



# Centro de massa em configurações pontuais: explorações com o Geogebra

## Center of Mass in Point Configurations: Explorations with GeoGebra

João Paulo Martins dos Santos <sup>a,\*</sup>, Marcus Vinícius de Araújo Lima <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Academia da Força Aérea, Pirassununga, SP, Brasil

\* Autor Correspondente: [jp2@alumni.usp.br](mailto:jp2@alumni.usp.br)

**Resumo:** A localização do centro de massa de um conjunto finito de massas pontuais pode ser realizada por meio da minimização de uma função polinomial de grau 2 utilizando o método dos mínimos quadrados. Considerando um conjunto finito de massas pontuais no plano, este artigo explora, em algumas situações particulares, o efeito que mudanças na configuração dos pontos causam tanto no centro de massa da nova configuração, como no valor mínimo da função polinomial associada àquela configuração. Em cada caso, os detalhes matemáticos são apresentados com ilustrações, *links* interativos do GeoGebra e elementos de cores dinâmicas, que são inseridos para dar ênfase à visualização e ilustrar a relação do centro de massa como o mínimo de uma função de duas variáveis utilizando as curvas de nível combinadas com as escalas de cores. Os resultados englobam a visualização do sistema de partículas com aleatoriedade nas posições e massas das partículas, a análise de alguns casos de deslocamentos do centro de massa e suas funções associadas, bem como a influência das massas sobre os valores mínimos dessas funções. De forma geral, a visualização dos elementos matemáticos, facilitada pela utilização do GeoGebra, ressalta detalhes e aspectos fundamentais dos problemas de forma interativa, permitindo a observação e análise.

**Palavras-chave:** Centro de massa; Função de duas variáveis; GeoGebra; Matemática.

**Abstract:** The localization of the center of mass of a finite set of point masses can be achieved by minimizing a polynomial function of degree 2 using the least squares method. Considering a finite set of point masses in the plane, this article explores, in some particular situations, the effect that changes in the configuration of the points cause both on the center of mass of the new configuration and on the minimum value of the polynomial function associated with that configuration. In each case, the mathematical details are presented with illustrations, interactive links from GeoGebra, and dynamic color elements inserted to emphasize visualization and illustrate the relationship of the center of mass as the minimum of a two-variable function using contour plots combined with color scales. The results encompass the visualization of the particle system with randomness in the positions and masses of the particles, the analysis of some cases of displacements of the center of mass and their associated functions, as well as the influence of the masses on the minimum values of these functions. In general, the visualization of mathematical elements, facilitated by the use of GeoGebra, highlights details and fundamental aspects of the problems interactively, allowing observation and analysis.

**keywords:** Center of mass; Two variable function; GeoGebra; Mathematics.

## 1 Introdução

A resolução de problemas de otimização usando ferramentas de Cálculo, apesar de ser uma abordagem natural, desde que sejam representados por funções suficientemente deriváveis, pode apresentar dificuldades algébricas na determinação dos pontos críticos ou mesmo na aplicação dos critérios de classificação destes pontos, especialmente em dimensões maiores do que um. Neste contexto, o uso do GeoGebra pode ser de grande valia pois, além de possibilitar a visualização de gráficos (no caso de funções de duas variáveis a valores reais), por ser um software de geometria dinâmica, permite a realização de animações gráficas que podem auxiliar tanto na ilustração e observação, como na exploração de propriedades relacionadas às funções de interesse. O foco deste artigo é analisar o comportamento do centro de massa de um conjunto finito de massas pontuais (que será denominado sistema de partículas) quando alteram-se as posições ou a massa das partículas e o efeito dessas alterações no valor mínimo da função centro de massa (função cujo ponto de mínimo global é o centro de massa do sistema de partículas). Além resolução analítica das diferentes configurações dos sistemas de partículas, são apresentados gráficos e links interativos do GeoGebra para cada situação, possibilitando que o leitor acompanhe e explore em detalhes os resultados. A motivação para este artigo surgiu dos resultados apresentados em [1], [5] e [9] e também como uma continuidade dos resultados em [7] e [8].

Nesse contexto dos problemas de otimização com utilização do GeoGebra, [5, p.312] exploram a minimização da soma das distâncias ( $D$ ) entre um ponto  $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e os vértices de um triângulo  $\Delta ABC$ , denotadas por  $PA, PB$  e  $PC$ , respectivamente. Neste caso, os autores constroem um ponto com movimentação livre e interativa; em seguida, atribuem cores para cada distância  $D$ , seguindo o modelo de cores RGB (*Red, Green, Blue*), de tal forma que o padrão de cores formado, aliado à visualização dos valores das distâncias, induzem à dedução do ponto de mínimo por meio da análise dos padrões similares às curvas de nível.

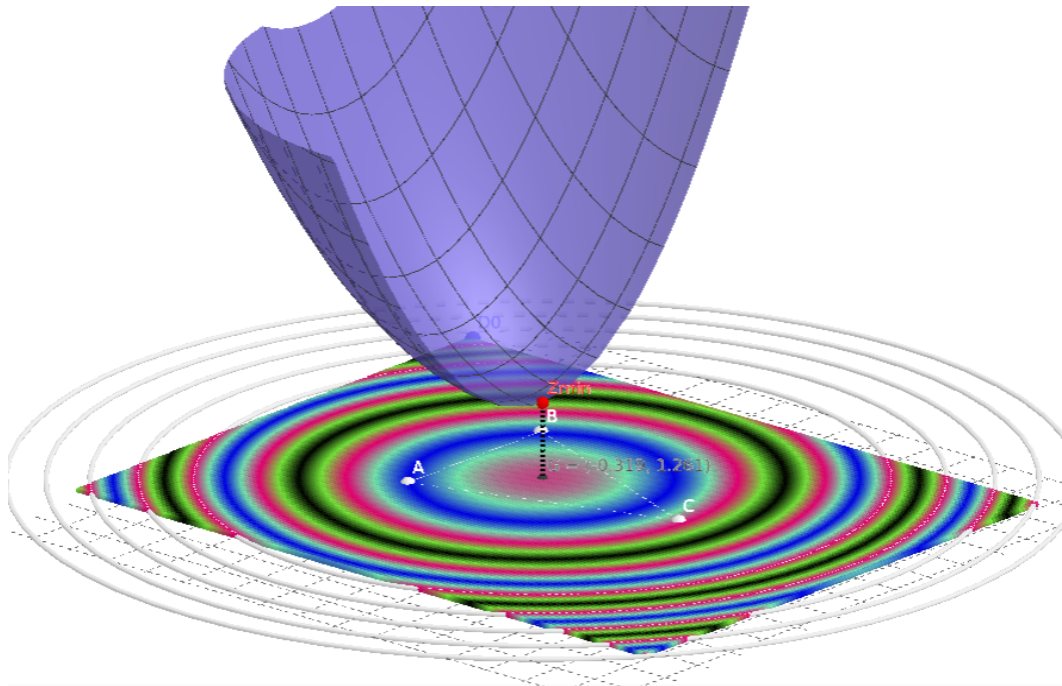
A representação da soma dos quadrados das distâncias como um função de duas variáveis é apresentada em [9] para um triângulo  $\Delta ABC$ . Considerando massas pontuais  $m_1, m_2$  e  $m_3$ , respectivamente, nos vértices  $A, B$  e  $C$  do triângulo, obtém-se a função de duas variáveis abaixo:

$$f_C(x, y) = \sum_{i=1}^3 m_i \cdot \left( (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right) \quad (1.1)$$

No caso em que as massas são todas iguais, o ponto de mínimo dessa função é o baricentro do triângulo e coincide com o centro de massa desse sistema de partículas.

Todo o artigo é baseado na análise do comportamento do centro de massa e do valor mínimo da função  $f_C$  para um sistema de  $n$  massas pontuais. A Figura 1, apresentada em [7], ilustra a representação da superfície  $f_C$  com massas unitárias, a utilização do modelo RGB de cores para representar uma visualização no plano  $XY$  e as curvas de nível. O modelo RGB é empregado para reforçar a visualização do ponto de mínimo, induzido pela presença das regiões circulares, na mesma direção e sentido do foco dado em [5, p. 312] pela utilização do processo manual e interativo de construção dos padrões de cores.

**Figura 1.** Superfície  $f_C(x, y) = \sum_{i=1}^3 ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)$  para a soma dos quadrados das distâncias aos vértices de um triângulo  $\triangle ABC$ . Modelo de cores RGB no plano  $XY$  e curvas de nível.



Fonte: [7]

Um caso mais geral de soma de quadrados de distâncias com ilustrações de cores dinâmicas é apresentado em [8] em que a discussão é focada nos centros de massas relacionados aos polígonos convexos, pois uma análise subsequente, relacionada a definição dos denominados problemas restritos, impõem restrições de tal forma que as variáveis da função  $f_C$  sejam restritas às arestas do polígono convexo. Aqui, como não há análise dos problemas restritos, não há restrições quanto às posições das partículas do sistema.

O artigo está organizado como a seguir. Na Seção 2 o centro de massa é caracterizado como o ponto de mínimo global de  $f_C$ , aplicando o teste da segunda derivada para funções de duas variáveis. Na Seção 3 são apresentados as principais funções do GeoGebra utilizados no artigo. O objetivo da seção é ilustrar os comandos e processos utilizados nas construções de forma geral, sem entrar em detalhes específicos. Como os *Apps* são disponibilizados ao leitor, os detalhes podem ser acompanhados diretamente. Também são disponibilizados os códigos, em anexo, os quais podem ser baixados e utilizados no GeoGebra para *desktop* ou no GeoGebra *online*. Na Seção 4 são discutidos como o centro de massa de o valor mínimo da função centro de massa se comportam com a alteração do sistema de partículas, em alguns casos particulares. Na Seção 5 são feitas as considerações finais, bem como propostas de investigações de outras situações que podem indicar uma continuidade deste artigo.

## 2 Centro de massa

As coordenadas do centro de massa de um conjunto finito de  $n$  massas pontuais, em coordenadas cartesianas no plano, são dadas por

$$G_m = (x_m, y_m) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \right) \quad (2.1)$$

em que  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas e  $m_i > 0$  é a massa da  $i$ -ésima partícula do sistema, com massa total dada por  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  ([2], [3]). O centro de massa acima é o ponto de mínimo da função

$$f_C(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left( (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right) \quad (2.2)$$

em que  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . A função  $f_C$  será denominada função centro de massa. Sua expressão é obtida somando-se os quadrados das distâncias do ponto  $(x, y)$  aos pontos  $(x_i, y_i)$ , ponderadas pelas massas  $m_i$  de cada partícula. A demonstração de que  $G_m = (x_m, y_m)$  é o ponto de mínimo global de  $f_C(x, y)$  é essencialmente a mesma apresentada em [8], com a diferença que as médias aritméticas simples das coordenadas tornam-se médias aritméticas ponderadas pelas massas das partículas. Encontrando o ponto crítico de  $f_C$  e aplicando o teste da derivada segunda para funções de duas variáveis, tem-se:

$$\partial f_{C_x} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot m_i \cdot (x - x_i) = 0 \quad \partial f_{C_y} = \sum_{i=1}^n 2m_i \cdot (y - y_i) = 0 \quad (2.3)$$

que resulta em

$$G_m = (x_m, y_m) = \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{M}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{M} \right), \quad (2.4)$$

como único ponto crítico. O determinante da matriz hessiana,  $H$ , é dado por

$$H = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_C}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_C}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_C}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_C}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n 2 \cdot m_i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n 2 \cdot m_i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

donde

$$H = \left( \sum_{i=1}^n 2 \cdot m_i \right)^2 > 0 \quad \text{e} \quad (f_C)_{xx} = \sum_{i=1}^n 2m_i > 0 \quad (2.6)$$

que, pelo teste da derivada segunda, caracteriza  $G_m$  como ponto de mínimo de  $f_C$ .

A avaliação de  $f_C$  em  $G_m$  fornece o valor mínimo  $f_C(G_m)$ , ou seja, o valor do somatório dos quadrados das distâncias ponderadas pelas massas das partículas ao ponto  $(x_m, y_m)$ .

A seguir são apresentados as principais funções do GeoGebra utilizados no artigo. O objetivo da seção é ilustrar os comandos e processos utilizados nas construções de forma geral, sem entrar em detalhes específicos. Como os *Apps* são disponibilizados ao leitor, os detalhes podem ser acompanhados diretamente. Também são disponibilizados os códigos, em anexo, os quais podem ser baixados e utilizados no GeoGebra para *desktop* ou no GeoGebra *online*.

### 3 Recursos e comandos

Os recursos utilizados foram a criação de pontos, controles deslizantes, polígonos, vetores, sequências, listas, funções de duas variáveis, curvas de nível, cores dinâmicas e funções de geração de números aleatórios. A descrição de cada um dos comandos associados pode ser encontrada no respectivo manual do GeoGebra, disponível no próprio GeoGebra <https://wiki.geogebra.org/en/Manual>.

Pontos, controles deslizantes, polígonos e vetores podem ser criados por meio da barra de ferramentas ou por meio da barra de álgebra com os comandos *Ponto*( $x_0, y_0$ ) (em inglês *Point*( $x_0, y_0$ )), *Controle Deslizante*( $min, max, step$ ) (em inglês *Slider*( $min, max, step$ )), *Polígono*(*lista de pontos*) (em inglês *Polygon*(*list of points*)), *Vetor*( $A, B$ ) (em inglês *Vector*( $A, B$ )), respectivamente.

A criação de sequências, cálculos envolvendo listas ou sequências, funções de duas variáveis, curvas de nível, cores dinâmicas e funções de geração de números aleatórios são um pouco mais complexos e requerem utilização da barra de álgebra, propriedades específicas como os modelos de cores, cálculos envolvendo planilha ou utilização da linguagem *GeoGebra Script* ou *JavaScript*.

No presente artigo, a função de densidade uniforme no intervalo fechado  $[a, b]$ , acionada no GeoGebra por meio do comando *RandomUniform*( $Min, Max$ ) e a função que gera pontos aleatórios com densidade uniforme em região específica, acionada via *RandomPointIn*(*Region*), foram utilizadas em conjunto com o comando de sequência, *Sequência*(*Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final, Incremento*) (em inglês *Sequence*(*Expression, Variable, Start Value, Final Value, Increment*)) para gerar as coordenadas das posições das partículas e os valores das massas atribuídas às partículas. O comando sequência também foi combinado com o comando de círculo com centro e raio dados para construir a sequência de círculos representando as massas das partículas; também foi empregado no processo de somatório para a construção das funções de duas variáveis a serem minimizadas. Por fim, as sequências utilizam o elemento *SetSeed=seed*, com *seed* definido em um intervalo fechado para que o processo pseudo-aleatório seja fixado e possibilite a comparação os resultados de diferentes visualizações do *App*. Os detalhes específicos de cada construção apresentada podem ser acompanhados por meio do acionamento do protocolo de construção disponível nas construções do GeoGebra.

Além do manual do GeoGebra, [5], [6] e [7], [8] são algumas referências complementares, principalmente para as cores dinâmicas utilizando o modelo RGB.


### 4 Resultados e discussões

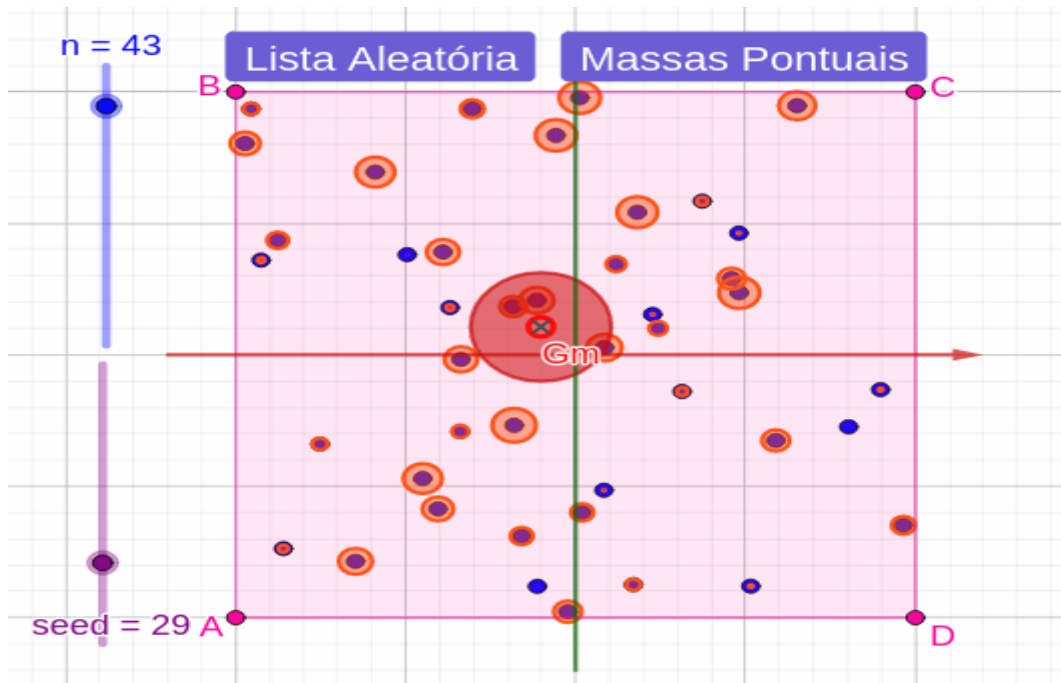
Nesta seção são apresentados os principais resultados do artigo. Inicialmente discute-se o centro de massa de um conjunto de massas pontuais cujas posições são geradas à partir de uma função de densidade de probabilidades, com as respectivas visualizações do centro de massa, função de duas variáveis e curvas de nível associadas.

A seguir, uma análise da variação do centro de massa sob deslocamentos das posições das partículas e uma análise da variação do centro de massa para rotações, em torno do centro de massa inicial, de ângulos idênticos para todas as partículas em um sistema. Em sequência, a partição de um sistema  $S$  de partículas é abordada e a visualização em termos das funções de duas variáveis é discutida. Por fim, uma discussão sobre a influência das massas sobre a função centro de massa e uma visualização 3D das curvas de nível da função centro de massa são apresentados.

#### 4.1 Função centro de massa com distribuição uniforme

A Figura 2 ilustra o centro de massa de um sistema de  $n = 43$  partículas, em que cada um dos valores das massas são provenientes de uma função de densidade de probabilidade uniforme no intervalo  $[0, 10]$  (Ver  $RandomUniform(< Min >, < Max >$  para detalhes). As coordenadas foram escolhidas por meio da função de densidade uniforme em um retângulo (Ver  $RandomPointIn(< Region >$  para detalhes). Ambas as sequências utilizam o elemento  $SetSeed = seed$ , com  $seed = n$ . Os círculos concêntricos às posições das massas pontuais são representações do valor da massa naquele ponto, obtidos por meio da imposição do raio com valor proporcional à massa. Também são especificados o centro de massa  $G_m$  com círculo concêntrico representando a massa total do sistema.

**Figura 2.** Representação das partículas no plano, distribuídas com função de densidade uniforme em retângulo e massas com valores com função de densidade uniforme no intervalo  $[0, 10]$ . Círculos concêntricos representando o valor da massa pontual. Disponível 




Fonte: Os autores.


A Figura 3 ilustra a visualização do centro de massa do sistema de partículas mostrado na Figura 2 em conjunto com a superfície da função  $f_C$ , cujo valor mínimo  $f(G_m)$  é atingido no centro de massa  $G_m$  dado em (2.1).

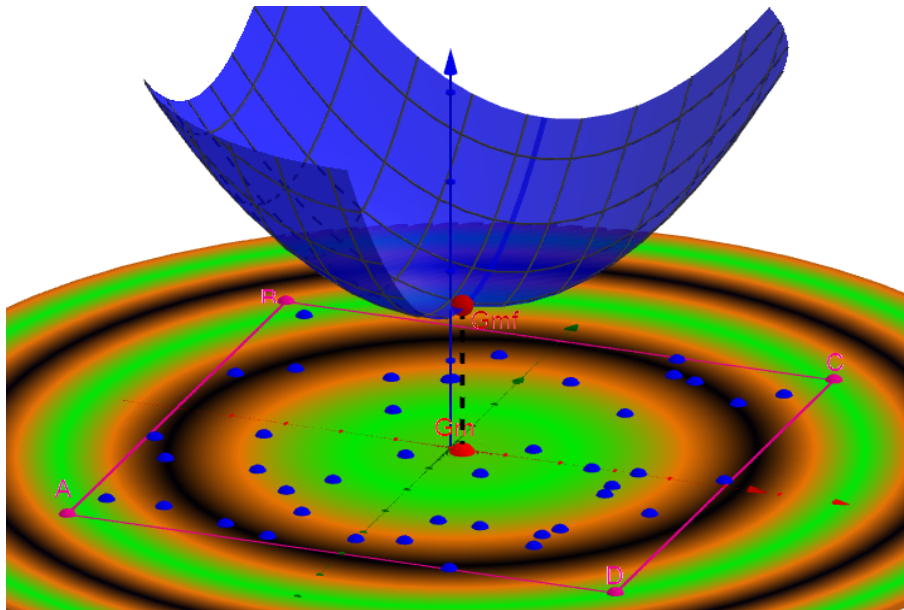
Também ilustra, no plano  $XY$ , as curvas de nível de  $f_C$ , calculadas por meio de uma conveniente escolha da constante  $K$  em um intervalo de valores de  $f_C$  em torno do valor mínimo atingido em  $G_m$ , ou seja,  $f_C(x, y) = K, K \in [\alpha \cdot f_C(G_m), \beta \cdot f_C(G_m)]$  (4.1).

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \left( (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right) = K \quad (4.1)$$

No caso da Figura 3,  $\alpha = 0,1$  e  $\beta = 10$ , mas ajustes podem ser necessários dependendo da configuração de massas utilizada.

É importante notar que o recurso das diferentes visualizações, janela gráfica 2D e janela gráfica 3D, possibilitam intercambiar os pontos de vista. Ambos os resultados, Figura 2 e Figura 3, foram obtidos por meio da escolha das janelas 2D e 3D, respectivamente, no link interativo disponível em .

**Figura 3.** Massas pontuais no plano e respectiva função  $f_C$  para a soma dos quadrados das distâncias. O centro de massa  $G_m$  são as coordenadas do valor mínimo  $f_C(G_m) = f_{G_m}$  assumido por  $f_C$ . Disponível .




**Fonte:** Os autores.

Os cálculos relativos a  $f_C$ , ou seja, os somatórios dos quadrados das distâncias ponderadas pelas constantes  $m_i, i = 1, \dots, n$  são executados por meio das funções *Soma()*, *Sequência()*, *Distância()*, *Elemento()* e lista (*list()*) (em inglês *Sum()*, *Sequence()*, *Distance()*, *Element()* e *list()*) disponíveis no GeoGebra. Os argumentos de cada uma das funções podem ser consultados diretamente no *software GeoGebra Classic Online*, por exemplo, ou observadas diretamente na Janela de Álgebra. A seguir, um exemplo de comando, com omissão dos elementos condicionais, que pode ser observado na Janela de Álgebra:

$$f(x,y) = \text{Soma}(\text{Sequência}(\text{Elemento}(\text{massa}, i) \cdot ((x - \text{Elemento}(\text{listPoints}, i))^2 + (y - \text{Elemento}(\text{listPoints}, i))^2)), i, 1, n)$$

em que *massa* é uma lista de valores numéricos, *listPoints* é um conjunto de pontos.

Por fim, a interatividade do *App*  permite explorar outras configurações distintas de massas pontuais e posições. Também permite combinar janelas 2D e 3D em uma única visualização de forma que as mudanças nas posições e valores das massas são acompanhadas das respectivas mudanças na função  $f_C$ .

## 4.2 Variação das posições das massas

Considere um sistema de partículas nas coordenadas  $A_1(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ ,  $A_2(x_2 + \delta x_2, y_2 + \delta y_2)$ ,  $\dots$ ,  $A_n(x_n + \delta x_n, y_n + \delta y_n)$ , ou seja, as massas  $m_i$  são colocadas em pontos distintos

daqueles  $(x_i, y_i)$  inicialmente adotados. Neste caso, a aplicação direta da equação (2.4) à função denominada  $f_{C_2}$  cuja expressão é dada por:

$$f_{C_2}(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left( (x - (x_i + \delta x_i))^2 + (y - (y_i + \delta y_i))^2 \right) \quad (4.2)$$

fornece:

$$G_{m_2} = (x_{m_2}, y_{m_2}) = \left( x_m + \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \delta x_i}^{\delta x_m}}{\sum_{i=1}^n m_i}, y_m + \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \delta y_i}^{\delta y_m}}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) \quad (4.3)$$

Portanto, o centro de massa do novo sistema é deslocado, em cada direção, por uma média ponderada das massas pelas variações dos deslocamentos. A avaliação da função  $f_{C_2}(G_{m_2})$  fornece a soma dos quadrados das distâncias ponderadas mínima.

Um caso particular para o cálculo de  $f_C(G_{m_2})$  é aquele no qual os deslocamentos são constantes em cada direção. Sejam  $\delta_x = \delta_{x_i}$ ,  $\delta_y = \delta_{y_i}$  os deslocamentos constantes de cada uma das partículas, então o novo centro de massa é, por meio da equação (4.3), dado por:

$$G_{m_2} = (x_{m_2}, y_{m_2}) = (x_m + \delta x_m, y_m + \delta y_m) = (x_m + \delta x, y_m + \delta y) \quad (4.4)$$

A avaliação de  $f_{C_2}$  em (4.4) fornece:

$$f_{C_2}(x_{m_2}, y_{m_2}) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left( (x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2 \right) = f_C(x_m, y_m) \quad (4.5)$$

o qual mostra que uma translação não afeta o valor mínimo atingido pela função  $f_C$ .

Um segundo caso particular é quando  $\delta x_m = 0$  e  $\delta y_m = 0$  em (4.3), mas  $\sum_{i=1}^n |\delta x_i| > 0$  e  $\sum_{i=1}^n |\delta y_i| > 0$ . Nesse caso, as mudanças de coordenadas das partículas são balanceadas de tal forma que o centro de massa não é alterado, ou seja,  $G_{m_2} = (x_{m_2}, y_{m_2}) = (x_m, y_m)$ , mas  $f_{C_2}(x_{m_2}, y_{m_2}) \neq f_C(x_m, y_m)$ , pois apesar dos pontos de mínimo serem idênticos, a avaliação da função não deve coincidir. Como exemplo, considere o caso de duas partículas de massa unitária nas coordenadas  $(-x_1, 0)$ ,  $x_1 > 0$  e  $(x_1, 0)$ , cujo centro de massa é  $(x_m, y_m) = (0, 0)$ ; agora  $(x'_1, 0) = (-x_1 - \delta x, 0)$  e  $(x'_2, 0) = (x_1 + \delta x)$ ,  $\delta x > 0$ , ainda fornecem o centro de massa  $(x_{m_2}, y_{m_2}) = (0, 0)$ ; porém a soma dos quadrados das distâncias do segundo caso é maior que a soma dos quadrados das distâncias ao considerar o primeiro caso.

$$f_{C_2}(x_{m_2}, y_{m_2}) = 2 \cdot (x_1 + \delta x)^2 > 2 \cdot (x_1)^2 = f_C(x_m, y_m) \quad (4.6)$$

O último caso particular analisado é aquele no qual cada uma das partículas é deslocada de um ângulo  $\theta$  (constante) sobre a circunferência de raio  $r_i$  igual a distância entre a posição da partícula e o centro de massa do sistema inicial, ou seja,  $r_i^2 = (x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2$ . Suponha que  $A_i(x_i, y_i)$  é a posição da partícula  $m_i$  e que  $A'_i(x'_i, y'_i)$  é a posição da partícula após rotação de ângulo  $\theta$  de  $A_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . A relação entre as posições do sistema original, denominado S, e o sistema rotacionado, denominado S', pode ser obtida por meio da fórmula da rotação em torno de  $G_m$  como segue:

$$\begin{aligned} x'_i &= (x_i - x_c) \cdot \cos(\theta) - (y_i - y_c) \cdot \sin(\theta) + x_c \\ y'_i &= (x_i - x_c) \cdot \sin(\theta) + (y_i - y_c) \cdot \cos(\theta) + y_c \end{aligned} \quad (4.7)$$

Portanto, o centro de massa do sistema rotacionado pode ser calculado pela aplicação de (2.4) às coordenadas rotacionadas (4.7):

$$\begin{aligned}
 x_{m_2} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x'_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot ((x_i - x_m) \cdot \cos(\theta) - (y_i - y_m) \cdot \sin(\theta) + x_m)}{\sum_{i=1}^n m_i} \\
 &= \frac{\cos(\theta) \left( \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_m \right) - \sin(\theta) \left( \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_m \right) + x_m \cdot \sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\
 &= x_m
 \end{aligned}$$

pois, os termos entre parenteses são nulos:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = 0$$

Analogamente, obtém-se  $y_{m_2} = y_m$ . Um caso particular da rotação de todas as partículas por ângulo constante é quando  $\theta = \pi$  radianos, ou seja, as novas posições são simétricas em relação ao centro de massa  $G_m$ .

Uma consequência desses resultados, é que se as massas dos sistemas  $S$  e  $S'$  (rotação de ângulo  $\theta$  constante) compõem um novo sistema  $W$ , a função  $f_W$  a ser minimizadas pode ser escrita como segue:

$$f_W(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left( (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 \right) \quad (4.8)$$

a qual fornece:


$$G_{m_\theta} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i + x'_i)}{2 \sum_{i=1}^n m_i}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot (y_i + y'_i)}{2 \sum_{i=1}^n m_i} \right) = G_m \quad (4.9)$$

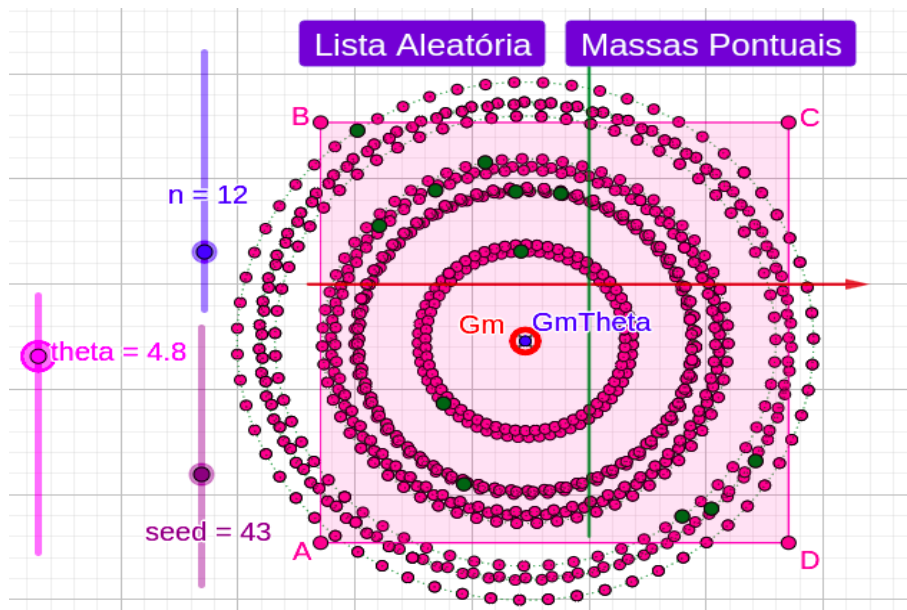
Em palavras, o centro de massa do sistema  $W$  permanece em  $G_m = G_{m_\theta}$ . No entanto, a avaliação da função  $f_W$ , que minimiza a soma dos quadrados das distâncias de todas as partículas de  $W$ , não possui o mesmo valor mínimo de  $f_C$  avaliada em  $G_m$ , pois há mais partículas no sistema. A avaliação de  $f_W$  no centro de massa (4.9) fornece:

$$\begin{aligned}
 f_W(G_m) = f_W(x_m, y_m) &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left( (x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2 + (x_m - x'_i)^2 + (y_m - y'_i)^2 \right) \\
 &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \left( (x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2 \right) = 2 \cdot f_C(x_m, y_m)
 \end{aligned} \quad (4.10)$$


pois  $d_i^2 = (x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2 = d'_i{}^2 = (x_m - x'_i)^2 + (y_m - y'_i)^2$  são os quadrados das distâncias euclidianas da posição da partícula  $i$  e respectiva partícula rotacionada em relação ao centro

de massa  $G_m$ . Este é um caso particular dos resultados mostrados na Figura 4, a qual ilustra o caso em que um ângulo  $\theta = \alpha_k \in [0, 2\pi]$  (constante) é utilizado na rotação de todas as partículas simultaneamente.

**Figura 4.** Partículas do sistema  $S$  (verde) e partículas rotacionadas de ângulo  $\theta = \alpha_k \in [0, 2\pi]$  (constante) originando o sistema  $S'$  (magenta) para  $k = 1, 2, \dots, K$ . O centro de massa  $G_{m_\theta}$  do sistema rotacionado permanece em  $G_m$  para cada ângulo  $\theta = \alpha_k$ . Disponível 



**Fonte:** Os autores.

Deve ser notado que a Figura 4 ilustra tanto o sistema original (em verde) quanto os sistemas de partículas rotacionados (em magenta) todos os ângulos  $\alpha_k$ . O *App*, disponível em , permite a exploração de outras configurações de posições das partículas do sistema  $S$  e respectivas massas associadas bem como outras possibilidades para o ângulo  $\theta$ . Neste caso a composição é formada por uma lista aleatória para as posições das partículas, uma lista aleatória para os valores das massas pontuais e uma lista de ângulos de interesse para as rotações. O centro de massa do sistema rotacionado é calculado e comparado ao centro de massa original por meio de variável booleana.

### 4.3 Função centro de massa em partições de dois conjuntos de pontos

Um ponto interessante no cálculo do centro de massa é que o conjunto de pontos em  $S$  pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos  $A$  e  $B$  quaisquer, e o centro de massa de  $A$  e  $B$ , respectivamente, darão origem ao centro de massa original.

A demonstração utilizando coordenadas pode ser encontrada, por exemplo, [4]. Em termos das variáveis  $x$  e  $y$ , a função  $f_C$  é uma somatória de contribuições que podem ser particionadas de formas distintas. Considere que  $A_j, j = 1_{j_1}, 2_{j_2}, \dots, k_{j_k}$  seja um conjunto qualquer de pontos da poligonal e  $A_j, j = (k+1)_{j_{(k+1)}}, (k+2)_{j_{(k+2)}}, \dots, n_{j_n}$  o respectivo complementar. Dessa forma, cada um dos conjuntos possui centro de massa dado pela aplicação de (2.4) aos conjuntos, cujas funções,  $f_{C1}$  e  $f_{C2}$ , são:

$$f_{C_1}(x, y) = \sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i \cdot \left( (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right) \quad (4.11)$$

$$f_{C_2}(x, y) = \sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{j_n}} m_i \cdot \left( (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right) \quad (4.12)$$

Os resultados são as expressões:

$$G_{m_1} = \left( \frac{\sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i}, \frac{\sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i} \right); G_{m_2} = \left( \frac{\sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{j_n}} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{j_n}} m_i}, \frac{\sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{j_n}} m_i} \right)$$

Agora, a função  $F_C$ , definida para os pontos  $G_{m_1}$  e  $G_{m_2}$  é dada por:


$$F_C(x, y) = M_1 \cdot \left( (x - G_{m_{1x}})^2 + (y - G_{m_{1y}})^2 \right) + M_2 \cdot \left( (x - G_{m_{2x}})^2 + (y - G_{m_{2y}})^2 \right) \quad (4.13)$$

em que  $M_1 = \sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i$  e  $M_2 = \sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{j_n}} m_i$ . Portanto, o centro de massa entre  $G_{m_1}$  e  $G_{m_2}$  é dado por:

$$G_{12_x} = \frac{\left( \sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i \right) \cdot x(G_{m_1}) + \left( \sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{j_n}} m_i \right) \cdot x(G_{m_2})}{\sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i + \sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{j_n}} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = G_{m_x} \quad (4.14)$$

Analogamente para a coordenada  $y$  do centro de massa.


$$G_{12_y} = \frac{\left( \sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i \right) \cdot y(G_{m_1}) + \left( \sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{j_n}} m_i \right) \cdot y(G_{m_2})}{\sum_{i=1_{j_1}}^{k_{j_k}} m_i + \sum_{i=(k+1)_{j(k+1)}}^{n_{j_n}} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = G_{m_y} \quad (4.15)$$

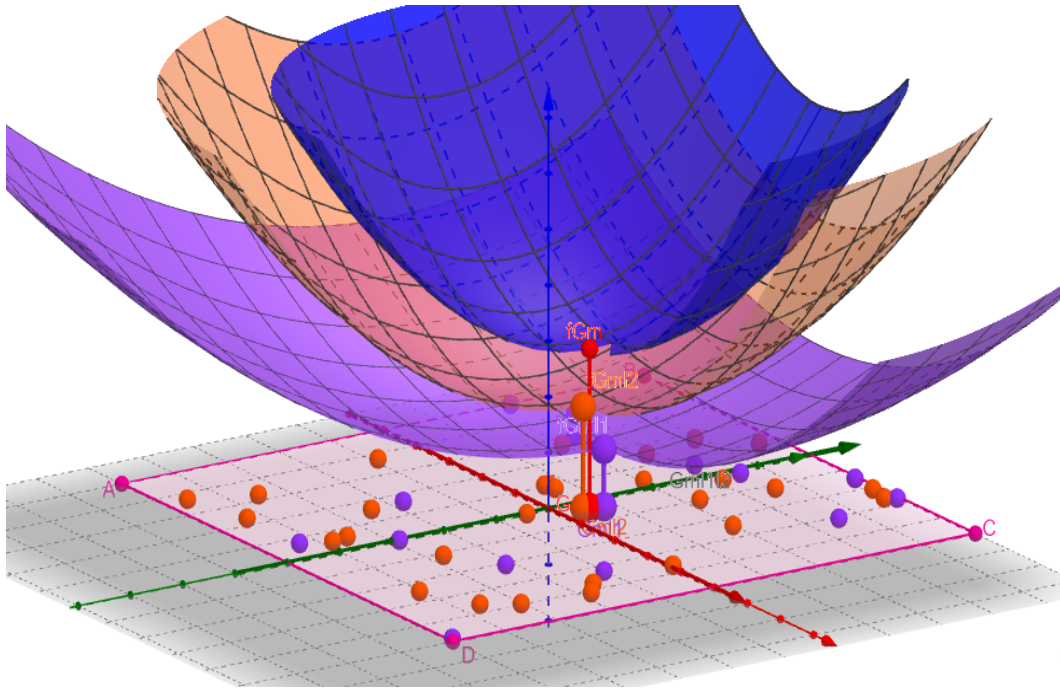
A Figura 5, com *App* interativo disponível em , três listas de pontos no plano (coordenadas das massas pontuais), respectivos centros de massa e funções de duas variáveis associadas. A lista de  $n$  pontos é a lista aleatória definida anteriormente, enquanto a segunda e terceira listas são formadas uma partição de  $n$  em dois subconjuntos com  $k$  e  $n - k$  pontos, respectivamente. No caso mostrado, a lista de  $k$  pontos é escolhida sequencialmente na lista de  $n$  pontos aleatórios, mas não há perda de generalidade em tal escolha sequencial, pois a ordenação da lista não é uma ordenação essencial, mas uma ordenação imposta durante a geração dos pontos.

As funções  $f_C$ ,  $f_{C_1}$ ,  $f_{C_2}$  de duas variáveis associadas as listas de  $n$ ,  $K$  e  $n - k$ , respectivamente, mostradas com as mesmas cores dos pontos, ou seja,  $f_C$  (em cor Azul ((0,0,255) ou #0000FF)),

$f_{C_1}$  (em cor Azul Violeta ((153, 51, 255) ou #9933FF)) e  $f_{C_2}$  (em cor Laranja ((255,85,0) ou #FF5500)).

Graficamente, os centros de massa de cada conjunto de massas pontuais são representados no plano; os respectivos valores das funções são representados por pontos no espaço; cada centro de massa é conectado ao respectivo valor da função por meio de um segmento de reta. Note que o centro de massa do sistema de  $n$  pontos está no segmento conectando os dois outros centros de massa.


**Figura 5.** Dois conjuntos com  $k$  (em Azul Violeta) e  $n - k$  (em Laranja) de partículas em posições aleatórias visualizados no plano  $XY$ . As funções  $f_{C_1}$ ,  $f_{C_2}$  e  $f_C$ , que fornecem os centros de massa  $G_{m_1}$ ,  $G_{m_2}$ ,  $G_m$ , e os respectivos valores  $f_{C_1}(G_{m_1})$ ,  $f_{C_2}(G_{m_2})$  e  $f_C(G_m)$ . Link interativo disponível 




Fonte: Os autores.

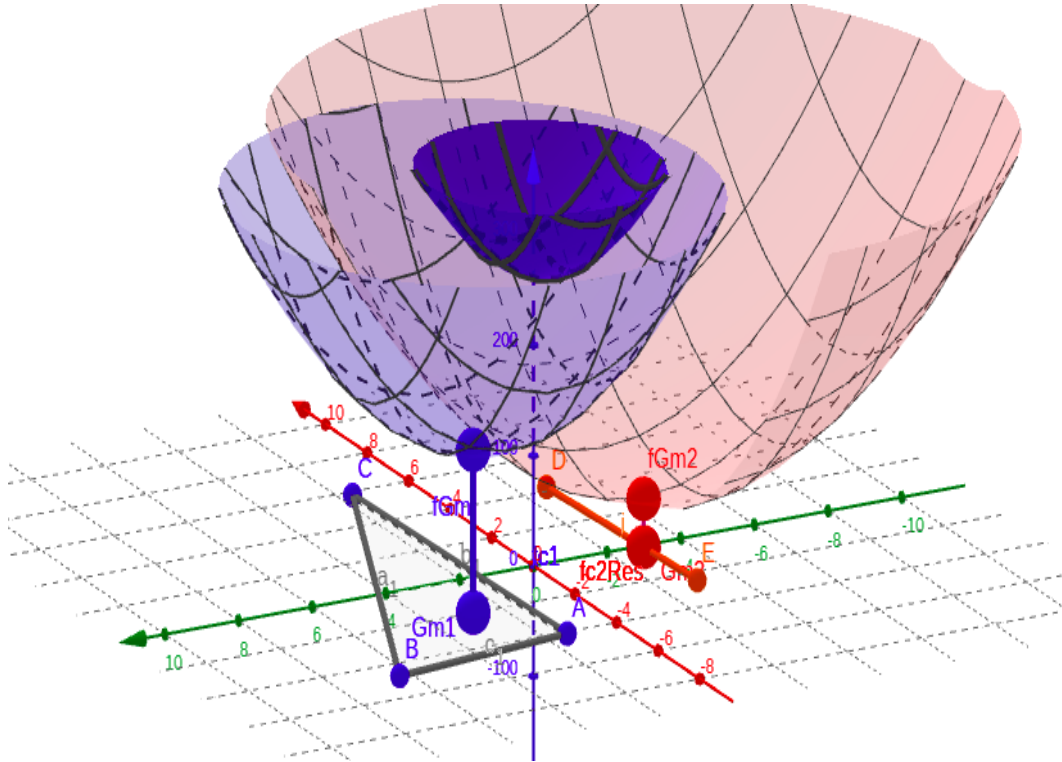
A próxima seção ilustra de forma mais pormenorizada os elementos do parágrafo anterior, ou seja, a influência das massas nos valores das funções centro de massa  $f_C$ ,  $f_{C_1}$  e  $f_{C_2}$  ao considerar um conjunto de  $n$  pontos do plano e respectiva partição em  $k$  e  $n - k$  pontos.

#### 4.4 Influência das massas na função do centro de massa

No caso anterior, o centro de massa do conjunto de partículas pode ser analisado por meio de uma partição em dois subconjuntos quaisquer. Agora, dada uma partição de  $S$ , o efeito das massas sobre a função centro de massa é analisado. A influência das massas sobre a função centro de massa,  $f_C$  pode ser observada por meio do *App* disponível no link . Neste caso, apenas um conjunto de 5 partículas em  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  foram consideradas. As partículas  $A$ ,  $B$  e  $C$  geram a superfície  $f_{C_1}$ , enquanto que as partículas  $D$  e  $E$  geram a superfície  $f_{C_2}$ . A influência das massas nas superfícies e respectivos valores mínimos em  $G_{m_1}$  e  $G_{m_2}$  pode ser observada ao modificar os valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  por meio de controles deslizantes. O ponto  $G_{m_1}$  varia no triângulo  $\Delta ABC$ , interior e arestas, enquanto que o ponto  $G_{m_2}$  varia no segmento  $\overline{DE}$ . Os valores assumidos pelas funções  $f_{C_1}$  e  $f_{C_2}$  são mostrados como segmentos verticais entre os pontos de mínimo e superfície. O centro de massa de todas as partículas

não é mostrado, mas pode ser calculado e inserido com base na seção anterior e ilustrado na Figura 6.

**Figura 6.** Funções centro de massa para dois conjuntos de partículas e respectivos valores mínimos assumidos. Link interativo  .



**Fonte:** Os autores.

A alteração dos valores das massas ocasiona mudança tanto no centro de massa quanto no valor da função. Incremento de massa em alguma partícula ocasiona mudança do centro de massa na direção do ponto associado e valor da função maior. Decremento de massa ocasiona mudança do centro de massa na direção oposta ao ponto associado e valor da função menor. Em palavras, suponha que  $m_i, i = 1, \dots, n$  sofra um incremento de  $\delta m_i = \delta m$  (constante), então a nova função centro de massa  $f_{C_\delta}$  fica alterada por  $f_{C_\delta} = f_C + \delta m \cdot f$  em que  $f_C$  é a função centro de massa do sistema original e  $f$  é um caso particular de  $f_C$  quando todas as massas são unitárias. De fato, basta considerar o caso de um incremento  $m_i + \delta m_i$ :

$$f_{C_\delta}(x, y) = \sum_{i=1}^n (m_i + \delta m_i) \cdot ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) = f_C(x, y) + \sum_{i=1}^n \delta m_i \cdot ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) \quad (4.16)$$

Agora,  $\delta m_i = \delta m$  ocasiona o resultado. Esses elementos podem ser visualizados diretamente pela alteração dos elementos respectivos na barra de álgebra do GeoGebra.

## 5 Conclusões

A combinação dos elementos de visualização e interatividade proporciona uma capacidade de exploração de diferentes pontos de vista. O centro de massa, em geral, associado à Física, foi explorado tanto no sentido da interpretação convencional quanto do ponto de vista das funções de várias variáveis. Este foco proporciona uma visão distinta do problema físico e também insere a interpretação de função de duas variáveis, a qual, além disso, permite explorar elementos tais

como as derivadas, superfícies e curvas de nível. Do ponto de vista computacional, os recursos disponíveis no Geogebra, tais como listas e sequências, permitiram definir a função  $f_C$ , cujo mínimo fornece o centro de massa de forma interativa, ou seja, permite a exploração imediata de variações tanto nas massas quanto nas posições das partículas. Também permitiram introduzir variações aleatórias tanto nas disposições quanto nas coordenadas das partículas por meio da função de densidade uniforme de probabilidades. A função de densidade uniforme foi apenas uma escolha conveniente, pois o GeoGebra possui outras opções tais como as funções de densidade Gaussiana, t, Weibull, gamma, F, entre outras. De forma mais geral, os elementos matemáticos podem ser reforçados pelos elementos de visualização; a interatividade permite explorar e compreender aspectos teóricos e também podem propiciar a formulação de novas ideias, as quais justificam a necessidade de uma argumentação lógica e o emprego do rigor matemático para a validação.

## Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

## Orcid

João Paulo Martins dos Santos  <https://orcid.org/0000-0002-0957-7119>

Marcus Vinícius de Araújo Lima  <https://orcid.org/0000-0002-9173-7328>

## Referências

1. Andreescu, T., Mushkarov, O., Stoyanov, L., *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhauser, 2006.
2. ARFKEN, George B.; GRIFFING, David F.; KELLY, Donald C.; PRIEST, Joseph. *chapter 10 - MANY-PARTICLE SYSTEMS*. In: George B. Arfken; David F. Griffing; Donald C. Kelly; Joseph Priest (Eds.). *International Edition University Physics*. Academic Press, 1984, pp. 190-210. ISBN: 978-0-12-059858-8. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-059858-8.50015-7>
3. AWREJCEWICZ, Jan. **Geometry of Masses**. In: **Classical Mechanics: Kinematics and Statics**. New York, NY: Springer New York, 2012. p. 131–185. ISBN 978-1-4614-3791-8. DOI: 10.1007/978-1-4614-3791-8\_3. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3791-8\\_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3791-8_3)
4. CARNEIRO, E. GIRÃO, F., Centro de Massa e Aplicações à Geometria. *Revista EUREKA!*, n. 21 (39-34), 2005. <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka21.pdf>.
5. HALL, J., LINGEFJÄRD, T. **Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra**, New Jersey: John Wiley&Sons, 2017.
6. LOSADA R., El color dinámico de GeoGebra, *La Gaceta de la RSME*, v. 17, n. 3, p. 525-547, 2014. [http://www.geogebra.es/color\\_dinamico/Color%20dinamico%20-%20GacRSocMatEsp.pdf](http://www.geogebra.es/color_dinamico/Color%20dinamico%20-%20GacRSocMatEsp.pdf)
7. SANTOS, J. P. M.; FIRMIANO, A.; LÓPEZ LINARES, J.; RAMALHO, M. P. O. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra. *INTERMATHS*, v. 3, n. 1, p. 70-87, 2022. <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>
8. SANTOS, J. P. M.; LIMA, M. V. de A.; JESUS, A. F. de; LINARES, J. L. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos. *INTERMATHS*, v. 3, n. 2, p. 66-82, 2022. <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309>

9. Palacios-Vélez, Ó.L., Pedraza-Oropeza, F.J.A., Escobar-Villagran, B. S., *An algebraic approach to finding the Fermat–Torricelli point*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v. 46, n. 8, p.1252-1259, 2015. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1036947>.

