

# Metodologias Ativas e a Modelagem Matemática para a Geração de Energia por meio de Placas Fotovoltaicas

Mathematical Modeling for Energy Generation through Photovoltaic Plates

Maurocir Silva <sup>a,b</sup>, Luciana Mafalda Elias de Assis <sup>a,\*</sup>, Raul Abreu de Assis <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNEMAT/Sinop, MT, Brasil; <sup>b</sup>Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso/Cuiabá, MT, Brasil

\* Autor Correspondente: [luciana.assis@unemat.br](mailto:luciana.assis@unemat.br)

**Resumo:** Neste trabalho discutimos de forma sucinta a importância do uso das metodologias ativas como a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABProj) e a Modelagem Matemática, objetivando a produção de benefícios significativos para a educação, permitindo que os estudantes desenvolvam habilidades e competências necessárias para enfrentar os desafios do mundo atual, ao mesmo tempo, em que tornam a aprendizagem da Matemática mais envolvente e significativa. Realizamos um trabalho de Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem com tema central relacionado às placas fotovoltaicas. O objetivo consiste em modelar o ângulo de inclinação de instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia buscando maximizar do fluxo de energia luminosa e assim ter maior produção de energia.

**Palavras-chave:** Aprendizagem Baseada em Projetos; Modelagem Matemática; Aprendizagem Significativa; Placas Fotovoltaicas.

**Abstract:** In this work, we briefly discuss the importance of using active methodologies such as Project-Based Learning (ABProj) and Mathematical Modeling, aiming to produce significant benefits for education, allowing students to develop the skills and competencies necessary to face the challenges of today's world, while making Mathematics learning more engaging and meaningful. We carry out Mathematical Modeling work as a teaching and learning strategy with a central theme related to photovoltaic panels. The objective is to model the inclination angle of installing photovoltaic panels for energy generation, seeking to maximize the flow of light energy and thus have greater production of energy.

**keywords:** Project-Based Learning; Mathematical Modeling; Meaningful Learning; Photovoltaic Panels.

## 1 Introdução

O saber matemático se faz fundamental atualmente, visto que, os meios de informações, comunicações e tecnologias são baseados em dados quantitativos e espaciais em diferentes representações. Isso exige das pessoas uma assimilação rápida da interpretação das informações, além da necessidade de saber resolver problemas desde os mais simples aos mais elaborados.

Assim, a Matemática deve desenvolver as capacidades intelectuais para a organização do pensamento, do raciocínio lógico e da resolução de problemas em diversas áreas.

Para Biembengut e Hein [1], a Matemática e a realidade podem ser interpretadas como dois conjuntos que se sobrepõem, sendo que a Modelagem Matemática pode ser vista como o meio interação. Dessa forma, o papel da Modelagem é demonstrar e expressar a Matemática relacionada com situações concretas, com o intuito de auxiliar na tomada de decisões, explicar e entender as mais diversas situações do nosso dia a dia. Como argumenta Bassanezi [2, p. 10]:

A habilidade de empregar matemática em situações concretas e em outras áreas do conhecimento humano consiste em tomar um problema prático relativamente complexo, transformá-lo em um modelo matemático, ou seja, traduzir a questão na linguagem de números, gráficos, tabelas, equações etc., e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos da situação concreta original [2, p. 10].

Foi realizada uma modelagem neste trabalho, buscando saber qual o melhor ângulo de instalação de placas fotovoltaicas para maximização do fluxo de energia luminosa para, assim, ter maior produção de energia.

Na Seção 2 apresentamos discussões teóricas relacionadas com o processo de ensino-aprendizagem ( com foco na Aprendizagem Baseada em Projetos e Modelagem Matemática), realizando uma breve discussão da importância da utilização de tais metodologias ativas como ferramentas para uma aprendizagem significativa e da importância da utilização dessas metodologias para a compreensão da matemática envolvida no processo de geração de energia por meio de placas fotovoltaicas. Na Seção 3, discorremos sobre a importância da geração de energia por meio de placas fotovoltaicas contextualizada atualmente, além de elucidar como funciona a geração de energia fotovoltaica e como representá-la por meio de objetos matemáticos. Na Seção 4, apresentamos as discussões finais e as recomendações observadas durante a construção do modelo matemático.

O leitor que desejar obter o detalhamento deste trabalho, poderá acessar Silva [3]. Nele, também há em detalhes uma proposta de sequência didática e atividades para serem aplicadas em sala de aula com estudantes do Ensino Básico, com a proposta de servir como ferramenta auxiliar no ensino e aprendizagem de Matemática.

## **2 Importância das metodologias ativas: aprendizagem baseada em projeto e a modelagem matemática**

As metodologias ativas são estratégias de ensino onde o aluno tem um papel de protagonista na construção de seu conhecimento, atuando de forma participativa e reflexiva. Moran [4, p. 17] afirma que

as metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa [4, p. 17].

Na busca por inovar a maneira em como se ensina Matemática aos estudantes, encontramos a Aprendizagem Baseada em Projetos e a Modelagem Matemática, que têm em sua concepção o aluno como o principal agente na construção de seu conhecimento. Moran [4], afirma que ao

usar as metodologias ativas, o aprendizado em sala de aula poderá ser vivenciado no futuro, seja na vida pessoal ou profissional.

Dessa forma, as aprendizagens significativas contribuem para a construção do conhecimento, para a melhoria da qualidade de ensino e prática de professores da Educação Básica que buscam alternativas para superar os problemas vividos na sua atuação profissional.

## 2.1 Aprendizagem Baseada em Projetos (ABProj)

Esta metodologia pretende envolver os alunos na busca de dados e da resolução de problemas complexos ou simples, relacionados ao seu cotidiano. Os projetos, em geral, são planejados em busca de uma aprendizagem significativa em que, os estudantes são os atores principais na construção da sua aprendizagem, tomando decisões e agindo em grupo ou individualmente, desenvolvendo seu pensamento lógico, crítico e criativo. A ABProj propõe uma abordagem educacional que desenvolverá indivíduos com uma compreensão abrangente da realidade, conectando a aprendizagem a situações e problemas reais. Essa abordagem visa preparar os estudantes para a aprendizagem contínua ao longo de suas vidas.

De acordo com Hernandez [5], a ABProj tem por finalidade aliar teoria à prática. Este modelo de ensino rompe com a ideia de conteúdos sequenciais e pré-estabelecidos, uma vez que os conteúdos são apresentados e discutidos na medida em que o projeto se desenvolve. Assim, torna-se necessário adquirir algum conhecimento prévio permitindo a reflexão sobre a própria prática, com a possibilidade de estar em pleno processo de melhoramento.

## 2.2 Modelagem Matemática

A modelagem é uma ferramenta de ensino em que podemos representar matematicamente uma situação real em expressões, equações ou modelos e resolvê-los interpretando suas soluções, contribuindo para o aprendizado e o conhecimento dos estudantes de forma mais significativa.

Para Kaiser [6], a Modelagem Matemática parte de uma situação problema real, onde essa situação é estruturada a fim de criar um modelo real, sendo este transformado em uma situação matemática que é resolvida com um modelo matemático e sua solução posteriormente comparada com a situação real, enquanto que para Bassanezi [2], a Modelagem Matemática é:

Um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele [2, p. 24].

Assim, a Modelagem Matemática, valoriza o conhecimento do estudante, desenvolvendo sua criticidade e raciocínio, motivando-os no processo do entendimento da realidade que o cerca. Nesse contexto, por meio da utilização de modelos matemáticos, é possível realizar previsões, fazer análises quantitativas e testar diferentes cenários, contribuindo para a compreensão e solução de problemas complexos em diversas áreas do conhecimento.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [7], alguns processos matemáticos são elencados como alternativas para o desenvolvimento das habilidades voltadas ao letramento matemático, dentre eles a Modelagem. Segundo a (BNCC),

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da

atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. [7, p. 266].

As competências específicas para a Matemática, no caso do Ensino Fundamental e Ensino Médio, sinalizam aos educadores a necessidade de metodologias que relacionem as experiências dos estudantes e a sua compreensão de mundo. Dessa maneira, o documento destaca que:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. [7, p. 523].

Ressaltamos ainda, que a Modelagem Matemática está alinhada com as exigências de documentos educacionais e que, ao adotar esta como estratégia de ensino, os educadores oportunizam o desenvolvimento de habilidades e competências dos estudantes, possibilitando aos estudantes desenvolverem a capacidade de relacionar os conteúdos que estão estudando a diversos contextos do seu cotidiano.

Como exemplo de uma abordagem utilizando Modelagem Matemática e a ABProj, apresentamos a modelagem da produção fotovoltaica de energia elétrica que desempenha um papel fundamental na transição para um futuro mais sustentável e energeticamente mais eficiente.

### **3 Placas fotovoltaicas e a geração de energia representada por meio de objetos matemáticos**

Atualmente, temos um aumento no interesse por sistemas de geração de energia renováveis, motivado pelos crescentes problemas ambientais, relacionados às formas tradicionais de geração de energia, pelo constante crescimento populacional e industrial que, conseqüentemente, necessitam de um crescimento da matriz energética devido ao aumento de consumo de energia. Por esses motivos, investimentos em sistemas de geração de energia elétrica limpa, que causem pouco impacto ambiental, começam a ter cada vez mais procura e destaque na população mundial.

Segundo Lopez [9, p. 21], “a energia solar é a fonte de energia menos poluente e menos finita conhecida até o momento”. Dentro desse contexto, temos o problema técnico de determinar o melhor ângulo de instalação de uma placa fotovoltaica para a maximização do fluxo de energia luminosa na placa e assim, obter a maior geração de energia. O autor destaca que,

A energia solar fotovoltaica é a energia obtida com a conversão direta da luz em eletricidade (efeito fotovoltaico). O efeito fotovoltaico, relatado por Edmond Becquerel, em 1839, consiste no aparecimento de uma diferença de potencial nos extremos de uma estrutura de material semicondutor, produzida pela absorção da luz [8, p. 85].

O conjunto de módulos fotovoltaicos ou painéis solares são responsáveis por captar a radiação solar e converter a energia solar em energia elétrica por meio do efeito fotovoltaico. A Figura 1 representa como funciona um sistema fotovoltaico.

**Figura 1.** Princípio de funcionamento de um sistema fotovoltaico



Fonte: [9].

Em relação à fabricação dos painéis, de acordo com Pinho [10], a produção dos módulos solares tem sofrido grande interferência governamental a partir de incentivos fiscais e ambientais. Com isso, o aumento da produção destes componentes tem reduzido os custos para a efetivação do sistema.

Para descrever certos aspectos que influenciam na geração de energia fotovoltaica, elaboramos um Modelo Matemático em que propomos analisar qual é o melhor ângulo para a instalação de uma placa fotovoltaica para maximização do fluxo de calor e assim ter maior produção de energia.

A determinação da inclinação ideal para um painel fotovoltaico é uma decisão crucial durante o planejamento do sistema. Isso se deve ao fato de que a quantidade de radiação solar recebida pelos módulos afeta diretamente a eficiência na geração de energia. Quanto maior a radiação solar incidente nos painéis, maior será a eficiência na produção de eletricidade. Dessa forma, encontrar a inclinação correta dos painéis é essencial para otimizar a captação de energia solar e maximizar a eficiência do sistema fotovoltaico. Ao determinar a inclinação ideal, é importante considerar fatores como a localização geográfica, a latitude, a estação do ano e a orientação solar.

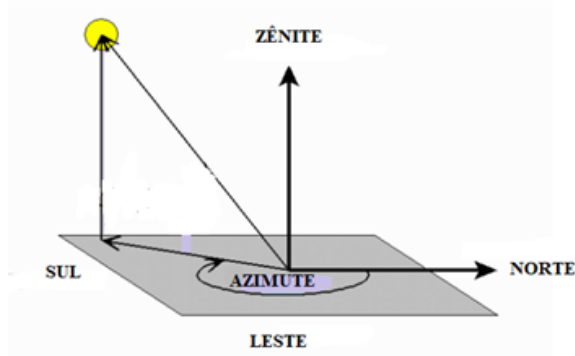
Para a construção do nosso modelo, envolvemos conceitos matemáticos que envolvem a modelagem do fluxo de radiação solar em uma placa e de vetores que apontam para o Sol e a normal à placa. A modelagem da energia total produzida ao longo do ano, obtenção dos dados de acordo com a latitude e longitude, criação de planilhas para o cálculo total e obtenção do melhor ângulo para maximização do fluxo de luminosidade e maior produção de energia.

### 3.1 Determinação do melhor ângulo das placas solares

Levando em consideração o raio da Terra e o raio do Sol e a distância entre eles, verificamos que os raios solares chegam à Terra aproximadamente paralelos, indicando que a melhor posição para uma placa fotovoltaica é aquela que forma com os raios solares um ângulo de  $90^\circ$  maximizando a absorção de calor [11]. O ângulo entre a projeção dos raios solares no plano horizontal e a direção Norte-Sul (horizonte do observador) é chamado de azimutal. O deslocamento angular é tomado a partir do Norte ( $0^\circ$ ) geográfico, sendo, por convenção, positivo quando a projeção se encontrar à direita do Sul (a Leste) e negativo quando se encontrar à esquerda (a Oeste). Adotando apenas ângulos positivos, teremos o seguinte intervalo para

o ângulo azimutal, que definimos como  $\alpha$  (*alfa*), onde  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ . A Figura 2 ilustra a representação do ângulo azimutal.

**Figura 2.** Representação do ângulo azimutal

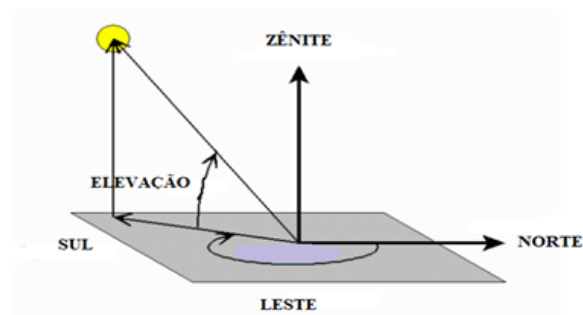


Fonte: [12].

O ângulo azimutal  $\alpha$  é uma medida angular que descreve a direção ou posição de um objeto em relação a um ponto de referência. Sua importância nas placas solares se dá juntamente com o ângulo de elevação que denotamos por  $\phi$  (*phi*) para determinar a direção de onde vêm os raios solares influenciando no total de energia solar capturada e, conseqüentemente, a eficiência da conversão de energia solar em eletricidade.

O ângulo de elevação  $\phi$  é importante para determinar a quantidade de energia solar que atinge uma determinada área em um determinado momento. É o ângulo formado entre o horizonte e o Sol, medido a partir do ponto de observação, ou seja, é compreendido entre os raios do Sol e a projeção dos mesmos sobre o plano horizontal (horizonte do observador). Para objetos visíveis temos que  $0^\circ < \phi < 90^\circ$  e para objetos abaixo do horizonte esse ângulo está compreendido entre  $-90^\circ$  e  $0^\circ$ , ou seja,  $-90^\circ < \phi < 0^\circ$ . A Figura 3 é uma representação do ângulo de elevação  $\phi$ .

**Figura 3.** Representação do ângulo de elevação



Fonte: [12].

Assim, o ângulo de elevação é importante nas placas solares porque ele determina a inclinação em relação ao horizonte em que a placa deve estar para capturar a máxima quantidade de radiação solar possível, o que afeta diretamente a eficiência da conversão de energia solar em eletricidade.

### 3.2 Modelagem de vetores que apontam para o Sol e normal a placa

Para descrevermos o vetor normal à placa ( $v_p$ ) e da norma do vetor que aponta para o Sol ( $v_s$ ), utilizaremos as coordenadas esféricas e para os vetores  $v_p$  e  $v_s$  utilizaremos as coordenadas polares.

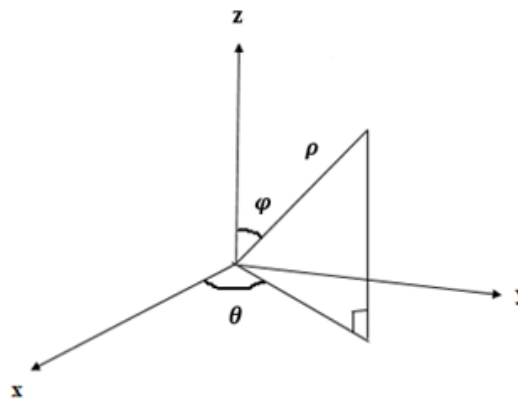
As coordenadas esféricas são um sistema de coordenadas tridimensional que descrevem a posição de um ponto no espaço em relação a um ponto de referência.

O produto escalar é determinado pelo produto da norma do vetor normal à placa ( $\|v_p\|$ ) e da norma do vetor que aponta para o Sol ( $\|v_s\|$ ) multiplicado pelo cosseno ( $\cos \beta$ ) do ângulo  $\beta$  entre eles. O fluxo de energia luminosa será máximo quando o cosseno de beta ( $\cos \beta$ ) é máximo, ou seja, quando o ângulo beta ( $\beta$ ) for igual a zero graus ( $\beta = 0^\circ$ ). Dessa forma obtemos:

$$F_{energia} = k \cdot \|v_p\| \cdot \|v_s\| \cdot \cos \beta \quad (3.1)$$

Denotamos as coordenadas de um ponto  $p$  no espaço por  $\rho$  (*rô*),  $\varphi$  (*varfi*) e  $\theta$  (*teta*), onde  $\rho$  é a distância do ponto à origem,  $\varphi$  é o ângulo que o vetor posição do ponto faz com o eixo  $z$  e  $\theta$  é o ângulo que a projeção do vetor posição do ponto no plano  $xy$  faz com o eixo  $x$ , contado a partir desse eixo, ilustrado na Figura 4.

**Figura 4.** Coordenadas esféricas



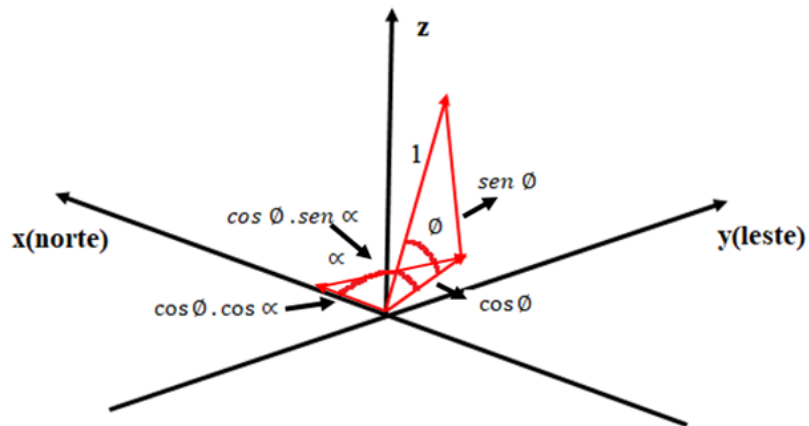
**Fonte:** [13].

Observe que  $\rho$  é um número real não-negativo e  $\varphi$  está no intervalo  $[0, \pi]$ . Já o ângulo  $\theta$ , pode ser um número real qualquer, mas assim como em coordenadas polares, daremos preferência ao valor de  $\theta$  no intervalo de  $[0, 2\pi]$ . Dessa forma, a correspondência entre as coordenadas cartesianas e esféricas é dada por:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad (3.2)$$

Com base nos sistemas de coordenadas esféricas, determinamos as coordenadas do vetor sol e do vetor placa. Para a determinação do vetor Sol ( $v_s$ ), o ângulo  $\alpha$  azimutal e o ângulo  $\phi$  de elevação são suficientes, pois tomaremos um vetor de comprimento constante e igual a 1. O vetor ( $v_s$ ), define a direção dos raios solares num determinado lugar em um determinado instante. Escrevendo um vetor de tamanho igual a um (1) que aponta na direção do Sol, e os vetores  $x, y$  e  $z$ , onde as coordenadas apontam para  $x$  (norte),  $y$  (leste) e  $z$  (para cima). Veja ilustração na Figura 5.

**Figura 5.** Coordenadas do vetor Sol



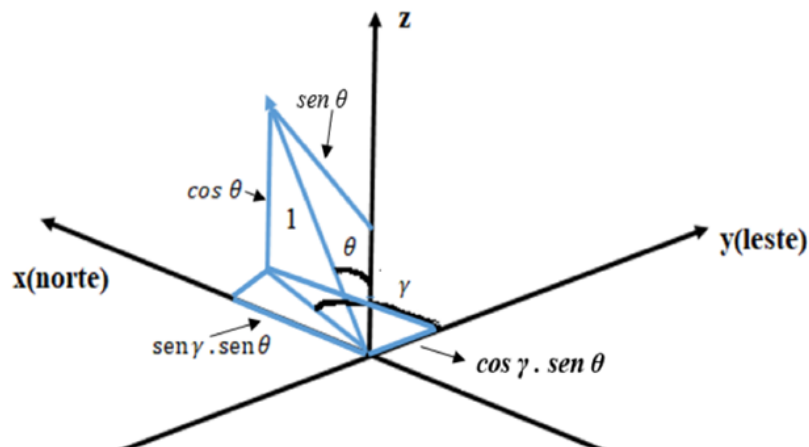
**Fonte: Os autores.**

Portanto, obtemos o vetor ( $v_s$ ), usando a trigonometria:

$$\begin{cases} x = \cos \phi . \cos \theta \\ y = \cos \phi . \sin \theta \\ z = \sin \phi \end{cases} \quad (3.3)$$

Para o vetor placa ( $v_p$ ), a inclinação placa em relação ao zênite ( $\theta$ ) e a orientação da placa solar em relação ao leste ( $\gamma$ ), são necessárias para obter o vetor. A inclinação representa o ângulo vertical entre a placa solar e o plano do horizonte e a orientação representa o ângulo horizontal entre a placa solar e o leste geográfico (Figura 6).

**Figura 6.** Coordenadas do vetor placa



**Fonte: Os autores.**

Podemos obter o vetor ( $v_p$ ), usando trigonometria:

$$\begin{cases} x' = a = \sin \gamma . \sin \theta \\ y' = b = \cos \gamma . \sin \theta \\ z' = c = \cos \theta \end{cases} \quad (3.4)$$

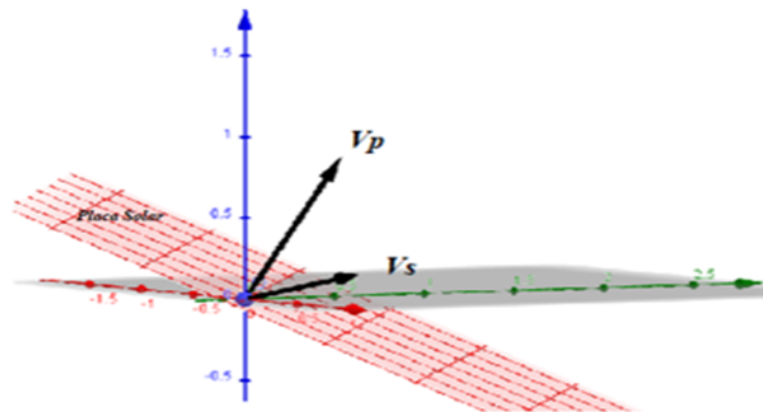
Uma vez que temos como determinar os vetores  $v_s$  e  $v_p$  a partir dos ângulos  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\gamma$ , se obtivermos uma descrição de como  $\varphi$  e  $\alpha$  variam com o tempo, teremos como calcular a produção total aproximada de energia durante o ano.

### 3.3 Modelagem do fluxo de energia luminosa em uma placa

O fluxo de energia luminosa em uma placa fotovoltaica depende da intensidade e espectro da luz solar incidente. Ele pode ser representado por um número que depende da direção e a magnitude da energia luminosa incidente sobre a placa fotovoltaica. O vetor Sol, por sua vez, representa a direção na qual a radiação solar que atinge a placa, enquanto o vetor placa indica a orientação da superfície da placa fotovoltaica em relação ao leste e ao zênite.

O cálculo do fluxo de energia luminosa a partir do vetor normal à placa fotovoltaica e do vetor que aponta na direção do Sol, consiste em calcular o ângulo que determina o fluxo máximo de captação de radiação solar da placa. Idealmente, a placa deveria, a cada instante, estar com seu vetor normal apontado na direção dos raios solares, a fim de formar um ângulo de  $90^\circ$  com os raios solares. Como isso não ocorre em tempo integral, podemos modelar o fluxo de radiação solar utilizando um vetor que aponta na direção do Sol ( $v_s$ ) e um vetor normal à superfície da placa ( $v_p$ ) (veja a Figura 7).

Figura 7. Vetor placa x vetor Sol



Fonte: Os autores.

Dessa forma, o fluxo de energia luminosa é dado pelo produto escalar entre os dois vetores, multiplicado por uma constante ( $k$ ), ou seja:

$$F_{energia} = (v_s \cdot v_p) k \quad (3.5)$$

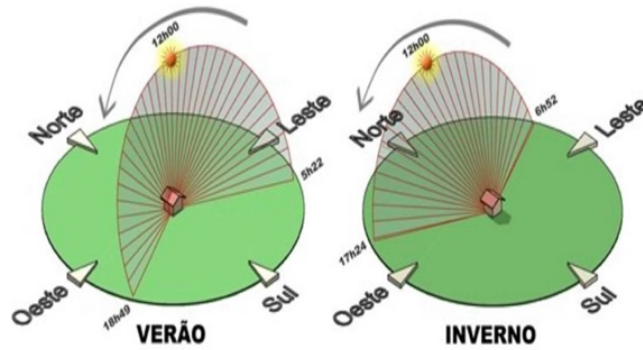
### 3.4 Modelagem da energia total produzida ao longo do ano

Já para modelarmos a energia total produzida ao longo do ano, levamos em conta que o fluxo de irradiação solar sobre uma placa fotovoltaica depende da intensidade da luz solar que atinge a superfície da Terra e do ângulo de incidência da luz solar sobre a placa. Quanto mais perpendicular for a incidência da luz solar sobre a placa, maior será o fluxo de irradiação solar.

A Figura 8 ilustra a geração de energia produzida durante um dia, sendo calculada considerando o fluxo de irradiação solar ocorrido neste dia. Para isso, utiliza-se dados de irradiação solar incidente em intervalos de tempos regulares, podendo ser matematicamente representada por  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ , em que  $t_i$  indica o instante de tempo inicial observado e  $\Delta t$  indica a variação dos instantes de tempo observados. Adotamos o intervalo de tempo de uma (1) hora

e realizamos a somatória dos fluxos encontrados nos períodos observados que determinam o fluxo de energia total aproximado para um dia.

**Figura 8.** Posição do Sol durante o dia



Fonte: [14].

Para calcularmos a energia total produzida ao longo do ano por uma placa fotovoltaica, vamos levar em consideração, a energia produzida durante o período de um dia. A produção de energia durante o período de um mês é obtida a partir da somatória da energia produzida em trinta dias amostrais ao longo do ano. Para determinar o fluxo de energia produzida durante um ano, realizamos a somatória da energia produzida por 365 dias, que corresponde o período de um ano.

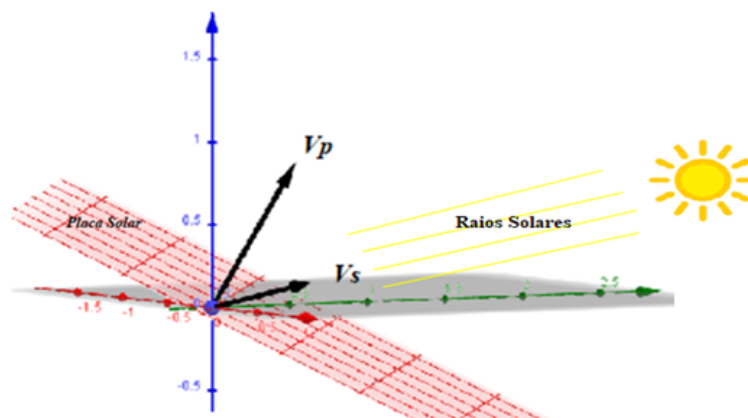
Assim, para a determinação do fluxo de energia, no primeiro período, onde  $t_1$  indica o instante de tempo correspondente a 6h, obtemos:

$$F(t_1) = (v_p \cdot v_s(t_1))k \quad (3.6)$$

$$E_1 \cong F(t_1) \cdot \Delta t \quad (3.7)$$

em que,  $F(t_1)$  indica o fluxo instantâneo de energia no instante de tempo 1,  $t_1$  representa o instante de tempo 1,  $v_p$  representa o vetor normal à placa,  $v_s(t_1)$  representa o vetor que aponta para o Sol no instante  $t_1$ ,  $k$  indica uma constante e  $E_1$  indica a quantidade aproximada de energia produzida entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ . Veja a Figura 9.

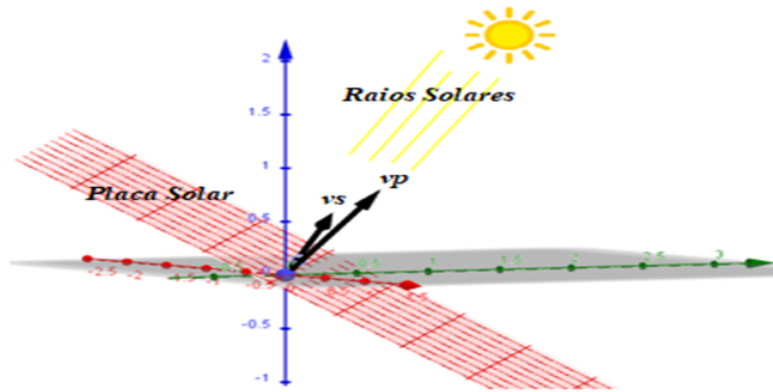
**Figura 9.** Posição do Sol às 6h



Fonte: Os autores.

Para os instantes  $t_2$  (intervalo de tempo das 7h às 8h),  $t_3$  (intervalo de tempo das 8h às 9h),  $t_4$  (intervalo de tempo das 9h às 10h),  $t_5$  (intervalo de tempo das 10h às 11h) e  $t_6$  (intervalo de tempo das 11h às 12h), os cálculos das equações que descrevem a produção de energia são obtidos de maneira análoga. A Figura 10 é um exemplo de representação da posição do Sol no intervalo de tempo das 11 às 12h.

**Figura 10.** Posição do Sol as 11 h às 12 h



**Fonte:** Os autores.

Analogamente, determinamos a produção de energia dos demais instantes de tempo, por meio da equação genérica:

$$F(t_i) = (v_p \cdot v_s(t_i))k \quad (3.8)$$

$$E_i \cong F(t_i) \cdot \Delta t \quad (3.9)$$

em que,  $F(t_i)$  indica o fluxo instantâneo de energia no instante de tempo  $i$ ,  $t_i$  representa o instante de tempo  $i$ ,  $v_p$  representa o vetor normal à placa,  $v_s(t_i)$  representa o vetor que aponta para o Sol no instante  $t_i$ ,  $k$  indica uma constante e  $E_i$  indica a quantidade aproximada de energia produzida entre os instantes  $t_i$  e  $t_{i+1}$ .

Portanto, a produção total de energia para um dia pode ser aproximada pela somatória das aproximações das energias produzidas em cada intervalo de tempo, calculadas pelas equações anteriores:

$$E_d \cong F(t_1)\Delta t + F(t_2)\Delta t + F(t_3)\Delta t + \dots + F(t_i)\Delta t + \dots + F(t_n)\Delta t \quad (3.10)$$

$$\cong E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_i + \dots + E_n \quad (3.11)$$

onde,  $E_d$  indica o fluxo total de energia produzida em um dia.

Sendo assim, a produção total de energia para um mês é igual a somatória das aproximações das energias produzidas em cada dia do mês:

$$E_{mês} \cong E_{d_1} + E_{d_2} + E_{d_3} + \dots + E_{d_i} + \dots + E_{d_m}, \quad (3.12)$$

de modo que,  $E_{mês}$  indica a energia total produzida em um mês,  $d_1$  indica o primeiro dia do mês e  $d_m$  indica o último dia do mês.

Logo, a produção total de energia produzida em um ano é igual a somatória das aproximações

das energias produzidas em cada dia do ano:

$$E_{ano} \cong E_{d_1} + E_{d_2} + E_{d_3} + \dots + E_{d_i} + \dots + E_{d_f}, \quad (3.13)$$

em que,  $E_{ano}$  indica a energia total produzida em um ano,  $d_1$  indica o primeiro dia do ano e  $d_f$  indica o último dia do ano. As fórmulas matemáticas obtidas, representam a produção aproximada total de energia durante um dia, um mês e um ano.

### 3.5 Obtenção de dados dos ângulos de elevação e ângulo azimutal

Para calcularmos a produção de energia gerada em um ano, utilizamos o site Ferramentas para designers e consumidores de energia solar [15], que fornece várias ferramentas úteis para ajudar a entender e aproveitar melhor a energia solar, além de ter uma variedade de calculadoras solares, incluindo calculadoras de ângulo solar, calculadoras de horário de nascer e pôr do Sol.

Inicialmente, acessamos no ícone Sun Position os dados da posição do sol de uma determinada localização. Esses dados podem ser consultados em [3], bem como os dados da posição do ângulo azimutal e do ângulo de elevação do Município de Campos de Júlio - MT, situada a 560 km de Cuiabá, que possui: Latitude:  $-13.7223646$  e Longitude:  $-59.2645296$ , cujas coordenadas são apresentadas em formato decimal. Escolhemos o ano, o mês e a data em nossa pesquisa obtendo os dados desejados.

O site Ferramentas para designers e consumidores de energia solar [15], apresenta um programa chamado “caminho solar” que acompanha a trajetória do Sol durante o dia desde o nascer até o pôr do Sol, que acontece aproximadamente entre 6h e 18h nesta região. Este levantamento pode ser realizado a cada intervalo de 5 minutos, 10 minutos, 20 minutos, 30 minutos e 60 minutos. Optamos por utilizar os dados com intervalos de 60 minutos, escolhendo 3 dias de cada mês com intervalos de 10 dias (dias 1, 10 e 20). Levando-se em consideração que nesta localidade há pouca variação nos ângulos de elevação e ângulo azimutal no decorrer dos dias, não há interferência significativa no cálculo do valor final da produção de energia.

No site buscamos os dados do nascer até o pôr do Sol com intervalos de uma hora, dos dias escolhido do mês, obtendo o ângulo de elevação e o ângulo azimutal de cada dia nos intervalos de tempos escolhidos. Assim, obtemos os instantes de tempo a cada 1 hora e seus respectivos ângulos de elevação e azimutal. Feito isso, calculamos o fluxo instantâneo de energia luminosa e também a produção de energia total, possibilitando assim, determinar o melhor ângulo de instalação das placas fotovoltaicas.

Em posse de todos os dados coletados até o momento, iniciamos a elaboração da nossa própria planilha no software Excel, considerando a data, o tempo, os ângulos azimutal  $\alpha$  e de elevação do sol  $\phi$ , considerando a localidade do Município de Campos de Júlio/MT, para os 3 dias de cada mês definidos anteriormente, de maio de 2022 à maio de 2023. Para maiores detalhes sobre todas as informações e cálculos, é interessante que o leitor consulte [3].

Com isso, calculamos a variação de tempo  $\Delta t$  no instante  $t$  sendo esta, a diferença entre os instantes de tempos considerados. Com isso é possível verificar se o ângulo de elevação é menor que zero, ocorrendo geralmente antes do nascer do Sol, indicando que o Sol está abaixo do horizonte. Nesse caso, consideramos que a variação de tempo  $\Delta t$  seja igual a zero, representando a situação em que a quantidade de luz solar que atinge os painéis solares é nula.

Entretanto, quando o ângulo de elevação for maior do que zero,  $\Delta t$  será maior que zero, indicando que a produção de energia é significativa, a qual é importante para nossa pesquisa. Além disso, fazemos a conversão dos ângulos em graus para radianos, definimos como o comprimento do arco dividido pelo raio. Isso facilita cálculos trigonométricos e permite o uso

direto de funções como seno, cosseno e tangente, que, em muitos softwares aceitam apenas radianos. Também convertemos os ângulos de elevação do Sol  $\phi$  e do ângulo  $\alpha$  azimutal de graus para radianos.

Com o ângulo  $\alpha$  azimutal e o ângulo  $\phi$  de elevação do Sol, determinamos o vetor Sol ( $v_s$ ) que define a direção dos raios solares num determinado lugar e num determinado instante. Escrevendo um vetor de tamanho igual a um (1) que aponta na direção do Sol, em que os eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$  apontam para o norte ( $x$ ), para o leste ( $y$ ) e para cima ( $z$ ).

Com isso, obtemos o vetor ( $v_s$ ), usando as fórmulas trigonométricas:

$$\begin{cases} x = \cos \phi \cdot \cos \alpha \\ y = \cos \phi \cdot \sin \alpha \\ z = \sin \phi \end{cases} \quad (3.14)$$

Com isso, obtemos os valores de  $x(t)$  que corresponde ao produto do cosseno do ângulo de elevação do Sol  $\phi$  com o cosseno do ângulo azimutal  $\alpha$ , de  $y(t)$  que é igual ao produto entre o cosseno do ângulo de elevação do Sol  $\phi$  com o seno do ângulo azimutal  $\alpha$  e de  $z(t)$  que corresponde ao seno do ângulo de elevação do Sol  $\phi$ .

Para a determinação do vetor placa ( $v_p$ ), são necessários os cálculos da inclinação da placa em relação ao zênite  $\theta$  e a orientação da placa solar em relação ao leste  $\gamma$ . A inclinação representa o ângulo vertical entre a placa solar e o plano do horizonte e a orientação representa o ângulo horizontal entre a placa solar e o leste geográfico.

Dessa forma, as coordenadas ( $a, b, c$ ) do vetor placa  $v_p$  é obtido a partir das fórmulas trigonométricas:

$$\begin{cases} a = \sin \gamma \cdot \sin \theta \\ b = \cos \gamma \cdot \sin \theta \\ c = \cos \theta \end{cases} \quad (3.15)$$

A coordenada  $a$  do vetor é obtida a partir do produto do seno do ângulo de inclinação  $\gamma$  pelo seno do ângulo da direção da placa  $\theta$ , a coordenada  $b$  é dada pelo produto do cosseno do ângulo de inclinação  $\gamma$  pelo seno do ângulo da direção da placa  $\theta$  e a coordenada  $c$  é dada pelo cosseno do ângulo da direção da placa  $\theta$ . De posse dos dados do vetor Sol  $v_s$  e do vetor placa  $v_p$  a partir dos ângulos  $\phi$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  e  $\gamma$ , obtemos uma descrição de como o fluxo de energia varia com o tempo e assim podemos calcular a o fluxo de energia luminosa durante o ano.

O fluxo de energia luminosa total é proporcional ao produto interno entre os vetores do Sol e os vetores da placa. Assim, temos que o fluxo de energia luminosa total é dado pelo produto da coordenada  $x(t)$  do vetor Sol pela coordenada  $a$  do vetor placa somado com o produto coordenada  $y(t)$  do vetor Sol pela coordenada  $b$  do vetor placa somado com o produto da coordenada  $z(t)$  do vetor Sol pela coordenada  $c$  do vetor placa.

Vale observar que, quando o ângulo de elevação do Sol  $\phi$  for menor do que zero, fixamos que o fluxo de energia luminosa será igual a zero, ocorrendo, em geral, antes do nascer do Sol e, dessa forma, não teremos produção de energia neste intervalo de tempo. E quando o ângulo de elevação do Sol  $\phi$  for maior que zero, a produção de energia luminosa é significativa, sendo é essencial para ser contabilizada para a determinação do fluxo de energia luminosa total.

Com o fluxo de energia luminosa determinado, determinamos o fluxo de energia luminosa total de energia luminosa gerada pela placa fotovoltaica durante o período de um ano, obtido pelo produto do fluxo de energia luminosa pela variação de tempo  $\Delta t$ , chegando a um total de energia luminosa produzida de 11,8129162 Wh/m<sup>2</sup>.

Portanto, com a produção total de energia luminosa gerada pela placa fotovoltaica durante

o período de um ano, podemos determinar por meio do Solver (Método GRG Não Linear) os ângulos de inclinação e de direção da placa fotovoltaica.

### 3.6 Uso do Solver (Método GRG Não Linear) para otimização da produção total de energia e obtenção do melhor ângulo de inclinação

Utilizamos o Solver para a determinação do ângulo de inclinação  $\gamma$  e do ângulo que indica a direção da placa  $\theta$  do nosso modelo. O Solver é uma ferramenta computacional que auxilia na resolução de problemas de maximização, minimização e determinação de zeros de funções. Para tanto, escolhemos células variáveis e uma célula destino. Em particular, maximizamos o valor da célula que contém a somatória fluxo de energia luminosa. Assim, o ângulo  $\gamma$  obtido que indica a direção da placa é de 78,522556 graus ou 1,3704771 radianos e o ângulo de inclinação  $\theta$  obtido é de 15,525273 graus ou 0,2709671 radianos.

Em posse desses valores, fizemos uma comparação com outras fontes para verificarmos a eficiência de nosso modelo. Inicialmente, utilizamos a ferramenta do site CRESESB - Centro de Referência para Energia Solar e Eólica Sérgio Brito/CEPEL - Centro de Pesquisas de Energia Elétrica [16], consultando o programa SunData v 3.0., para verificar qual o ângulo de inclinação recomendado.

O programa SunData v 3.0. destina-se ao cálculo da irradiação solar diária média mensal em qualquer ponto do território nacional e constitui-se de uma tentativa do CRESESB em oferecer uma ferramenta de apoio ao dimensionamento de sistemas fotovoltaicos, o qual determina o ângulo de inclinação de instalação de uma placa fotovoltaica a partir das coordenadas geográficas de uma determinada localidade.

No site pesquisamos os dados do município de Campos de Júlio, o qual apresenta coordenadas de latitude igual  $-13.7223646$  graus e de longitude igual a  $-59.2645296$  graus, onde o ângulo de inclinação de instalação de uma placa fotovoltaica recomendado é igual a 14 graus, indicando que a diferença entre o ângulo modelado e o indicado é de aproximadamente 10,8948%. Assim, observamos que nosso modelo ficou muito próximo do recomendado pelo site, o que é uma indicação da eficiência e veracidade do mesmo.

A segunda comparação foi realizada com base na Figura 11, consultada em [17], a qual indica que a inclinação de uma placa fotovoltaica com latitude geográfica do local igual a uma variação de 11 a 20 graus, o ângulo de inclinação recomendado é igual a latitude do local. Neste caso, para o município de Campos de Júlio, a inclinação da placa fotovoltaica seria igual a 13.7223646 graus, cuja diferença entre o ângulo modelado e o indicado é de aproximadamente 13,1384%, ficando próximo do encontrado em nosso modelo que é de 15,525273 graus.

**Figura 11.** Ângulo de inclinação pela latitude geográfica.

Latitude geográfica do local	Ângulo de inclinação recomendado
0° a 10°	$\alpha = 10^\circ$
11° a 20°	$\alpha = \text{latitude}$
21° a 30°	$\alpha = \text{latitude} + 5^\circ$
31° a 40°	$\alpha = \text{latitude} + 10^\circ$
41° ou mais	$\alpha = \text{latitude} + 15^\circ$

Fonte: [17]

Para melhoramento do modelo apresentado recomendamos alguns ajustes na tabela presente em [3] onde foram inseridos os dados, pois sabemos que a quantidade de energia solar produzida ao longo do dia varia dependendo de vários fatores, incluindo a localização geográfica, a época do ano e as condições meteorológicas. No entanto, geralmente, o horário em que a energia solar atinge seu pico de produção é durante o meio-dia solar. Assim, recomendamos indicar pesos maiores às horas do dia as quais temos uma maior energia nos raios solares, sendo o intervalo de tempo entre 10 e 15 horas, além de considerar os meses do ano que apresentem uma maior produção de energia luminosa, e assim, aprimorar o modelo.

#### 4 Considerações finais

A partir da pesquisa envolvendo o modelo apresentado, tivemos acesso às informações e conceitos que auxiliam no entendimento da Modelagem Matemática aplicada ao tema Placas Fotovoltaicas. Utilizando uma situação real, realizamos a coleta de informações para a definição de conceitos, busca de dados para construção de tabelas para procedermos com os cálculos para obtenção do ângulo de inclinação de instalação de uma placa fotovoltaica para a maximização do fluxo de energia luminosa e dessa forma, ter maior produção de energia. Quando comparados os resultados apresentados com outras fontes, observamos que nosso modelo ficou muito próximo do recomendado, o que é uma indicação da eficiência e veracidade do mesmo.

Assim, acreditamos que as Metodologias ativas por meio da ABProj e da Modelagem Matemática são estratégias de ensino capazes de promover uma compreensão mais profunda, fazendo com que os estudantes desenvolvam conexões entre a teoria aprendida em sala de aula e o mundo real. A modelagem desenvolve atividades, a fim de que os professores se tornem mediadores do ensino e os estudantes, protagonistas de sua aprendizagem, se tornem mediadores de ensino, aprendendo a trabalhar em equipe, ouvindo diferentes perspectivas e construindo consenso e conhecimento em conjunto.

Acerca das limitações deste estudo, ressalta-se a importância de uma análise mais detalhada da eficiência das placas fotovoltaicas para a maximização do fluxo de energia luminosa, considerando alguns parâmetros para a determinação do melhor ângulo de inclinação das mesmas.

Portanto, uma amostra de dados maior presente em [14], poderia conduzir a resultados ainda melhores, servindo de indicativo para estudos futuros. Sugerimos que a coleta de dados seja feita com intervalos de tempo menores para a obtenção da determinação dos ângulos de elevação e azimutal. Recomendamos também, considerar os 30 dias do mês e não apenas 3 dias do mês para coleta dos dados, pois forneceria uma amostra maior de dados para a determinação do fluxo de energia luminosa total, a fim de encontrar o melhor ângulo de instalação das placas fotovoltaicas.

Outros fatores importantes para melhoramento da pesquisa são: atribuir pesos maiores para os intervalos de horas do dia que tem maior produção de energia luminosa, fazer levantamento de dados sobre essa questão e verificar quais meses do ano tem maior produção de energia luminosa e considerar pesos maiores para esses meses. Acreditamos que, com essas modificações, seja possível obter resultados ainda mais próximo do real para o modelo.

Sugerimos que modelagem proposta neste trabalho possa ser aplicada em sala de aula, oportunizando a utilização do Modelo no contexto do Ensino Básico, por meio da Aprendizagem Baseada em Projetos e da Modelagem Matemática, consolidando assim estas metodologias na prática docente conforme apresentado em [3].

## Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

## Fontes de Financiamento

Não há.

## Orcid

Maurocir Silva  <https://orcid.org/0009-0008-5335-460X>

Luciana Mafalda Elias de Assis  <https://orcid.org/0000-0002-7247-0429>

Raul Abreu de Assis  <https://orcid.org/0000-0002-0473-9211>

## Referências

1. M. S. Biembengut e N. Hein, “Modelagem Matemática no Ensino”, 3<sup>a</sup> ed. São Paulo: Editora Contexto, 2015.
2. R. C. Bassanezi, “Modelagem Matemática: teoria e prática”, São Paulo: Editora Contexto, 2003.
3. M. Silva. Placas Fotovoltaicas – Aprendizagem Baseada em Projetos: uma aplicação de Modelagem Matemática para o Ensino Médio. Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT, Matemática, Universidade Estadual de Mato, 2023.
4. J. Moran, “Mudando a educação com metodologias ativas. In: A.C. Souza e O. E. T. Morales”. Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens. Ponta Grossa – PR: Foca Foto – PROEX/UEPG, 2015.
5. F. Hernandez e M. A. Ventura. Organização do currículo por projetos de trabalho. Porto Alegre: Artmed, 1998.
6. G. Kaiser e B. Schwarz e S. Tiedemann. Future teachers’ professional knowledge on modeling. In: Modeling Students’ Mathematical Modeling Competencies. Springer, Boston, MA, 2010. p. 433-444.
7. Brasil, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>.
8. R. A. Lopez. Energia solar para produção de eletricidade. São Paulo: Artliber, 2012.
9. Alpha Solar Energia Sustentável. Disponível em: <https://alphasolar.com.br/sistema-fotovoltaico-de-energia-solar/>.
10. J. Pinho e M. Galdino. Manual de engenharia para sistemas fotovoltaicos. Rio de Janeiro: Cepel-Cresesb, 2014.
11. R. Asth. Sol: o que é, características, camadas e distância da Terra. Toda Matéria, [s.d.]. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/sol/>.
12. Memorial Spacelights. Disponível em: <https://www.celestis.com/resources/faq/what-are-the-azimuth-and-elevation-of-a-satellite/>.
13. Responde aí. Coordenadas Esféricas. Disponível em: <https://www.respondeai.com.br/conteudo/calculo/integrais-triplas/mudanca-para-coordena-das-esfericas/533>.
14. A & C Arquitetura. Posicionamento da Edificação com relação ao Sol. Disponível em: <http://aec.arq.br/48-2/>.
15. Ferramentas para designers e consumidores de energia solar. Disponível em: [www.sunearthtools.com](http://www.sunearthtools.com).

16. Centro de Referência das Energias Solar e Eólica Sergio de S. Brito / CEPEL - Centro de Pesquisas de Energia Elétrica. Disponível em: <http://www.cresesb.cepel.br/index.php#data>.
17. Manual Slib. Disponível em: <https://www.manualslib.com/manual/2107347/Bosch-C-Si-M60-Na-30119.html?page=7#manual>.

**Nota dos Editores:** As declarações, opiniões e dados contidos em todas as publicações são de responsabilidade exclusiva do(s) autor(es) e colaborador(es) e não das **Edições UESB** e/ou do(s) editor(es). As Edições UESB e/ou o(s) editor(es) se isentam de responsabilidade por qualquer dano a pessoas ou bens resultante de quaisquer ideias, métodos, instruções ou produtos referidos no conteúdo.

