INTERMATHS, VOL. 5, NO. 2 (2024), **134–140**
https://doi.org/10.22481/intermaths.v5i2.15055

Artigos Gerais

A Forma Matricial da Identidade de Euler

The Matrix Form of Euler's Identity

Joselito de Oliveira [a,*], **Samuel Macedo da Silva** [b]

[a] Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, Roraima, Brasil. ; [b] Instituto Batista de Roraima, Boa Vista, Roraima, Brasil

* Autor Correspondente: joselitomath@gmail.com

Resumo: O presente artigo aborda a representação matricial de números complexos e explora suas principais propriedades, com ênfase na identidade de Euler. O texto foi desenvolvido em uma linguagem simples, buscando possibilitar seu uso por alunos da licenciatura em matemática e professores da Educação Básica que visam aprofundar o aprendizado e promover uma compreensão mais ampla dessa área de conhecimento.

Palavras-chave: Matriz; Número complexo; Euler.

Abstract: This paper addresses the matrix representation of complex numbers and explores its main properties, with an emphasis on Euler identity. The text was developed in a simple language, seeking to enable its use by mathematics degree students and Basic Education teachers.

keywords: Matrix; Complex number; Euler.

1 INTRODUÇÃO

A identidade de Euler, em sua forma clássica

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

é referenciada em Crease [3, p.92] e em [1, p.326] de modo enfático por sua beleza e importância, já que reune conceitos básicos da matemática numa só expressão, tais como as operações de adição, potenciação e multiplicação. Nela, estão presentes os números inteiros 0, elemento neutro aditivo e 1, elemento neutro multiplicativo, o número imaginário i, os números irracionais pi ($\pi \approx 3,14...$), razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, e $e \approx 2,71...$, denominado número de Euler, base dos logarítmos naturais. Além disso, ela é impactante pois nos apresenta uma soma do número 1 com uma potência do número positivo e, tendo como expoente o produto de π com o número imaginário i e tudo isso sendo igual a zero. Mas quem foi Euler? Segundo Boyer [1, p.324], Leonhard Euler foi um matemático Suiço que nasceu na Basiléia em 1707 e faleceu em 1783. De acordo com [1, p.325 e 327], deixou um grande legado, tanto na matemática pura como na matemática aplicada, produzindo mais de quinhentos livros e artigos. Destaca-se ainda a criação de uma importante área da matemática chamada de análise, fundamental na resolução de problemas pertencentes a geometria e matemática

Submetido em: 14 de Setembro de 2024 Aprovado em: 25 de Dezembro de 2024 Publicado em: 31 de Dezembro de 2024
ISSN 2675-8318

aplicada. Lembremos agora como os números complexos são abordados na forma mais usual. Em Soares [13, p.1], observamos que podemos iniciar a abordagem dos números complexos buscando a solução da equação $x^2 + 1 = 0$. Sabemos que em $\mathbb{R}$ não existe solução para esta equação, então é necessário a definição de um conjunto em que ela passe a ter solução. Seja i a solução da equação, isto é, $i^2 = -1$, que não é um número real. O símbolo i é chamado algarismo imaginário e os elementos da forma $z = a + bi$ são chamados de números complexos, em que a é a parte real e b a parte imaginária, denotados por $Re(z)$ e $Im(z)$, respectivamente. No conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, as operações de adição e multiplicação são definidas da seguinte forma: seja $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ in $\mathbb{C}$, então $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, enquanto que $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$, do Carmo [10, pp.68-69]. Em Conway [2, p.1] e Soares [13, p.5], números complexos são pares ordenados (a, b), onde a e b são números reais, satisfazendo as operações de adição e multiplicação, definidas por $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - d, bc + ad)$, respectivamente. E dessa forma $\mathbb{C}$ é um corpo. Agora, o corpo $\mathbb{R}$ é imerso em $\mathbb{C}$ via isomorfismo $a \mapsto (a, 0)$ e sendo por definição $i = (0, 1)$ então $(a, b) = a + bi$. Portanto, (a, b) é o mesmo que $a + bi$.

Neste artigo, aborda-se os números complexos em sua forma matricial, de conformidade com [11] e [13]. Dentro deste contexto apresenta-se a Identidade de Euler em sua forma matricial. É importante observar que as representações de objetos matemáticos por matrizes são de fundamental importância tendo em vista a velocidade com que são realizadas as operações matricias usando algorítmos eficientes, o que é crucial em computação. Podemos citar como exemplo as rotações no plano, que podem ser representadas pela matriz de rotação. Representações dessa natureza são fundamentais em áreas como computação gráfica (Veja [6, p.75], [7, p.60]).

Este artigo está organizado da seguinte forma: Na seção dois são estudadas a representação matricial dos números complexos e suas propriedades, necessárias ao entendimento do texto. Além disso, as propriedades podem ser comparadas nas abordagens algébrica e matricial. Na seção três apresenta-se a forma polar e a identidade de Euler e sobre o artigo.m sua forma matricial, com base na matriz exponencial e suas propriedades. Na seção quatro são apresentadas as considerações finais sobre o artigo.

Por fim, destacamos que este artigo é parte de uma dissertação apresentada no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, produzida na Universidade Federal de Roraima-UFRR, e escrita pelo segundo Autor sob a orientação do primeiro Autor (veja [12]).

2 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Nesta seção abordaremos a representação matricial dos números complexos. Consideremos o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$. Observe que o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ é não vazio, pois $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vamos definir a função $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ por

$$\Phi(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

A seguinte proposição nos garante que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tem estrutura de corpo e sua demonstração pode ser vista em Oliveira & Santos [11].

Proposição 2.1. *A função* $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *definida por* $\Phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\Phi(z_1 + z_2) = \Phi(z_1) + \Phi(z_2)$*, para todo* z_1*,* $z_2 \in \mathbb{C}$*;*

ii) $\Phi(z_1 \cdot z_2) = \Phi(z_1) \cdot \Phi(z_1)$*, para todo* z_1*,* $z_2 \in \mathbb{C}$*;*

iii) $\Phi(z^{-1}) = \Phi(z)^{-1}$*, para todo* $z \in \mathbb{C}^*$*.*

iv) $\Phi(1) = I$*;*

v) $\Phi(i) = \mathfrak{I}$*, onde* $\mathfrak{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$*;*

vi) *A função* Φ *é bijetiva.*

Devido ao fato de $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ser uma aplicação bijetiva conservando as operações de adição e multiplicação e suas propriedades, concluímos que as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ se comportam da mesma maneira que os números complexos em relação à soma e ao produto. Assim, para cada número complexo $z = a + bi$ associamos a matriz

$$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = aI + b\mathfrak{I}.$$

Temos então que $\mathbb{C} = \{aI + b\mathfrak{I}, a, b \in \mathbb{R}\}$. Como na motivação para criar os números complexos $z = a + ib$, onde i é a solução da equação $x^2 + 1 = 0$, temos que $\mathfrak{I}$ é a solução da equação matricial

$$X^2 + I = 0.$$

Se $z = a + bi$ sabemos que o módulo de z é dado por $\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2}$. E como seria o módulo de $Z = aI + b\mathfrak{I}$?

Como em Lima [9, p.10], ela é definida por

$$\| Z \| = \| aI + b\mathfrak{I} \| = \| \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{2.1}$$

Por fim, apresentamos a Tabela 1 que traz uma síntese dos principais resultados, cuja demonstração podem ser encontradas em Oliveira & Silva [11], onde podemos comparar as propriedades nas abordagens algébrica e matricial.

3 A IDENTIDADE DE EULER NA FORMA MATRICIAL

Nesta seção veremos como se apresenta a identidade de Euler em sua forma matricial. Para tanto necessitaremos da definição da exponencial de uma matriz.

Conforme Doering [4], a matriz exponencial de uma matriz $Z \in M_n(\mathbb{R})$ é definida por

$$e^Z = I + Z + \frac{1}{2!}Z^2 + \frac{1}{3!}Z^3 + \cdots + \frac{1}{j!}Z^j + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}Z^j, \tag{3.1}$$

Tabela 1. Propriedades dos números complexos

Representação algébrica	Representação matricial
$z = a + bi$	$Z = aI + b\Im$
$\overline{z} = a - bi$	$\overline{Z} = aI - b\Im$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$	$\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{Z_1 \cdot Z_2^t}{Det(Z_2)}$
$Re(z) \leq \lvert Re(z) \rvert \leq \lvert z \rvert$	$\lVert Re(Z) \rVert \leq \lVert Z \rVert$
$Im(z) \leq \lvert Im(z) \rvert \leq \lvert z \rvert$	$\lVert Im(Z) \rVert \leq \lVert Z \rVert$
$\lvert z \rvert^2 = z \cdot \overline{z}$	$\lVert Z \rVert^2 = \lVert Z \cdot \overline{Z} \rVert$

Fonte: Autores

onde por definição $Z^0 = I$, $Z^1 = Z$ e $Z^{j+1} = Z^j \cdot Z$.

Em particular (3.1) vale para as matrizes $Z \in \mathbb{C}$.

Podemos verificar, neste contexto, que de fato a exponencial (3.1) está bem definida. Para tanto precisamos da seguinte proposição:

Proposição 3.1. *Dado $Z \in \mathbb{C}$, então*

1. $||Z^m|| = ||Z||^m, \forall m \in \mathbb{N}$.

2. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} ||Z^j|| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} ||Z||^j$.

E para demonstramos a Proposição 3.1 precisamos dos seguinte lemas:

Lema 3.2. *As séries absolutamente convergentes em $\mathbb{R}^n$ são convergentes.*

Conforme Doering [4] uma série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} x_j$ em $\mathbb{R}^n$ é dita absolutamente convergente se a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} ||x_j||$ for convergente. A prova do Lema 3.2 se encontra em Doering [4].

O próximo lema encontra-se em Oliveira & Silva [11], mas ao contrário do que ocorre nesta referência, aqui iremos demonstra-lo.

Lema 3.3. *Dados $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$, então $||Z_1 \cdot Z_2||| = ||Z_1|| \cdot ||Z_2||$.*

Demonstração: Sejam $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ elementos de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
||Z_1 \cdot Z_2||^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\
&= a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 \\
&= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\
&= ||Z_1||^2 \cdot ||Z_2||^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$||Z_1 \cdot Z_2|| = ||Z_1|| \cdot ||Z_2||.$$

□

Na demonstração da Proposição 3.1, item (1.), podemos usar indução completa aplicando o Lema 3.3, enquanto que o item (2.), demonstra-se usando a desigualdade triangular e o item (1.) da referida proposição.

Lembremos agora, que a série de Taylor da função exponencial, é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots ,$$

conforme pode ser visto em Lima [8, p.291]. Então

$$1 + \|Z\| + \frac{1}{2!}\|Z\|^2 + \frac{1}{3!}\|Z\|^2 + \cdots = e^{||Z||} \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Fazendo-se $n \to \infty$, no item (2.) da proposição (3.1) e de (3.2), temos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}||Z^j|| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}||Z||^j = e^{||Z||}. \tag{3.3}$$

A desigualdade (3.3) nos mostra que a série $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}Z^j$ é absolutamente convergente e portanto, pelo Lema 3.3, ela é convergente. Concluímos então que a série (3.1) está bem definida.

Isso mostra que a matriz exponencial de uma matriz $Z \in \mathbb{C}$ está bem definida. O seguinte lema é provado por indução.

Lema 3.4. *As potências de $\theta\mathfrak{I}$ para números:*

1. *pares são dadas por:* $\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2n} = (-1)^n \begin{bmatrix} \theta^{2n} & 0 \\ 0 & \theta^{2n} \end{bmatrix}$.

2. *ímpares são dadas por:* $\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2n+1} \\ \theta^{2n+1} & 0 \end{bmatrix}$.

Agora apresentaremos a forma polar de um número complexo na versão matricial.

Teorema 3.5. *(Forma polar) Seja $\theta \in \mathbb{R}$, então $e^{\theta\mathfrak{I}} = cos\theta I + sen\theta\mathfrak{I}$.*

Demonstração: Iniciamos a demonstraçao lembrando que as séries de Taylor das funções seno e cosseno, conforme pode ser visto em Lima [8, p.291], são dadas por:

$$\begin{aligned} cos\theta &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\theta^{2j} . \\ sen\theta &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1}. \end{aligned}$$

Sendo $e^{\theta\mathfrak{I}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^j$, pelo lema (3.4) temos:

$$\begin{aligned} e^{\theta\mathfrak{I}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(-1)^j \begin{bmatrix} \theta^{2j} & \theta^{2j+1} \\ \theta^{2j+1} & \theta^{2j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\theta^{2j} & -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\theta^{2j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \\ &= cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + sen\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= cos\theta I + sen\theta\mathfrak{I}. \end{aligned}$$

□

E finalmente, para o caso particular em que $\theta = \pi$, obtemos a versão matricial da identidade de Euler:

$$e^{\pi\mathfrak{I}} = -I.$$

Ou equivalentemente,

$$2I + \pi\mathfrak{I} + \frac{\pi^2}{2!}\mathfrak{I}^2 + \frac{\pi^3}{3!}\mathfrak{I}^3 + \cdots + \frac{\pi^j}{j!}\mathfrak{I}^j + \cdots = 0.$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho abordou a representação matricial de números complexos explorando algumas propriedades. Inicialmente foram estudadas a representação matricial de um número complexo e algumas propriedades básicas. Na sequência, foram comparadas as propriedades dos números complexos em sua forma algébrica e matricial. E finalmente, foi apresentada a representação matricial da identidade de Euler. Espera-se que este trabalho contribua significativamente para as atividades de pesquisa dos estudantes dos Cursos de Licenciatura em Matemática e também dos professores do Ensino Médio, ao lecionarem disciplinas eletivas, visando aprimorar a formação matemática dos alunos.

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Orcid

Joselito de Oliveira https://orcid.org/0000-0002-7927-2679
Samuel Macedo da Silva https://orcid.org/0009-0009-0023-1101

Referências

1. C. B. Boyer. *História da Matemática*, 10^a ed. Editora Edgar Blücher LTDA, São Paulo, 1993.
2. J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, New York, 1978.
3. R. P. Crease. *As Grandes Equações: a História das Fórmulas Matemáticas Mais Importantes e os Cientistas Que as Criaram*; tradução Alexandre Cherman. Zahar, Rio de Janeiro, 2011.
4. C. I. Doering; A. O.Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Coleção Matemática Universitária. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2007.
5. C. E. Fernandez; N.C. Bernades Jr. *Introdução às Funções de Uma Variável Complexa*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.
6. J. Gomes; L. Velho. *Sistemas Gráficos 3D*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
7. J. Gomes; L. Velho. *Fundamentos da Computação Gráfica*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
8. E. L. Lima. *Curso de Análise* vol. 1. Coleção Projeto Euclides. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
9. E. L. Lima. *Curso de Análise* vol. 2. Coleção Projeto Euclides. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
10. M. P. do Carmo, A. C. Morgado, E. Wagner. *Trigonometria, Números Complexos*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1993.
11. J. de Oliveira, S. M. Silva. "The complex numbers of the Matricial View Point", *Brazilian Journal of Development*. vol. 7, p.66086 - 66093,2021. https://doi.org/10.34117/bjdv7n7-062
12. S. M.SILVA. "Números complexos: uma abordagem matricial". Dissertação (PROFMAT), Universidade Federal de Roraima, Boa Vista-RR, 2017.
13. M. S. Soares. *Cálculo em Uma Variável Complexa*. Coleção Matemática Universitária. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 2016.