

Uma nota sobre os números multfigurados quadrados-nonagonais

A note on square-nonagonal multfigured numbers

Francisco Hedylene Coelho Bezerra ^{a,*}, Francisco Regis Vieira Alves ^a, Eudes Antonio da Costa ^b,
Francisco Evamar Barros ^a

^aInstituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, CE, BR ; ^bUniversidade Federal do Tocantins: Arraias, Tocantins, BR

* Autor Correspondente: hedyleno@gmail.com

Resumo: Este artigo investiga os números quadrados-nonagonais, uma classe mesclada de números figurados que são simultaneamente quadrados e nonagonais. A análise é conduzida por meio da aplicação da equação de Pell generalizada, cujas soluções permitem derivar diversas propriedades desses números, incluindo relações de recorrência e representações matriciais. Os resultados obtidos contribuem para o aprofundamento do estudo das conexões entre números multfigurados e equações diofantinas, ressaltando o papel central da equação de Pell na resolução de problemas envolvendo números multfigurados.

Palavras-chave: Números multfigurados; Equação de Pell; Relações de recorrência; Relações matriciais.

Abstract: This article investigates square-nonagonal numbers, a mixed class of figurate numbers that are simultaneously square and nonagonal. The analysis is conducted by applying the generalized Pell equation, whose solutions allow us to derive various properties of these numbers, including recurrence relations and matrix representations. The results contribute to the deepening of the study of the connections between multfigurative numbers and Diophantine equations, highlighting the central role of the Pell equation in solving problems involving multfigurative numbers.

keywords: Mutfigurative numbers; Pell's equation; Recurrence relations ; Matrix relations.

1 Introdução

Os números geométricos ou figurados são uma classe de números que podem ser representados utilizando pontos e quando arrançados de forma equidistantes, formam objetos geométricos, que podem ser figuras na Geometria Plana ou sólidos no espaço. Alguns exemplos clássicos incluem os números triangulares, os quadrados, pentagonais etc.

Outra forma de representar os números figurados é por meio de fórmulas fechadas ou uma relação de recorrência para algum inteiro n , em ambos os casos dizemos que o conjunto dos elementos deste número figurado é dado por uma sequência numérica. E combinar duas formas poligonais distintas equivale à interseção das respectivas sequências como por exemplo, a sequência dos números quadrados-nonagonais, conforme veremos neste trabalho.

De acordo com Deza e Deza (2012) [1] esses números estão intimamente relacionados a muitos tipos de equações diofantinas, em particular à equação de Pell, que é uma equação diofantina quadrática da forma $x^2 - dy^2 = 1$, em que d seja um inteiro positivo e que não seja um quadrado perfeito. Essa equação recebeu esse nome em homenagem ao matemático inglês John Pell (1611-1685). Porém, segundo Koshy (2014) [2] a contribuição de Pell para a análise dessa equação foi pouca uma vez que ele estava apenas revisando a tradução de uma outra pessoa.

Atualmente, tem se intensificado o interesse por números multfigurados, ou seja, números que pertencem simultaneamente a duas classes distintas de números figurados como podemos observar nos trabalhos de Alves, Vieira e Catarino (2024) [3], Sivaraman (2022) [4], Agarwal (2021) [5] e Emin (2023) [6].

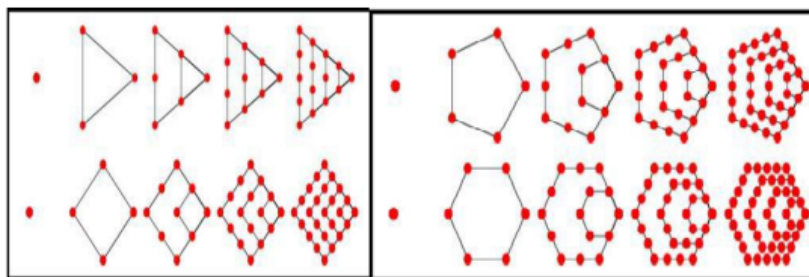
Neste trabalho, investigamos uma classe específica de números multfigurados ainda pouca explorada na literatura matemática: Os quadrados-nonagonais, ou seja, números que são simultaneamente quadrados e nonagonais. Assim, por meio da aplicação da equação de Pell generalizada são encontradas propriedades fundamentais desses números, tais como relações de recorrência e representações matriciais.

As seções seguintes estão organizadas da seguinte forma: na seção seguinte apresentaremos os fundamentos sobre os números figurados poligonais, sendo apresentada uma fórmula fechada que generaliza esses números. Em seguida, será explorada a equação de Pell e sua generalização. A seção 4 é dedicada ao estudo dos números quadrados-nonagonais propriamente ditos, sendo formulados via equação de Pell. A penúltima seção dedica-se ao desenvolvimento das relações de recorrência e propriedades matriciais associadas a essa classe de números. Por fim, na última seção apresentam-se as conclusões e sugestões para pesquisas futuras.

2 Números figurados poligonais

De acordo com Tavares (2021) [7] os números figurados poligonais são formados por pontos que, ao serem arranjados no plano, formam polígonos regulares como triângulos, quadrados, pentágonos, entre outros. A Figura 1 ilustra essa ideia, apresentando a representação de alguns números poligonais.

Figura 1. Exemplos de números figurados poligonais.



Fonte: Deza & Deza [1, p. 2].

Barros (2021) [8] destaca que esses números foram objetos de estudo dos pitagóricos com a finalidade de buscar padrões numéricos que pudessem relacionar a geometria com a aritmética. Observando a Figura 1 podemos escrever uma classe de números figurados como sequências numéricas:

$$\text{Números Triangulares: } \{S_3(n)\}_{n \geq 1} = \left\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots\right\}$$

$$\text{Números Quadrados: } \{S_4(n)\}_{n \geq 1} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots, n^2, \dots\}$$

Números Pentagonais: $\{S_5(n)\}_{n \geq 1} = \left\{1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, \dots, \frac{n(3n-1)}{2}, \dots\right\}$

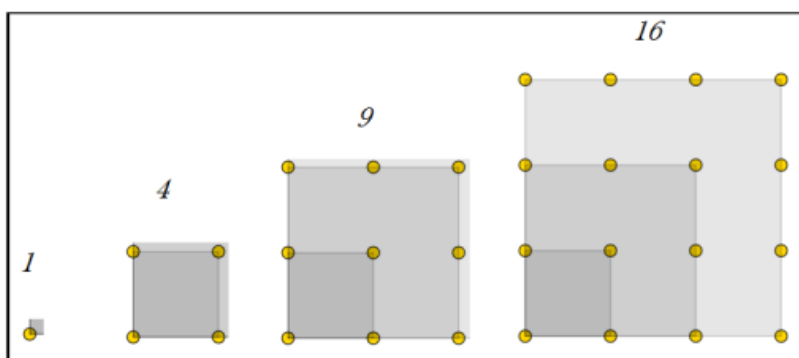
Deza e Deza (2012) [1] fornecem a seguinte fórmula fechada que generaliza os números poligonais: $S_p(n) = \frac{n[(p-2)n-p+4]}{2}$, em que $p \geq 3$. De modo particular temos:

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{n[(3-2)n-3+4]}{2} = \frac{n(n+1)}{2}; \\ S_4(n) &= \frac{n[(4-2)n-4+4]}{2} = n^2; \\ S_5(n) &= \frac{n[(5-2)n-5+4]}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Dentre os números figurados podemos destacar aqueles que pertencem simultaneamente à duas classes distintas, ou seja, são multifigurados. Por exemplo, os triangulares-quadrados foram estudados em Deza e Deza (2012) [1], onde os autores exploram várias propriedades importantes desses números, tais como fórmula de recorrência, termo geral, função geradora, por meio da aplicação da equação de Pell. Alves (2024) [9] destaca a existência de outras classes de números multifigurados tais como: quadrados pentagonais, números quadrados-hexagonais, números pentagonais-hexagonais etc.

Observando a distribuição de pontos na Figura 2 temos a seguinte sequência $\{S_4(v)\}_{v \geq 1} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots, v^2, \dots\}$ que é a sequência dos números quadrados.

Figura 2. Os 4 primeiros números quadrados.



Fonte: Barros [8].

Enquanto na Figura 3 temos a sequência que corresponde aos números nonagonais:

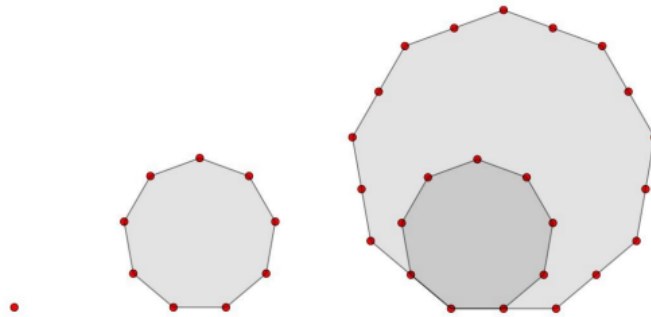
$$\{S_9(u)\}_{u \geq 1} = \left\{1, 9, 24, 46, 75, 111, 154, \dots, \frac{1}{2}u(7u-5), \dots\right\}$$

Podemos perceber que o 9 é tanto um número quadrado quanto um número nonagonal, ou seja pertence ao conjunto:

$$\{S_{9,4}(n)_{n \geq 1}\} = \{S_9(n) \cap S_4(n)\}_{n \geq 1}$$

Motivados por essa situação, façamos a seguinte questão: Quais outros números pertencem aos dois conjuntos?

Figura 3. Os três primeiros números Nonagonais.



Fonte: Elaboração dos autores.

Assim, buscando responder o questionamento acima esta pesquisa irá investigar um tipo específico de número figurado chamado de nonagonais-quadrados, ou seja, números que podem ser representados no plano na forma de quadrados e nonagonais. Para isso, na próxima seção serão mostrados alguns resultados importantes sobre uma equação diofantina quadrática conhecida como equação de Pell, que serão importantes para o estudo destes números.

3 Equação de Pell

A Equação de Pell é uma Equação Diofantina quadrática, cuja forma é dada por $x^2 - dy^2 = 1$, sendo d um inteiro positivo que não é um quadrado perfeito (Martinez et al.,2018) [10]. De acordo com Bonifácio (2023) [11] os estudos sobre esta equação não foram desenvolvidos unicamente por matemáticos gregos, mas também foi estudada na Índia, através das contribuições de Brahmagupta, matemático hindu, que se destacou no século VII.

Noronha (2018) [12] destaca que a Equação $x^2 - dy^2 = \pm 1$ possui origens históricas muito antigas, relacionadas ao problema de aproximação de raízes e estreita aproximação com o objeto matemático conhecido com sequência de Pell definida pela relação de recorrência $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$.

Estudos como o de Costa e Santos (2022) [13] analisam várias propriedades da sequência de Pell como divisibilidade, fórmulas fechadas, recorrência e relações matriciais. Essas ferramentas também se mostram eficazes para estabelecer relações entre sequências numéricas e a equação de Pell, como os números quadrados-nonagonais aqui investigados.

O estudo da Equação de Pell foi retomado por diversos matemáticos europeus, no século XVII, os quais podemos destacar Fermat (1607-1665), Leonhard Euler (1707-1783), tendo sua teoria somente elaborada de forma completa, por Lagrange entre 1766 e 1769 (Eves, 2011) [14]. A seguir apresentamos duas definições importantes para essa Equação:

Definição 3.1. A Equação de Pell é uma Equação Diofantina quadrática da forma $x^2 - dy^2 = 1$, sendo $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$.

Definição 3.2. As soluções inteiras (x, y) para a Equação de Pell são os elementos que pertencem ao conjunto $\mathbb{Z}(\sqrt{d}) = \{x + y\sqrt{d}; x, y \in \mathbb{Z}\} \subset Q\sqrt{d}$, cuja norma é igual a 1.

Portanto,

$$N(x + y\sqrt{d}) = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2 = 1.$$

Por exemplo, considerando a Equação $x^2 - 3y^2 = 1$. Podemos perceber que o par ordenado $(2, 1)$ é uma solução para esta equação. De fato,

$$N(2 + \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - 3 \cdot 1 = 1.$$

Podemos observar ainda que:

$$(2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

e

$$(2 + \sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}.$$

Assim, os pares ordenados $(7, 4)$ e $(26, 15)$ também são soluções para $x^2 - 3y^2 = 1$, conforme podemos verificar:

$$N(7 + 4\sqrt{3}) = 7^2 - 16 \cdot 3 = 49 - 48 = 1$$

e

$$N(26 + 15\sqrt{3}) = 26^2 - 3 \cdot 225 = 676 - 675 = 1.$$

Logo, a expressão $(2 + \sqrt{3})^n$, para $n \in \mathbb{N}$, fornece infinitas soluções para $x^2 - 3y^2 = 1$. Neste caso, a solução $(2, 1)$ é chamada solução fundamental da equação. Importante destacar que uma solução fundamental para a equação de Pell refere-se à menor solução positiva não trivial (x, y) , ou seja, $y > 0$ e $x > 1$.

A equação $x^2 - dy^2 = k$, em que d é livre de quadrados e $k \in \mathbb{Z}$, é conhecida como equação de Pell Generalizada. Essa equação nem sempre terá solução, porém, de acordo com Filipe (2020) [15] caso exista alguma solução, não só temos infinitas soluções como podemos encontrar todas as soluções. É possível que haja um conjunto de soluções fundamentais, cada uma gerando uma família de soluções (Filipe, 2020) [15]. Martinez et al. (2018) [10] fornecem um importante teorema que caracteriza todas as soluções inteiras para essa equação.

Teorema 3.3. *Seja $c = x_0 + y_0\sqrt{d}$ a solução fundamental de $x^2 - dy^2 = 1$. Se $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ é a solução de $x^2 - dy^2 = k$, existem $u, v \in \mathbb{N}$ tais que $u + v\sqrt{d} < c\sqrt{|k|}$ e $x + y\sqrt{d} = (u + cv\sqrt{d})c^t$, para algum $t \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Caso $x + y\sqrt{d} < c\sqrt{|k|}$, basta escolher $(u, v) = (x, y)$ e $t = 0$. Caso contrário, temos $x + y\sqrt{d} \geq c\sqrt{|k|}$. Tomando $l \in \mathbb{Z}$ tal que $\sqrt{|k|} \leq (x + y\sqrt{d})c^l < c\sqrt{|k|}$ temos que $l < 0$ e $N((x + y\sqrt{d})c^l) = c$. Sendo $u + v\sqrt{d} = (x + y\sqrt{d})c^l$ com $u, v \in \mathbb{Z}$, já temos $x + y\sqrt{d} = (u + v\sqrt{d})c^{-l}$ com $-l \in \mathbb{N}$. Basta mostrar que $u, v \in \mathbb{N}$. Como $N(u + v\sqrt{d}) = k$, segue que

$$|u - v\sqrt{d}|\sqrt{|k|} \leq |u - v\sqrt{d}||u + v\sqrt{d}| = |k|,$$

assim

$$|u - v\sqrt{d}| \leq \sqrt{|k|} \leq u + v\sqrt{d}.$$

Portanto, $u - v\sqrt{d} \leq u + v\sqrt{d}$ acarretando que $v \geq 0$ e $-u + v\sqrt{d} \leq u + v\sqrt{d}$, daí obtemos que $u \geq 0$. \square

Os resultados apresentados nesta seção sobre a Equação de Pell constituem o nosso arcabouço teórico para a investigação de uma classe particular de números figurados: os números quadrados-nonagonais. A seguir, mostraremos como a aplicação dessa equação permite identificar e caracterizar esses números.

4 Números multifigurados quadrados-nonagonais

Os números Quadrados-nonagonais são números que são simultaneamente nonagonal e quadrado. Sabemos que:

$$S_p(n) = \frac{n[(p-2)n - p + 4]}{2} \quad (4.1)$$

Logo, substituindo $p = 9$ na Equação 4.1 obtemos a fórmula fechada para os números nonagonais dada por: $S_9(u) = \frac{1}{2}u(7u - 5)$. Enquanto os números quadrados são descritos por $S_4(v) = v^2$, substituindo $p = 4$ na Equação 4.1. Assim, os números nonagonais-quadrados podem ser encontrados por meio da seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} S_9(u) &= S_4(v) \\ \frac{1}{2}u(7u - 5) &= v^2 \\ 7u^2 - 5u &= 2v^2 \\ 7\left(u - \frac{5}{14}\right)^2 - \frac{25}{196} &= 2v^2 \\ 7\left(u - \frac{5}{14}\right)^2 - \frac{25}{28} &= 2v^2 \\ 196\left(u - \frac{5}{14}\right)^2 - 25 &= 56v^2 \\ 196\left(u^2 - \frac{5}{7}u + \frac{25}{196}\right) - 25 &= 56v^2 \\ (14u - 5)^2 - 56v^2 &= 25. \end{aligned}$$

Substituindo $x = 14u - 5$ e $y = 2v$, chegamos na seguinte equação de Pell generalizada:

$$x^2 - 14y^2 = 25.$$

Para a solução da Equação $x^2 - 14y^2 = 25$ devemos inicialmente encontrar uma solução fundamental para a Equação $x^2 - 14y^2 = 1$. Testando alguns valores de y , temos que a solução fundamental para $x^2 - 14y^2 = 1$ é $15 + 4\sqrt{14}$. De fato, tem-se que:

$$15^2 - 16 \cdot 14 = 225 - 224 = 1.$$

Assim, pelo Teorema 3.3 as soluções de $x^2 - 14y^2 = 25$ são dadas por:

$$x_n + y_n\sqrt{14} = (u + v\sqrt{14})(15 + \sqrt{14})^n,$$

em que $u, v > 0$ tais que $u^2 - 14v^2 = 25$ e $u + v\sqrt{14} < (15 + 4\sqrt{14}) \cdot \sqrt{25} = 75 + 20\sqrt{14}$.

Resolvendo a inequação $u + v\sqrt{14} < 75 + 20\sqrt{14}$, temos que $v < 20$. Testando os valores $v = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 19$, obtemos as soluções fundamentais:

$$(x, y) = (9, 2) \text{ e } (23, 6).$$

Portanto, as soluções da Equação $x^2 - 14y^2 = 25$ são dadas por:

$$\begin{aligned}x_n + y_n\sqrt{14} &= (9 + 2\sqrt{14})(15 + 4\sqrt{14})^n; \\x_n + y_n\sqrt{14} &= (23 + 6\sqrt{14})(15 + 4\sqrt{14})^n.\end{aligned}$$

Considerando que $x_n = 14u_n - 5$ e $y_n = 2v_n$, temos as seguintes soluções inteiras (u_n, v_n) correspondentes:

$$\{(u_n, v_n)\}_{n \geq 1} = \{(1, 1), (2, 3), (18, 33), (49, 91), \dots\}.$$

Para a solução fundamental $(x, y) = (9, 2)$ e sabendo que $x_n = 14u_n - 5$ e $y_n = 2v_n$ as soluções (u_n, v_n) podem ser obtidas por meio de suas respectivas fórmulas de recorrência (Agarwal, 2021) [5]:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 30u_n - u_{n-1} - 10, u_1 = 1, u_2 = 18 \\v_{n+1} &= 30v_n - v_{n-1}, v_1 = 1, v_2 = 33\end{aligned}$$

Assim, obtemos as cinco primeiras soluções particulares (u_n, v_n) :

$$\{(u_n, v_n)\}_{1 \leq n \leq 5} = \{(1, 1), (18, 33), (529, 989), (15842, 29637), (474721, 888121)\}.$$

Para a solução fundamental $(x, y) = (23, 6)$ as soluções (u_n, v_n) são dadas pelas seguintes relações de recorrência:

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 30u_n - u_{n-1} - 10, u_1 = 2, u_2 = 49 \\v_{n+1} &= 30v_n - v_{n-1}, v_1 = 3, v_2 = 91\end{aligned}$$

Logo, os cinco pares de soluções particulares (u_n, v_n) geradas por $(23, 6)$ são:

$$\{(u_n, v_n)\}_{1 \leq n \leq 5} = \{(2, 3), (49, 91), (1458, 2727), (43681, 81719), (1308962, 2448843)\}.$$

Utilizando as soluções $(x_n, y_n) = (14u_n - 5, 2v_n)$ da Equação de Pell generalizada $x^2 - 14y^2 = 25$ é possível obter a seguinte sequência dos números quadrados-nonagonais:

$$\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 1} = \{1, 9, 1089, 8281, 978121, 7436529, \dots\}.$$

Na Tabela 1 temos os 11 primeiros termos dos números quadrados-nonagonais, obtidos por meio das soluções da Equação de Pell associada:

5 Recorrência e propriedades matriciais para o conjunto $S_{9,4}(n)$

Na seção anterior, recorrendo ao conjunto solução de uma equação de Pell, foi possível determinar infinitos números quadrados-nonagonais, ou seja, foi encontrado o seguinte conjunto:

$$\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 1} = \{1, 9, 1089, 8281, 978121, 7436529, \dots\}.$$

Alves (2024) [9] destaca que a noção de recorrência possui um papel fundamental visando uma compreensão evolutiva das propriedades envolvendo os números figurados. Assim, precisamos encontrar a fórmula de recorrência para os números quadrados-nonagonais. Para isso, vamos

Tabela 1. Os 11 primeiros números quadrados-nonagonais.

n	(u_n, v_n)	$S_{9,4}(n) = v_n^2$
1	(1,1)	1
2	(2,3)	9
3	(18,33)	1089
4	(49,91)	8281
5	(529,989)	978121
6	(1458,2727)	7.436.529
7	(15482,29637)	878.351.769
8	(43681,81719)	6.677.994.961
9	(474721,888121)	788.758.910.641
10	(1308962,2448843)	5.996.832.038.649
11	(14.225.778,26.613.993)	708.304.623.404.049

Fonte: Elaboração dos autores.

considerar a seguinte sequência de soluções da equação de Pell obtidas na seção anterior:

$$\{(u_n, v_n)\}_{n \geq 1} = \{(1, 1), (2, 3), (18, 33), (49, 91), (529, 989), \dots\}.$$

Passamos a considerar apenas os elementos pertencentes à segunda coordenada de cada vetor, ou seja, a sequência $\{v_n\}_{n \geq 1} = \{1, 3, 33, 91, 989, 2727, \dots\}$, designada por A048911 conforme a Enciclopédia de Sequências Inteiras (on-line) [16]. Portanto, é preciso encontrar uma fórmula de recorrência da forma:

$$v_{n+1} = r_1 v_n + r_2 v_{n-1} + r_3 v_{n-2} + r_4 v_{n-3}.$$

Assim, considerando que $v_1 = 1, v_2 = 3, v_3 = 33, v_4 = 91, v_5 = 989, \dots$, obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} v_5 = 91r_1 + 33r_2 + 3r_3 + r_4 = 989 \\ v_6 = 989r_1 + 91r_2 + 33r_3 + 3r_4 = 2727 \\ v_7 = 2727r_1 + 989r_2 + 91r_3 + 33r_4 = 29637 \\ v_8 = 29637r_1 + 2727r_2 + 989r_3 + 91r_4 = 81719 \end{cases} \quad (5.1)$$

Resolvendo o sistema linear 5.1 por meio de recursos computacionais tem-se que: $r_1 = 0, r_2 = 30, r_3 = 0, r_4 = -1$. Logo, a recorrência para a sequência v_n é igual a:

$$v_{n+1} = 30v_{n-1} - v_{n-3}, \quad (5.2)$$

em que $v_1 = 1, v_2 = 3, v_3 = 33, v_4 = 91$ são seus termos iniciais.

Um primeiro resultado envolvendo a recorrência 5.2 é dado a seguir.

Proposição 5.1. *Seja $\{v_n\}_{n \geq 1}$ dada por 5.2, então, para todo $n \geq 3$ vale que:*

$$v_n^2 + v_{n-2}^2 - 30v_n v_{n-2} = 100. \quad (5.3)$$

Demonstração. Utilizamos o princípio de indução matemática para validar a identidade (5.3). Como $v_3 = 33$ e $v_1 = 1$. No passo base $n = 3$, temos que:

$$33^2 + 1^2 - 30 \cdot 33 \cdot 1 = 1089 + 1 - 990 = 100,$$

assim, para $n = 3$, constata-se que a identidade (5.3) é válida.

Suponha que a identidade (5.3) seja válida para todo $3 \leq k \leq n$. Vamos verificar a identidade (5.3) para $n + 1$, na qual usamos a recorrência 5.2. Vejamos:

$$\begin{aligned} & v_{n+1}^2 + v_{n-1}^2 - 30v_{n+1}v_{n-1} \\ = & (30v_{n-1} - v_{n-3})^2 + v_{n-1}^2 - 30(30v_{n-1} - v_{n-3})v_{n-1} \\ = & 900v_{n-1}^2 - 60v_{n-1}v_{n-3} + v_{n-3}^2 + v_{n-1}^2 - 900v_{n-1}^2 + 30v_{n-1}v_{n-3} \\ = & v_{n-1}^2 + v_{n-3}^2 - 30v_{n-1}v_{n-3}. \end{aligned}$$

Agora, usando a hipótese de indução para $k = n - 1$, obtemos o desejado.

Portanto, a identidade (5.3) é satisfeita para todo inteiro $n \geq 3$. \square

Como consequência da Proposição 5.1 temos outra importante identidade.

Proposição 5.2. *Para todo $n \geq 3$, vale a identidade:*

$$v_n^2 - v_{n+2}v_{n-2} = 100. \quad (5.4)$$

em que $\{v_n\}_{n \geq 1}$ é dada por 5.2.

Demonstração. Usando a recorrência 5.2 e a identidade (5.3), obtemos:

$$\begin{aligned} v_n^2 - v_{n+2}v_{n-2} &= v_n^2 - (30v_n - v_{n-2})v_{n-2} \\ &= v_n^2 + v_{n-2}^2 - 30v_nv_{n-2} = 100, \end{aligned}$$

como desejado. \square

Pela recorrência 5.2 notamos que:

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 &= (30v_{n-1} - v_{n-3})^2 \\ &= 900v_{n-1}^2 - 2 \cdot 30v_{n-1}v_{n-3} + v_{n-3}^2 \\ &= 900v_{n-1}^2 - 2(v_{n+1} + v_{n-3})v_{n-3} + v_{n-3}^2 \\ &= 900v_{n-1}^2 - 2v_{n+1}v_{n-3} - v_{n-3}^2. \end{aligned}$$

Agora, fazendo uso da identidade (5.4), obtemos

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 &= 900v_{n-1}^2 - 2(v_{n-1}^2 - 100) - v_{n-3}^2 \\ &= 898v_{n-1}^2 - v_{n-3}^2 + 200. \end{aligned}$$

Fundamentados na discussão anterior, e usando o fato que $S_{9,4}(n) = v_n^2$, obtém-se a seguinte recorrência para os números multifigurados quadrados-nonagonais:

Teorema 5.3. *Para todo natural $n \geq 4$ os números multifigurados quadrados-nonagonais $\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 1}$ satisfazem a relação de recorrência não-homogênea:*

$$S_{9,4}(n + 1) = 898S_{9,4}(n - 1) - S_{9,4}(n - 3) + 200, \quad (5.5)$$

com valores iniciais $S_{9,4}(1) = 1$, $S_{9,4}(2) = 9$, $S_{9,4}(3) = 1089$ e $S_{9,4}(4) = 8281$.

Nota-se que a recorrência (5.5) é não homogênea de ordem 4. Para eliminar a constante e

determinar uma relação homogênea, façamos a diferença $S_{9,4}(n+1) - S_{9,4}(n)$, vejamos:

$$\begin{aligned} & S_{9,4}(n+1) - S_{9,4}(n) \\ &= [898S_{9,4}(n-1) - S_{9,4}(n-3) + 200] - [898S_{9,4}(n-2) - S_{9,4}(n-4) + 200] \\ &= S_{9,4}(n) + 898S_{9,4}(n-1) - 898S_{9,4}(n-2) - S_{9,4}(n-3) + S_{9,4}(n-4), \end{aligned}$$

e obtemos uma recorrência homogênea de ordem 5.

Teorema 5.4. *Para todo natural $n \geq 5$ os números multifigurados quadrados-nonagonais $\{S_{9,4}(n)\}_{n \geq 1}$ satisfazem a seguinte relação de recorrência homogênea:*

$$S_{9,4}(n+1) = S_{9,4}(n) + 898S_{9,4}(n-1) - 898S_{9,4}(n-2) - S_{9,4}(n-3) + S_{9,4}(n-4), \quad (5.6)$$

com valores iniciais $S_{9,4}(1) = 1$, $S_{9,4}(2) = 9$, $S_{9,4}(3) = 1089$, $S_{9,4}(4) = 8281$ e $S_{9,4}(5) = 978121$.

Em acordo aos trabalhos de Alves, Vieira e Catarino (2024) [3], Yilmaz e Soyakan (2023) [17], Yilmaz e Taskara (2013) [18] e Catarino e Costa (aceito) [19], verificaremos alguns resultados envolvendo a representação matricial para os números quadrados-nonagonais. Para isso, vamos considerar o seguinte teorema:

Teorema 5.5. *A Matriz geradora para a sequência $S_{9,4}(n)$ dos números quadrados-nonagonais é dada por:*

$$\begin{pmatrix} S_{9,4}(n+5) \\ S_{9,4}(n+4) \\ S_{9,4}(n+3) \\ S_{9,4}(n+2) \\ S_{9,4}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Demonstração. Pelo princípio de indução finita temos que:

Para $n = 0$, tem-se que:

$$\begin{pmatrix} S_{9,4}(5) \\ S_{9,4}(4) \\ S_{9,4}(3) \\ S_{9,4}(2) \\ S_{9,4}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^0 \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, tem-se que a igual matricial é verdadeira para $n = 0$: $S_{9,4}(1) = 1, S_{9,4}(2) = 9, S_{9,4}(3) = 1089, S_{9,4}(4) = 8281, S_{9,4}(5) = 978121$.

Em seguida admitiremos por indução que:

$$\begin{pmatrix} S_{9,4}(n+5) \\ S_{9,4}(n+4) \\ S_{9,4}(n+3) \\ S_{9,4}(n+2) \\ S_{9,4}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Devemos mostrar que a igualdade matricial é verdadeira também para $n + 1$.

Com efeito, basta ver que:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} S_{9,4}(n+6) \\ S_{9,4}(n+5) \\ S_{9,4}(n+4) \\ S_{9,4}(n+3) \\ S_{9,4}(n+2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_{9,4}(n+5) + 898S_{9,4}(n+4) - 898S_{9,4}(n+3) - S_{9,4}(n+2) + S_{9,4}(n+1) \\ S_{9,4}(n+4) + 898S_{9,4}(n+3) - 898S_{9,4}(n+2) - S_{9,4}(n+1) + S_{9,4}(n) \\ S_{9,4}(n+3) + 898S_{9,4}(n+2) - 898S_{9,4}(n+1) - S_{9,4}(n) + S_{9,4}(n-1) \\ S_{9,4}(n+2) + 898S_{9,4}(n+1) - 898S_{9,4}(n) - S_{9,4}(n-1) + S_{9,4}(n-2) \\ S_{9,4}(n+1) + 898S_{9,4}(n) - 898S_{9,4}(n-1) - S_{9,4}(n-2) + S_{9,4}(n-3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} S_{9,4}(n+5) \\ S_{9,4}(n+4) \\ S_{9,4}(n+3) \\ S_{9,4}(n+2) \\ S_{9,4}(n+1) \end{pmatrix} + 898 \begin{pmatrix} S_{9,4}(n+4) \\ S_{9,4}(n+3) \\ S_{9,4}(n+2) \\ S_{9,4}(n+1) \\ S_{9,4}(n) \end{pmatrix} - 898 \begin{pmatrix} S_{9,4}(n+3) \\ S_{9,4}(n+2) \\ S_{9,4}(n+1) \\ S_{9,4}(n) \\ S_{9,4}(n-1) \end{pmatrix} \\
 &\quad - \begin{pmatrix} S_{9,4}(n+2) \\ S_{9,4}(n+1) \\ S_{9,4}(n) \\ S_{9,4}(n-1) \\ S_{9,4}(n-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{9,4}(n+1) \\ S_{9,4}(n) \\ S_{9,4}(n-1) \\ S_{9,4}(n-2) \\ S_{9,4}(n-3) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 898 \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad - 898 \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-3} \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-4} \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 898 \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right. \\
 &\quad \left. - 898 \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-2} - \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-3} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-4} \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 898 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -898 & 898 & 1 \end{pmatrix} \right. \\
& \quad - 898 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -898 & 898 & 1 \\ 1 & 0 & -899 & 0 & 899 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -898 & 898 & 1 \\ 1 & 0 & -899 & 0 & 899 \\ 899 & -898 & -807302 & 806403 & 899 \end{pmatrix} \\
& \quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -898 & 898 & 1 \\ 1 & 0 & -899 & 0 & 1 \\ 899 & -898 & -807302 & 806403 & 899 \\ 899 & 0 & -808200 & 0 & 807302 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 1 & 898 & -898 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 978121 \\ 8281 \\ 1089 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

6 Conclusão

No presente trabalho, realizamos um estudo aprofundado sobre os números multfigurados quadrados-nonagonais, uma classe ainda pouca explorada na literatura matemática. Utilizando como ferramenta central a equação de Pell generalizada, identificamos todas as soluções inteiras que satisfazem simultaneamente as condições para um número ser quadrado e nonagonal, o que nos permitiu construir explicitamente os primeiros termos dessa sequência. Além disso, estabelecemos fórmulas de recorrência e representações matriciais que descrevem a evolução da sequência dos números quadrados-nonagonais, contribuindo para a compreensão de suas propriedades aritméticas.

A principal contribuição deste estudo foi a formulação de uma representação matricial associada a essa classe de números. Essa formulação permite gerar os termos da sequência

sem a necessidade da fórmula de recorrência, além de abrir possibilidades para generalizações a outras sequências numéricas de natureza semelhante. Para pesquisas futuras propomos investigar outras classes de números multfigurados de com com foco nas relações de recorrência e na formulação de matrizes geradoras, como os quadrados-pentagonais, quadrados-hexagonais, pentagonais-hexagonais, quadrados-heptagonais etc.

Declarações complementares

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Uso de Inteligência Artificial

Não foram empregadas ferramentas de inteligência artificial generativa na concepção, execução ou redação deste estudo.

Orcid

Francisco Hedyleno Coelho Bezerra  <https://orcid.org/0000-0001-5961-4857>

Francisco Regis Vieira Alves  <https://orcid.org/0000-0003-3710-1561>

Eudes Antonio da Costa  <https://orcid.org/0000-0001-6684-9961>

Francisco Evamar Barros  <https://orcid.org/0000-0002-8568-7854>

Referências

1. Deza, E., Deza, M. M., *Figurate numbers*, World Scientific, 2012.
2. Koshy, T., *Pell and Pell–Lucas numbers with applications*, New York: Springer, 2014.
3. Alves, F. R. V., Vieira, R. P. M., Catarino, P. M. M. C., “Números triangulares-quadrados-pentagonais: relações n-dimensionais, função geradora e sequência de matrizes”, *Revista RMAT*, vol. 2, no. 1, pp. 1-15, 2024. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13147067>
4. Sivaraman, R., “Triangular – pentagonal numbers and interesting puzzle”, *International Journal of Engineering Research and Modern Education*, vol. 7, no. 1, pp. 1-3, 2022.
5. Agarwal, R. P., “Pythagoreans figurative numbers: The beginning of number theory and summation of series”, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 9, no. 8, pp. 2038-2113, 2021.
6. Emin, AHMET. *Some multi figurate numbers in terms of generalized fibonacci and lucas numbers*. The Aligarh Bulletin of Mathematics, v. 42, n. 1, pp. 107-123, 2023.
7. Tavares, D., “As formas dos números”, *Gazeta de Matemática*, no. 194, pp. 10-13, 2021. <https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1585>
8. Barros, F. E., *Engenharia Didática sobre os números figurados K-dimensionais: relações recorrentes, termo geral, função geradora e representações por meio de recursos computacionais*, Dissertação — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, 2021. http://biblioteca.ifce.edu.br/index.asp?codigo_sophia=99535

9. Alves, F. R. V., “Números figurados gregos: o caso dos triangulares quadrados e sua recorrência”, *Revista História da Matemática para Professores*, vol. 10, no. 1, pp. 1-12, 2024.
10. Martinez, F., Moreira, C., Saldanha, N., Tengan, E., *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números*, [S.l.: s.n.], 2018.
11. Bonifácio, F. T., *A equação de Pell e suas aplicações para a resolução de equações diofantinas*, Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Cajazeiras, 2023.
12. Noronha, W. F. R., Alves, F. R. V., “Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas”, *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru*, vol. 13, 2018. <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/223>.
13. Costa, E. A., Santos, D. C. dos, “Algumas propriedades da sequência de Pell”, *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru*, vol. 22, no. 3, 2022. <https://doi.org/10.21167/cqdv22n32022025036>.
14. Eves, H., *Introducao a história da matematica*, [S.l.]: Editora da Unicamp, 2011.
15. Filipe, R., “Equação de Pell Generalizada”, *Natal: SEMANA OLÍMPICA*, vol. 2020, 2020.
16. N. J. A. Sloane (ed.), *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, OEIS Foundation Inc., <https://oeis.org>.
17. Yilmaz, B., Yilmaz, Y., “Gaussian generalized guglielmo numbers”, *Asian Journal of Advanced Research and Reports*, vol. 17, no. 121, pp. 1-18, 2023.
18. Yilmaz, B., Taskara, N., “Matrix sequences in terms of padovan and perrin numbers.”, *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2013, pp. 1-7, 2013.
19. Catarino, P. M. M. C., Costa, E. A., “Uma peculiar ligação entre sucessões numéricas e matrizes”, *Gazeta de Matemática*, [aceito].