

# O Baricentro como Ponto Crítico da função Média Geométrica entre duas determinadas distâncias em um triângulo qualquer

The barycenter as the critical point of the geometric mean function between two given distances in any given triangle

Rogério César Santos <sup>a,\*</sup>, Ruthyelen Cristina Machado de Freitas <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil; <sup>b</sup>Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal, Brasília, DF, Brasil

\* Autor Correspondente: [professorrogeriocesar@gmail.com](mailto:professorrogeriocesar@gmail.com)

**Resumo:** O presente artigo tem por objetivo estudar o Baricentro de um triângulo como ponto crítico de uma função. A função considerada é a Média Geométrica entre duas determinadas distâncias, no triângulo. Na demonstração, são utilizados a Lei dos Cossenos, o Teorema de Stewart e o Cálculo Diferencial. O problema é verificado usando o software GeoGebra. O problema possui potencial para ser usado em aulas de Geometria ou Cálculo Diferencial no Ensino Superior.

**Palavras-chave:** Mediana; Baricentro; Otimização; Média Geométrica.

**Abstract:** The present article aims to study the centroid of a triangle as a critical point of a function. The considered function is the geometric mean between two specific distances within the triangle. In the demonstration, the Law of Cosines, Stewart's Theorem, and Differential Calculus are employed. The problem is verified using the GeoGebra software. It has the potential to be used in geometry or differential calculus classes in higher education.

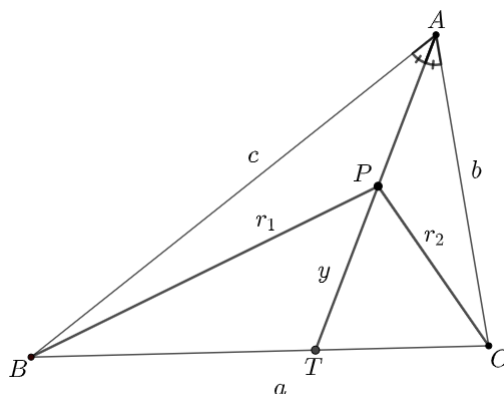
**keywords:** Median; Centroid; Optimization; Geometric Mean.

## 1 Introdução

Os trabalhos [1] e [2] provaram por diferentes caminhos o seguinte resultado: dada a Bissetriz  $AT$  de um triângulo  $ABC$ , ilustrado na figura 1, então o ponto  $P$  sobre  $AT$  que otimiza a razão  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{PB}{PC}$  é o incentro. Os artigos [3] e [4] trouxeram generalizações e outras considerações sobre o estudo da razão  $\frac{r_1}{r_2}$ , tomando cevianas quaisquer a partir de  $A$ .

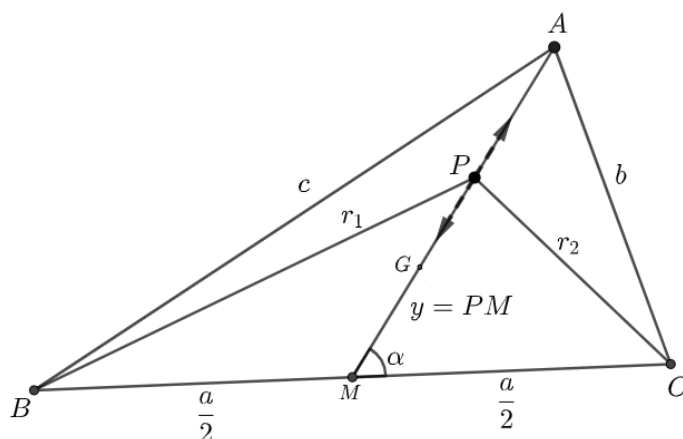
Há um trabalho em submissão dos presentes autores que mostra que, trocando a Bissetriz pela Mediana, ilustrada na figura 2, e deslizando  $P$  sobre  $AM$ , nem sempre o Baricentro  $G$  é o ponto que otimiza a razão  $\frac{r_1}{r_2}$ .

**Figura 1.** Ponto  $P$  sobre a Bissetriz  $AT$  e a razão  $r_1/r_2$ .



**Fonte:** figura construída no GeoGebra pelos autores.

**Figura 2.** O Baricentro  $G$  como possível solução de um Problema de Otimização.



**Fonte:** figura construída no GeoGebra pelos autores.

Nessa linha de investigação sobre possíveis funções de  $r_1$  e  $r_2$ , o objetivo do presente artigo, ainda na Mediana  $AM$ , é analisar o ponto que otimiza a Média Geométrica  $\sqrt{r_1 r_2}$ , ao invés da razão  $\frac{r_1}{r_2}$ , que pode ser sumarizado no seguinte teorema:

**Teorema 1.1.** *Seja dado um triângulo  $ABC$  cujos lados são  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $AC = b$ , ilustrado na figura 2. Nele, sejam dados a Mediana  $AM$ , um ponto móvel  $P$  sobre  $AM$ , o ângulo  $\alpha = \widehat{AMC}$ , agudo por hipótese,  $y = PM$ ,  $PB = r_1(y)$  e  $PC = r_2(y)$ . Dada a função  $f(y) = \sqrt{r_1(y)r_2(y)}$ , que calcula a Média Geométrica entre  $r_1$  e  $r_2$ , então:*

- 1) se  $\alpha \geq 45^\circ$ , então  $y = 0$  é Ponto de Mínimo de  $f$ , único Ponto Crítico.
- 2) se  $\alpha < 45^\circ$ , então  $y = 0$  é Ponto de Máximo de  $f$ , enquanto que  $y = \pm \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1}$  são Pontos de Mínimo, e não há outros Pontos Críticos.
- 3) na situação 2), o Ponto de Mínimo positivo  $y = \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1}$  incide no Baricentro  $G$  do triângulo se e somente se

$$4a^4 - 7a^2(b^2 + c^2) + [7(b^4 + c^4) - 22b^2c^2] = 0.$$

## 2 A demonstração do teorema

*Demonstração.* A função  $f(y) = \sqrt{r_1(y)r_2(y)}$ , que dá a Média Geométrica que será estudada, é igual a, de acordo com a Lei dos Cossenos nos triângulos  $PMB$  e  $PMC$ :

$$f(y) = \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + y^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot y \cdot \cos(\pi - \alpha)} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + y^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot y \cdot \cos \alpha}} \iff$$

$$f(y) = \sqrt{\sqrt{\frac{a^2}{4} + y^2 + a \cdot y \cdot \cos \alpha} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + y^2 - a \cdot y \cdot \cos \alpha}}. \quad (2.1)$$

Definindo  $g(y) = f^4(y)$  e desenvolvendo, tem-se:

$$g(y) =$$

$$\left(\frac{a^2}{4} + y^2 + a \cdot y \cdot \cos \alpha\right) \cdot \left(\frac{a^2}{4} + y^2 - a \cdot y \cdot \cos \alpha\right) =$$

$$\frac{a^4}{16} + \frac{a^2 y^2}{4} - \frac{a^3 y \cos \alpha}{4} + \frac{a^2 y^2}{4} + y^4 - a y^3 \cos \alpha + \frac{a^3 y \cos \alpha}{4} + a y^3 \cos \alpha - a^2 y^2 \cos^2 \alpha \iff$$

$$g(y) = y^4 + a^2 y^2 \left(\frac{1}{2} - \cos^2 \alpha\right) + \frac{a^4}{16}.$$

Como  $f(y) = \sqrt[4]{g(y)}$ , então as abscissas  $y$  dos pontos de Máximo e de Mínimo de  $g(y)$  coincidem com as abscissas dos pontos de Máximo e de Mínimo de  $f(y)$ , respectivamente. Afinal, a função  $r(t) = \sqrt[4]{t}$  é crescente para  $t \geq 0$ .

Portanto, será estudada a Derivada de  $g(y)$ :

$$g'(y) = y \left[4y^2 + a^2(1 - 2 \cos^2 \alpha)\right].$$

Dividindo em casos e subcasos, tem-se:

### 2.1 O caso $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$ .

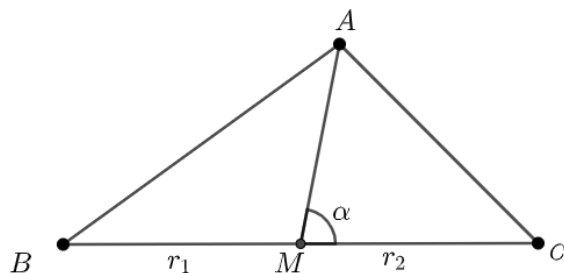
#### 2.1.1 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

Nesse subcaso,  $g'(y) = 4y^3$ , portanto,  $g'(y) = 0 \iff y = 0$  e, pelo Teste da Primeira Derivada,  $y = 0$  é Ponto de Mínimo de  $g$  e, portanto, Mínimo de  $f$ .

Observa-se que, nesse caso,  $y = 0$  é tal que  $P = M$ , ponto médio de  $BC$ , conforme ilustra a figura 3. Identificando  $y = 0$  com seu correspondente ponto  $P = M$ , pode-se dizer que  $M$  é, nesse caso, Ponto de Mínimo de  $f$ .

Conforme será visto a seguir, o mesmo ocorrerá para  $\alpha > \frac{\pi}{4}$ , o próximo subcaso.

**Figura 3.** nos subcasos  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ou  $\alpha > \frac{\pi}{4}$ ,  $M$  é Ponto de Mínimo.



**Fonte:** figura construída no GeoGebra pelos autores.

### 2.1.2 $\alpha > \frac{\pi}{4}$ .

Nesse subcaso,

$$g'(y) = 0 \iff y [4y^2 + a^2(1 - 2 \cos^2 \alpha)] = 0 \iff$$

$$y = 0 \text{ ou } y^2 = \frac{a^2}{4}(2 \cos^2 \alpha - 1) \iff$$

$$y = 0 \text{ ou } y = \pm \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1},$$

que são os possíveis Pontos Críticos de  $g$ .

Porém, como  $\alpha > \frac{\pi}{4}$ , então,  $\cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ou seja,  $2 \cos^2 \alpha - 1 < 0$ . Logo, só existirá o Ponto Crítico  $y = 0$ .

Será aplicando o Teste da Segunda Derivada em  $y = 0$ . Derivando  $g'(y)$ , se obtém:

$$g''(y) = 12y^2 + a^2(1 - 2 \cos^2 \alpha). \quad (2.2)$$

Então,  $g''(0) = a^2(1 - 2 \cos^2 \alpha) > 0$ . Assim,  $y = 0$ , identificado por  $M$  na figura 3, é, como no subcaso anterior, Ponto de Mínimo de  $g$  e, portanto, de  $f$ . Encerra-se, assim, o primeiro caso do Teorema.

### 2.2 O caso $\alpha < \frac{\pi}{4}$ .

Novamente,  $g'(y) = 0 \iff y = 0$  ou  $y = \pm \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1}$ , que são os Pontos Críticos de  $g$ .

Como  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ , então,  $\cos \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ou seja,  $2 \cos^2 \alpha - 1 > 0$ .

Logo, deixando  $P$  deslizar sobre toda a reta suporte da Mediana  $AM$ , os três Pontos Críticos acima existem e são distintos, os quais serão classificados agora pelo Teste da Segunda Derivada. Sabe-se que

$$g''(y) = 12y^2 + a^2(1 - 2 \cos^2 \alpha).$$

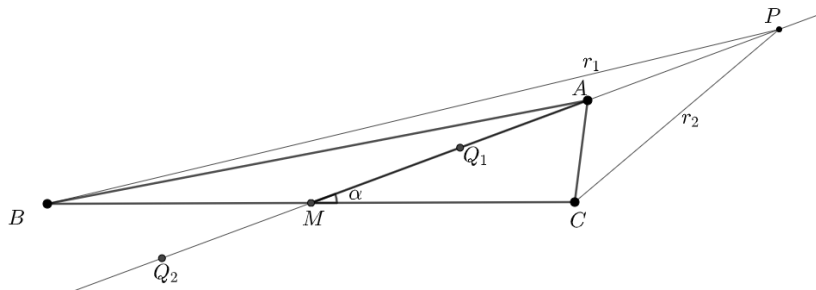
Logo, para  $y = 0$ ,  $g''(0) = a^2(1 - 2 \cos^2 \alpha) < 0$ . Assim,  $y = 0$ , que incide sobre  $M$ , é Ponto de Máximo de  $g$  e, portanto, de  $f$ .

Já para  $y = \pm \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1}$ ,

$$\begin{aligned} g'' \left( \pm \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1} \right) &= 12 \left( \pm \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1} \right)^2 + a^2(1 - 2 \cos^2 \alpha) = \\ &= 3a^2(2 \cos^2 \alpha - 1) - a^2(2 \cos^2 \alpha - 1) = \\ &= 2a^2(2 \cos^2 \alpha - 1) > 0. \end{aligned}$$

Logo,  $y = \pm \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1}$ , identificados por  $Q_1$  e  $Q_2$  na figura 4, são pontos de Mínimo de  $g$  e, portanto, de  $f$ .

**Figura 4.** Caso  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ .



**Fonte:** figura construída no GeoGebra pelos autores.

Agora, resta provar a parte 3) do Teorema, que diz: no caso 2) em que  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ , então o ponto crítico positivo  $y = \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1}$  coincide com o Baricentro  $G$  do triângulo  $ABC$  se e somente se

$$4a^4 - 7a^2(b^2 + c^2) + [7(b^4 + c^4) - 22b^2c^2] = 0. \quad (2.3)$$

Será provada a Ida desta afirmação, primeiramente.

As hipóteses são:

$$\alpha < \frac{\pi}{4}$$

e

$$\frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{AM}{3}.$$

A tese é que vale a equação (2.3).

Pela Lei dos Cossenos no triângulo  $AMC$  na figura 4, tem-se:

$$b^2 = AM^2 + \frac{a^2}{4} - 2AM \frac{a}{2} \cos \alpha. \quad (2.4)$$

Aplicando o Teorema de Stewart para a Mediana  $AM$ , obtém-se:

$$4AM^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) \iff$$

$$AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) em (2.4), tem-se:

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}} \cos \alpha \iff \\ b^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - a\sqrt{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}} \cos \alpha \iff \\ a\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \cos \alpha &= c^2 - b^2 \iff \\ a^2[2(b^2 + c^2) - a^2] \cos^2 \alpha &= (c^2 - b^2)^2 \iff \\ \cos^2 \alpha &= \frac{(c^2 - b^2)^2}{2a^2(b^2 + c^2) - a^4}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Observa-se que (2.5) e (2.6) valem para qualquer triângulo.

Por hipótese,

$$\frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Sendo assim, substituindo (2.5) e (2.6) em (2.7), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}}{3} &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{(c^2 - b^2)^2}{2a^2(b^2 + c^2) - a^4} - \frac{1}{2}} \iff \\ \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} &= \frac{9a^2}{2} \left( \frac{(c^2 - b^2)^2}{2a^2(b^2 + c^2) - a^4} - \frac{1}{2} \right) \iff \\ 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 9a^2 &= 18a^2 \left[ \frac{c^4 - 2b^2c^2 + b^4}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4} \right] \iff \\ 4a^2b^4 + 4a^2b^2c^2 - 2b^2a^4 + 4a^2b^2c^2 + 4a^2c^4 - 2c^2a^4 - 2b^2a^4 - 2c^2a^4 + a^6 + 18b^2a^4 + 18c^2a^4 - 9a^6 &= \\ 18a^2c^4 - 36a^2b^2c^2 + 18a^2b^4 &\iff \\ 4b^4 + 4b^2c^2 - 2b^2a^2 + 4b^2c^2 + 4c^4 - 2c^2a^2 - 2b^2a^2 - 2c^2a^2 + a^4 + 18b^2a^2 + 18c^2a^2 - 9a^4 &= \\ 18c^4 - 36b^2c^2 + 18b^4 &\iff \\ b^4(4-18) + b^2c^2(4+4+36) + b^2a^2(-2-2+18) + c^4(4-18) + c^2a^2(-2-2+18) + a^4(1-9) &= 0 \iff \\ -8a^4 + 14a^2(b^2 + c^2) - 14(b^4 + c^4) + 44b^2c^2 &= 0 \iff \\ 4a^4 - 7a^2(b^2 + c^2) + [7(b^4 + c^4) - 22b^2c^2] &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Assim, está demonstrada a ida.

Será provada a volta, cujas hipóteses são:

$$\alpha < \frac{\pi}{4}$$

e

$$4a^4 - 7a^2(b^2 + c^2) + [7(b^4 + c^4) - 22b^2c^2] = 0.$$

A tese é que  $\frac{AM}{3} = \frac{a}{2}\sqrt{2\cos^2\alpha - 1}$ .

Invertendo-se os argumentos, de (2.9), chega-se em (2.8),

$$\frac{\sqrt{\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{(c^2 - b^2)^2}{2a^2(b^2 + c^2) - a^4} - \frac{1}{2}}.$$

Por (2.6) e (2.5), que valem para qualquer triângulo, chega-se a

$$\frac{AM}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{1}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{2\cos^2\alpha - 1}.$$

Isso encerra a demonstração do Teorema. □

### 3 Aplicação no GeoGebra

A volta da parte 3) do Teorema permite que se construa, no GeoGebra, um triângulo que satisfaz a equação (2.9) e, assim, que se verifique que o Ponto de Mínimo de  $f(y)$  é, de fato,  $G$ .

Tomando como exemplo  $b = 2$  e  $c = 3$  e resolvendo a equação (2.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} 4a^4 - 7a^2(b^2 + c^2) + [7(b^4 + c^4) - 22b^2c^2] &= 0 \iff \\ 4a^4 - 7a^2(2^2 + 3^2) + [7(2^4 + 3^4) - 22 \cdot 2^2 \cdot 3^2] &= 0 \iff \\ 4a^4 - 91a^2 + [7(16 + 81) - 22 \cdot 36] &= 0 \iff \\ 4a^4 - 91a^2 - 113 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo em algum software algébrico, é possível obter a raiz positiva

$$a \approx 4,8919.$$

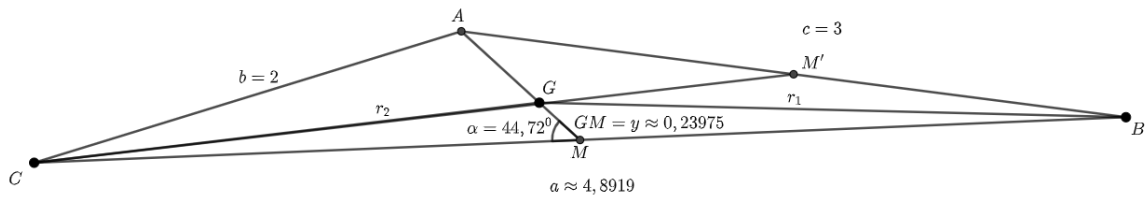
Por (2.6), tem-se que  $\cos^2\alpha \approx 0,50484$  e, assim, o Ponto Crítico de  $f$  é:

$$\frac{a}{2} \sqrt{2\cos^2\alpha - 1} \approx 0,23975,$$

que, pela volta do teorema, é o Baricentro  $G$  de  $ABC$ . A figura 5 ilustra. Deslizando o ponto  $P$  sobre  $AM$ , nota-se que o menor valor de  $f(y) = \sqrt{r_1(y)r_2(y)}$  ocorre quando  $y$  está próximo a  $0,23975$  obtido acima, exatamente no encontro das Medianas  $AM$  e  $CM'$ .

Observa-se que  $\alpha \approx 44,72^\circ < 45^\circ$ .

**Figura 5.**  $\triangle ABC$  com  $G = \min f$ .



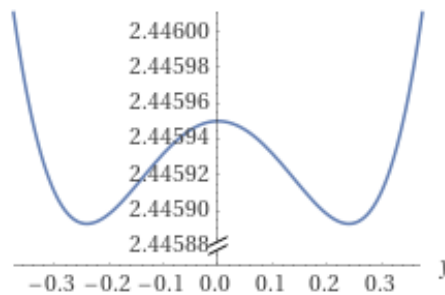
**Fonte:** figura construída no GeoGebra pelos autores.

Na figura 6 a seguir, é mostrado o gráfico da função (2.1):

$$f(y) = \sqrt[4]{\frac{a^4}{16} + \frac{a^2 y^2}{2} + y^4 - a^2 y^2 \cos^2 \alpha},$$

na qual  $a = 4,8919$ ,  $b = 2$  e  $c = 3$ , valores do exemplo ora apresentado, onde se notam os Pontos Críticos  $y = 0$  e  $y \approx \pm 0,23975$ .

**Figura 6.** gráfico da função  $f(y)$  do exemplo.



**Fonte:** figura obtida no site wolframalpha.com.

#### 4 Pontos de inflexão de $g$

Aprofundando o estudo da função  $g(y)$ , serão determinados os pontos de inflexão da mesma.

Por (2.2), tem-se:

$$\begin{aligned} g''(y) &= 0 \iff \\ 12y^2 + a^2 - 2a^2 \cos^2 \alpha &= 0 \iff \\ y^2 &= \frac{a^2}{12} (2 \cos^2 \alpha - 1) \iff \\ y &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1} \right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , então  $y = 0$  seria o candidato a ponto de inflexão. Porém, esse é o Ponto

de Mínimo de  $g$ , para esse ângulo.

Se  $\alpha > \frac{\pi}{4}$ , então as soluções (4.1) não são reais e, assim, não há ponto de inflexão.

Se  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ , então as soluções (4.1) são os pontos de inflexão, e correspondem a  $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$  dos Pontos Críticos não nulos de  $f$ , para esse ângulo. De fato, a função quadrática

$$g''(y) = 12y^2 + a^2 - 2a^2 \cos^2 \alpha$$

troca de sinal nos pontos (4.1).

No entanto, nesse último caso, os pontos de inflexão de  $g$  não são os mesmos de inflexão de  $f$ . De fato, da igualdade

$$g(y) = f^4(y),$$

tem-se, pela Regra da Cadeia:

$$g'(y) = 4f^3(y) \cdot f'(y).$$

Derivando novamente,

$$g''(y) = 12f^2(y) (f'(y))^2 + 4f^3(y) \cdot f''(y) \iff$$

$$12f^2(f')^2 = g'' - 4f^3 f''.$$

Assim, se  $g'' = 0$  e  $f'' = 0$ , então  $f = 0$  ou  $f' = 0$ . Porém, sabe-se que  $f$  jamais se anula, enquanto que  $f'$  se anula apenas nos Pontos Críticos de  $f$ , que são distintos das soluções (4.1).

Isso significa que  $f''$  e  $g''$  não podem se anular simultaneamente.

Para que se encontrem os pontos de inflexão de  $f$ , é necessário derivar duas vezes a função

$$f(y) = \sqrt[4]{\frac{a^4}{16} + \frac{a^2 y^2}{2} + y^4 - a^2 y^2 \cos^2 \alpha}.$$

Os cálculos são fastidiosos e optou-se por não apresentá-los.

## 5 Conclusões

Conclui-se que: dado o triângulo  $ABC$  representado na figura 7, e dada a função Média Geométrica  $f(y) = \sqrt{r_1(y)r_2(y)}$ , então:

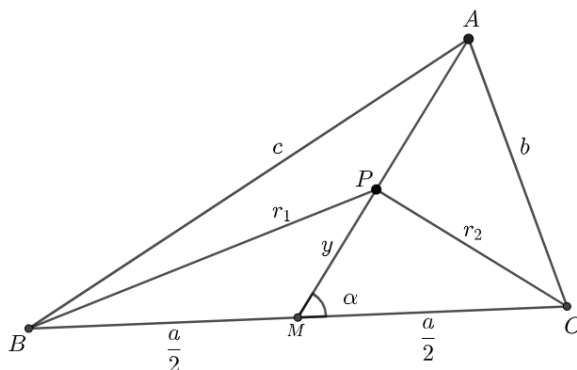
1) se  $\alpha \geq 45^\circ$ , o único Ponto Crítico da função  $f(y)$  é  $y = 0$ , no caso, Ponto de Mínimo.

2) se  $\alpha < 45^\circ$ , os Pontos Críticos da função  $f(y)$  são:  $y = 0$ , de Máximo, e  $y = \pm \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1}$ , de Mínimo.

3) na situação 2), o Ponto Crítico positivo  $y = \frac{a}{2} \sqrt{2 \cos^2 \alpha - 1}$  é o Baricentro do triângulo se e somente se

$$4a^4 - 7a^2(b^2 + c^2) + [7(b^4 + c^4) - 22b^2c^2] = 0.$$

**Figura 7.** estudo da Média Geométrica  $\sqrt{r_1 \cdot r_2}$ .



**Fonte:** figura construída no GeoGebra pelos autores.

Combinando  $r_1(y)$  e  $r_2(y)$  de outras maneiras para formar novas funções, novos estudos podem ser realizados, tanto na Mediana quanto na Bissetriz, ou em outras cevianas notáveis do triângulo, para futuras pesquisas.

## Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

## Orcid

Rogério César Santos  <https://orcid.org/0000-0002-1362-2234>

Ruthyelen Cristina Machado de Freitas  <https://orcid.org/0009-0006-5495-7598>

## Referências

1. Bialostocki, A. and Bialostocki, D. "The incenter and an excenter as solutions to an extremal problem", *Forum Geometricorum*, 11, 9–12, 2011. <https://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201102index.html>
2. Hajja, M. "Extremal properties of the incentre and the excentres of a triangle", *The Mathematical Gazette*, 2012, Vol. 96, No. 536, pp. 315-317, 2012.
3. Bialostocki, A. and Ely, R. "Points on a line that maximize and minimize the ratio of the distances to two given lines", *Forum Geometricorum*, 15, 177-178, 2015. <https://forumgeom.fau.edu/FG2015volume15/FG201517.pdf>
4. Hajja, M. "One more note on the extremal properties of the incentre and the excentres of a triangle", *The Mathematical Gazette*, Vol. 101, No. 551, pp. 308-310, 2017. <https://doi.org/10.1017/mag.2017.77>

