. FP1, si bien también reescribe la opinión del personaje Sofía, aporta un argumento para desmarcarse de la opinión del personaje Lucía: “quizá tuvo la intención de que el valor de x fuera 5, porque podría haber pensado una operación más sencilla, como 2+3=5”. Esta FP justifica que la alumna no solamente asocia solución con segundo miembro, sino que también evidencia la idea de solución como número que transforma la ecuación en una igualdad numérica.

Estas dos FP, al igual que el personaje Sofía en CC1, atienden que el segundo miembro de la ecuación que presenta la alumna es 5, y que la solución es 5, para asumir implícitamente la coexistencia de dos ideas contradictorias en la mente de la alumna, con respecto al concepto de solución de una ecuación. No obstante, FP1 y FP2 no lo expresan en estos términos y no profundizan en las causas que pueden explicar este comportamiento de la alumna. Tampoco mencionan explícitamente las interpretaciones del signo igual que pueden estar ligadas a estas dos maneras de comprender el concepto de solución de una ecuación.

CC2

Luego de trabajar en CC2, las cinco FP responden que están de acuerdo principalmente con la opinión del personaje Sofía. Esto evidencia que FP3, FP4 y FP5 cambiaron de opinión. La tabla 3 muestra los comentarios que realizan las participantes para justificar sus acuerdos con el personaje Sofía en CC2.

Tabla 3. Comentarios de las FP para justificar su acuerdo con Sofía en CC2

Sofía
Insisto que son las dos cosas a la vez. Si bien la línea 10 es ambigua, la alumna menciona la palabra *resultado*. Esto parecería estar asociado a hacer una operación con el valor 5 para *x*, pero que además el resultado sea 5. Nunca dice que 5 verifica la ecuación o que esta se transforma en una igualdad verdadera.
Concuerdo con lo que dice Sofía. La estudiante considera que ambas cosas tienen que coincidir. (FP1)
Para mí en la línea 4 se observa la convivencia de las dos nociones de solución de la alumna. (FP2)
Concuerdo con lo que dice Sofía, la estudiante no diferencia ambos conceptos. (FP3)
Me inclino por ella. (FP4)
Creo que Sofía es la más acertada. La alumna parece tener las dos ideas en la cabeza. En la línea 10 afirma que 5 es solución porque es tanto el resultado de la operación como el valor de *x*. (FP5)

Las participantes que justifican su opción por el personaje Sofía se apoyan en las líneas 4 y 10 que son las que informan que la alumna entrevistada piensa a la vez en solución como valor de la incógnita que verifica la ecuación y como segundo miembro de la ecuación. Afirman, de distintas maneras, la convivencia de las dos nociones en la mente de la alumna. Esto es, son capaces de interpretar la dificultad de la estudiante a partir de la información que aporta la entrevista. Entendemos que cuando FP3 explicita "Concuerdo con lo que dice Sofía, la estudiante no diferencia ambos conceptos" se refiere a que para la alumna entrevistada los dos conceptos son lo mismo pues no logra diferenciarlos.

Las cinco participantes, al mostrarse inclinadas por la respuesta del personaje Sofía, revelan un importante logro: la capacidad de aceptar que la producción de la alumna de enseñanza secundaria puede justificarse desde dos esquemas de conocimiento que en CC1 consideraron, de alguna manera, excluyentes. Ahora son capaces de comprender que la alumna entiende de dos maneras distintas el concepto solución de una ecuación, una de ellas matemáticamente incorrecta, aun cuando en este caso la alumna logró hacerlas convivir sin inconsistencias.

CC3

Al responder CC3, FP4 se mantiene inclinada hacia la opinión del personaje Sofía. FP1, FP3, FP5 manifiestan estar de acuerdo tanto con aspectos de lo que dice el personaje Lucía como el personaje Sofía. FP2 explicita que no comparte la idea de que "conviven las dos ideas" tal como el personaje Sofía afirma y, por tanto, ahora manifiesta ya no estar tan de acuerdo con ese personaje. La tabla 4 muestra los comentarios que realizan las participantes para justificar sus acuerdos con los personajes correspondientes en CC3.

Tabla 4. Comentarios de las FP para justificar su acuerdo con Lucía o Sofía en CC3

Lucía	Sofía
¡Yo tenía razón! ¿No te das cuenta, Pablo? Me parece que es algo más que un error en el planteo. Ella completa el espacio vacío con el resultado de la operación que está planteada a la izquierda del igual.	Esta tarea me da más información para entender por qué en la alumna conviven las dos ideas. En la entrevista dijo que "*x* tenía que ser la solución". Y ahora veo por qué, además, confunde solución con

¡Sigue confundiendo solución con resultado!	segundo miembro de la ecuación. Me parece que la dificultad está en la interpretación del signo igual.
Estoy de acuerdo con Lucía en que en el espacio en blanco pone el resultado de la cuenta anterior. Es verdad que el valor que pone como solución es el resultado de la operación del otro lado de la igualdad. (FP1)	Concuerdo con Sofía en que tiene dificultades con la interpretación del signo igual. La estudiante no busca un valor de manera que lo que tengo de un lado de la igualdad es igual a lo que tengo del otro lado. (FP1)
	Para mí, no "conviven las dos ideas". (FP2)
Concuerdo también con lo que dice Lucía, pero creo que está relacionado con la interpretación del signo igual. (FP3)	Concuerdo con Sofía en que hay un error en la interpretación del signo igual. Creo que la estudiante ve el signo igual como algo operacional (como resultado de una operación) y no como indicador de una igualdad numérica como sería en este caso. (FP3)
	Me inclino por Sofía, el signo de igual está mal usado. (FP4)
Coincido con Lucía en que la alumna piensa que resultado y solución son lo mismo. (FP5)	También creo que hay un error en el significado del signo de igual, como agrega Sofía. (FP5)

Tres de las participantes (FP1, FP3, FP5) manifiestan estar de acuerdo con el personaje Lucía en que la alumna confunde solución de la ecuación con resultado, pues entiende que inmediatamente después del signo igual en una sentencia numérica se presenta el resultado de la operación escrita a la izquierda de este signo. También acuerdan con el personaje Sofía en que la alumna evidencia una dificultad en la comprensión del signo igual al no entenderlo como un signo que relaciona dos cantidades iguales.

Si bien la explicación del personaje Sofía contiene lo que afirma el personaje Lucía, es más claro y explícito en las palabras de esta última: "Ella completa el espacio vacío con el resultado de la operación que está planteada a la izquierda del igual". Entendemos que esto explica que tres de las cinco participantes manifiesten su acuerdo con esa afirmación.

Cuatro de las participantes (FP1, FP3, FP4, FP5) comparten que la alumna tiene dificultades para comprender el signo igual y esto es lo que las inclina a estar de acuerdo con las afirmaciones del personaje Sofía.

Las participantes infieren de CC3 que la alumna tiene problemas con la interpretación del signo igual y la fuerza de la evidencia presentada en esta CC hace que sea irrenunciable la aceptación de que la idea de solución de una ecuación, para el caso de la estudiante que se analiza, está vinculada a resultado de una operación. Se entiende que CC3 hace mayor hincapié en este aspecto y que por ello perdió fuerza la idea de que la alumna también sabe que la solución es el valor de la incógnita que verifica la ecuación, que es lo que, además, afirma el personaje Sofía.

Momento 3

Se les preguntó a las participantes qué habían aprendido después de trabajar en la secuencia.

FP1 dice que le implicó un esfuerzo “tratar de entender lo que dice cada uno”, en referencia a los personajes. Además, explica que aprendió que puede estar parcialmente de acuerdo con lo que dice uno de los personajes. También dice que le gustó el trabajo con las viñetas pues le implicó “estar del otro lado”, debido a que las había propuesto en su grupo de clase, pero para enseñar matemática, y pudo experimentar en primera persona lo que vivencian sus alumnos.

FP2 dijo que reparó en la importancia del lenguaje en clase, “es muy difícil en la clase pensar en el uso de las palabras”, esto es, qué palabras son las más adecuadas en la práctica de la enseñanza. Se refiere a hacer énfasis en “qué verbos usamos, qué palabras usamos”, por ejemplo, revisar el uso de la palabra resultado, que el uso de las palabras apropiadas no es algo que se enseñe en la formación de profesores.

FP3 dice que le permitió “interpretar lo que dice cada uno”, refiriéndose a cada personaje.

FP4 afirmó que le sirvió para advertir que había dos ideas actuando en la mente de la alumna: “están las dos ideas en la cabeza, me terminé moviendo hacia Sofía” dijo, explicando su acuerdo en CC1 con el personaje Lucía. También destacó que está muy bien que “no es que un personaje dice todo correcto y un personaje todo equivocado, a veces hay uno que dice cosas bien y cosas mal".

FP5 señaló que le permitió tomar conciencia de que lo que se enseña en séptimo grado (curso en el que principalmente se trabaja en aspectos aritméticos) puede tener consecuencias posteriores en el aprendizaje del álgebra, "yo nunca pensé en qué afecta lo que estoy haciendo en álgebra después", dice que "son demasiadas cosas a pensar todo el tiempo" en el proceso de enseñanza, que ella sabe que resultado no es una solución, pero que no está segura si no ha preguntado en su grupo de clase, por ejemplo, "¿cuál es la solución de 4 por 2?", agrega que todo lo que se enseña implica un "potencial conflicto" en la trayectoria educativa de los alumnos. FP5 agregó, además, que la secuencia "agrega ideas a la cabeza" pues le permitió analizar el caso que se presentaba con una perspectiva más amplia, debido a las intervenciones de los personajes, comparándolo con "si solo me das un problema y me decís qué pienso".

CONCLUSIONES

En este trabajo nos propusimos diseñar una secuencia para enseñar una de las dificultades que presentan los estudiantes de enseñanza secundaria en el estudio de las ecuaciones lineales con una incógnita. El diseño fue realizado tomando resultados de investigación provenientes de Autor (2016a, 2021). El diseño supone que las FP aprenderán a partir de la secuencia, sin que los aspectos teóricos del tema hayan sido enseñados en forma previa.

El diseño de CC1 revela ser insuficiente para que las FP interpreten que la producción de la alumna de enseñanza secundaria se explica con base en las dos ideas que la estudiante sostiene a la vez: solución de la ecuación es el número que está escrito en el miembro derecho de la ecuación, inmediatamente después del signo igual, y solución de la ecuación es el valor de la incógnita que la verifica. En un primer acercamiento a esta problemática tres estudiantes de cinco optaron por dar solo la primera explicación, mientras que dos aceptaron que los dos motivos podían estar incidiendo en la producción de la alumna. Esto ya representa un avance respecto de las interpretaciones iniciales de las participantes en donde la interpretación estaba centrada, predominantemente, en la primera idea mencionada.

En el diseño CC2 se incorporó evidencia obtenida de una entrevista en la que se hace patente, sobre todo en las líneas 4 y 10, que la alumna tiene los dos conocimientos y que los acepta como válidos para el concepto de solución de una ecuación. Se entiende que este diseño es contundente dado que dos participantes mantuvieron su opinión y las otras tres cambiaron optando por la explicación del personaje Sofía. La secuencia CC1–CC2 resultó útil para favorecer procesos de interpretación del pensamiento de los estudiantes de enseñanza secundaria que se inician en el estudio de las ecuaciones.

El diseño CC3 recupera una producción de la alumna en la que se presenta evidencia de su comprensión operacional (KNUTH, 2008) del signo igual. A priori, consideramos que a las FP les resultaría complejo aceptar la convivencia de dos ideas que operan a la vez en la producción de la alumna. Como la estudiante escribe $10 - 5$, al sustituir x por 5 en $10 - x$, entendimos que quedaba lo suficientemente claro que comprendía el valor de x como solución y fue por ello que decidimos incorporar más evidencia sobre la comprensión operacional del signo igual en CC3, con el propósito de aportar evidencia que fundamentara que la alumna también identifica solución con segundo miembro de la ecuación. Sin embargo, esta viñeta incorporó mayor complejidad a la problemática introduciendo aspectos del signo igual que eran desconocidos por las participantes y dio más peso en la interpretación del trabajo de la alumna a la explicación de que entiende a la solución de la ecuación como lo escrito inmediatamente después del signo igual. Decayó, de cierto modo, la interpretación de que la alumna también sabe que solución refiere al valor de x que verifica la ecuación y que fue presentado en CC1.

Pensando en el futuro de esta línea de investigación que propone diseñar secuencias para la enseñanza de la didáctica de la matemática, se considera, al menos a priori, agregar un diseño CC4 en el que se aporte más evidencia de que la alumna sabe que solución refiere al valor de la incógnita que verifica la ecuación, trabajando en contexto algebraico. Esto sería posible en tanto se cuenta con esta evidencia a partir de los insumos que han sido fuente para este trabajo y que están contenidos en Autor (2016a).

Con relación al dispositivo utilizado, las viñetas conceptuales demostraron ser muy útiles en diferentes sentidos. Plantean a las FP el doble desafío de interpretar la producción de una alumna de enseñanza secundaria y, también, lo que expresan los personajes. Esto implica poner en tensión la interpretación de las participantes con la de los personajes y, eventualmente con lo que podrían pensar otros compañeros de clase de la formación docente o colegas, dado que los personajes encarnan a FP. Este trabajo se diferencia de otros que utilizan CC como representaciones de la práctica (IVARS et al., 2017; SAMKOVÁ, 2016) o como el realizado por Friesen y Knox (2022), pues no se trata de analizar la resolución de un problema matemático sino de interpretar la producción de una estudiante con el objetivo de aportar a la mirada profesional en torno a temas que se han investigado en la didáctica de la matemática.

El análisis del trabajo por escrito, tanto el tener las opiniones de los personajes por escrito, como el tener que expresar las ideas propias por escrito, les permitió aclarar las propias ideas, así como darse cuenta de que se puede estar de acuerdo con algunos aspectos del pensamiento de otro, y no necesariamente en todo lo que expresa. Esto fue posible porque el diseño de las burbujas es flexible (SAMKOVÁ; HOSPESOVÁ, 2015) y permite la inclusión de distintas ideas que pueden tener aspectos que se solapan o que se complementan.

Las participantes tomaron conciencia de las consecuencias que puede tener el lenguaje en el proceso de enseñanza, la precisión que es requerida para la correcta elección de las palabras que se utilizan en clase y cómo lo que se enseña en un curso puede obstaculizar lo que se aprenderá en cursos posteriores. Las ideas vertidas por los distintos personajes, complejizaron la discusión y permitieron ampliar los puntos de vista en juego para interpretar la producción de una alumna de enseñanza secundaria.

Este estudio aporta evidencias acerca del potencial de una secuencia de CC para favorecer el entendimiento de resultados de investigación sobre la comprensión del signo igual en la entrada al álgebra. Si bien este hallazgo es alentador, más estudios son necesarios para profundizar en la exploración de ambientes de enseñanza que giren en torno a secuencias de CC para favorecer el aprendizaje de saberes teóricos propios del campo: ¿se enseñan mediante un discurso del formador de profesores? ¿Se solicita a los FP la lectura de documentos de referencia? ¿Deberían diseñarse tareas o secuencias que faciliten la comprensión de estos conocimientos? ¿Qué potencial tienen los CC, en particular, para la enseñanza de la didáctica de la matemática?

REFERENCIAS

BALL, D., THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389–407, nov. 2008.

BROUSSEAU, G. **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas**. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2007.

BUCHBINDER, O.; KUNTZE, S. **Mathematics teachers engaging with representations of practice**. Berlín: Springer, 2018.

BURGELL, F.; OCHOVIET, C. Significados del signo de igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 33, n. 3, p. 77–98, 2015.

DOLYENKO, I.; GONZÁLEZ, D.; GONZÁLEZ, L.; OCHOVIET, C. **Viñetas conceptuales para aprender matemática**. Montevideo: Imaginar ediciones, 2020.

FERNÁNDEZ, J.; MOLFINO, V.; OCHOVIET, C. Rol docente del investigador en matemática educativa: un ejemplo en un curso de posgrado para profesores del nivel superior. **Bolema**, n. 30, p. 808–829, 2016.

FRIESEN, M.; KNOX, A. Pre-service teachers learn to analyse students' problem-solving strategies with cartoon vignettes. En: CONGRESO DE LA SOCIEDAD EUROPEA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 12, 2022, Bozen-Bolzano. **Actas...** Bozen-Bolzano: HAL, 2022.

IVARS, P., BUFORN, A.; LLINARES, S. Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En: SALCEDO, A. (Ed.), **Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI**. Caracas: CIES, 2017. p. 65–88.

JACOBS, V., LAMB, L.; PHILIPP, R. Professional noticing of children's mathematical thinking. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 41, n. 2, p. 169–202, mar. 2010.

KEOGH, B.; DABELL, J.; NAYLOR, S. **Concept cartoons in mathematics education**. Millgate House Publishers, 2008.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, n. 3, p. 317–326, ago. 1981.

KNUTH, E., ALIBALI, M., HATTIKUNDUR, S., MCNEIL, N.; STEPHENS, A. The importance of equal sign understanding in the middle grades. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 13, n. 9, p. 514–519, may. 2008.

KUNTZE, S. et al. “Helping learners” – Pre-service mathematics teachers’ conceptions of learning support through the lens of their situated noticing – A vignette-based study. En: CONFERENCIA DEL GRUPO INTERNACIONAL DE PSICOLOGÍA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 45, 2022, Alicante. **Actas...** Alicante: PME, 2022. p. 91–98.

MOLFINO, V.; OCHOVIET, C. La producción de conocimiento didáctico en la formación de profesores de matemática: la investigación como herramienta. En: Macedo, B.; Silveira, S.; Meziat, D.; García, M.; Bengochea, L. (Eds.), **Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias en Debate**. Montevideo: Universidad de Alcalá–Consejo de Formación en Educación, 2019. p. 616–625.

NAYLOR, S.; KEOGH, B. Concept cartoons: what have we learnt? **Journal of Turkish Science Education**, v. 10, n. 1, p. 3–11, mar. 2013.

OCHOVIET, C.; OKTAC, A. Comprender los resultados de investigación: el rol docente del investigador en la enseñanza de la matemática educativa. **Reflexión e Investigación en Matemática Educativa**, p. 53–80, 2011.

PARODI, S. **Significados del signo igual en la entrada al álgebra**. 2016. 303 f. Tesis (Maestría en Ciencias en Matemática Educativa), IPN, México.

PARODI, S. (2021). **La habilidad de mirar profesionalmente del futuro profesor en situaciones que involucran al signo igual**. 2021. 304 f. Tesis (Doctorado en Matemática Educativa), IPN, México.

PARODI, S.; OCHOVIET, C.; LEZAMA, J. La comprensión del signo de igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática. **Enseñanza de las Ciencias***,* v. 35, n. 3, p. 51–67, 2017.

PARODI, S.; OCHOVIET, C.; LEZAMA, J. Interpretaciones del signo igual en un contexto algebraico de polinomios. **Bolema**, n. 34, p. 1264–1284, 2020.

PREDIGER, S. How to develop mathematics–for–teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 13, n. 1, p. 73–93, ago. 2010.

ROWLAND, T., TURNER, F.; THWAITES, A. Research into teacher knowledge: a stimulus for development in mathematics teacher education practice. **ZDM**, n. 46, p. 317–328, dic. 2014

SAMKOVÁ, L. *Using Concept Cartoons to investigate future teachers' knowledge: new findings and results.* En: CONFERENCIA TEMÁTICA SOBRE ENSEÑANZA MATEMÁTICA, RECURSOS Y DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE, 3, 2016, Berlín. **Actas...** Berlín: Humboldt Universität–HAL Archive, 2016. p. 207–216.

SAMKOVÁ, L. Assessing future teachers' knowledge on fractions: written tests vs concept cartoons. **Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science**, v. 11, n. 3, p. 45–52, oct. 2018.

SAMKOVÁ, L.; HOSPESOVÁ, A. Using concept cartoons to investigate future teachers' knowledge. En: CONGRESO DE LA SOCIEDAD EUROPEA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 9, 2015, Praga. **Actas...** Praga: Charles University, 2015. p. 3241–3247.

STEPHENS, A. Equivalence and relational thinking: preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 9, n. 3, p. 249–278, abr. 2006.

VINNER, S. Inconsistencies: their causes and function in learning mathematics. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 12, n. 3, p. 85–98, 1990.