INTERMATHS, VOL. 6, NO. 1 (2025), **122–142** Artigos Gerais
https://doi.org/10.22481/intermaths.v6i1.16977

O Tratado Aritmético de al-Khwarizmi e o cálculo no quadro de areia (Tahkt)

The Al-Khwarizmi's Arithmetic Treatise and calculus on the sand board (Tahkt)

Suzie Albuquerque [a,*], **Bernadete Morey** [a]

[a]Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, BR

* Autor Correspondente: suzie.albuquerque.002@ufrn.edu.br

Resumo: O Tratado Aritmético de al-Khwarizmi é a obra escrita pelo estudioso islâmico Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi (c.780-850) que viveu e trabalhou em Bagdá no século IX sob a patrocínio do califa al-Ma'Mun (813-833). O Tratado constitui-se numa exposição da aritmética, que dispunha de um sistema de numeração posicional e decimal, usada pelos indianos. Foi no decorrer de nosso estudo com o Tratado que tomamos consciência de um artefato usado pelos islâmicos para efetuar as operações aritméticas com apagamento, o quadro de areia. Assim, o objetivo do presente artigo é destacar os processos de cálculos empregados ao se usar o quadro de areia com considerações sobre seu possível uso nas salas de aula do ensino básico ou nos cursos de formação inicial de professores. Para tanto, adotamos abordagem metodológica de pesquisa qualitativa com procedimentos bibliográfico e documental de modo a fornecer recomendações para uso em sala de aula.

Palavras-chave: Quadro de Areia; Aritmética Indiana; Tratado Aritmético de al-Khwarizmi; História da Matemática.

Abstract: The Al-Khwarizmi's Arithmetic Treatise is the work written by the Islamic scholar Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi (c.780-850), who lived and worked in ninth-century Baghdad under the patronage of Caliph al-Ma'Mum (813–833). The treatise presents an exposition of arithmetic based on the positional and decimal numeral system used by the Indians. During our study of the treatise, we discovered an artifact utilized by Islamic scholars to perform arithmetic operations involving erasure. This artifact, known as the Sand Board, is the focal point of this article, which aims to highlight the calculation processes associated with its use and explore its potential applications in elementary school classrooms and initial teacher training programs.

keywords: Sand Board; Indian Arithmetics; al-Khwarizmi's Arithmetical Treatise; History of Mathematics.

1 Introdução

O presente artigo se insere no campo de estudos que relacionam a história com a educação matemática, mais precisamente, história da matemática na sala de aula.

Submetido em: 19 de Abril de 2025 Aprovado em: 30 de Agosto de 2025 Publicado em: 30 de Outubro de 2025
ISSN 2675-8318

Concordamos com [1] quando dizem que aliar a história da matemática à educação matemática não é uma escolha, mas uma necessidade, pois, tal aliança é uma parte central do processo de compreensão de nossa natureza humana como essencialmente histórica e social.

Na *Enciclopedia of Mathematics Education*[1], no verbete História da Matemática na Sala de Aula, é dito que as pesquisas realizadas neste campo não pressupõem

> [...] uma linha de abordagem para ensinar história aos alunos como uma disciplina independente, mas sim para orientar o professor no sentido de enriquecer seu ensino, levando em consideração ideias baseadas na epistemologia e na história ou introduzindo diretamente elementos históricos. O objetivo de "introduzir uma perspectiva histórica no ensino de matemática" não é abordar um assunto em sala de aula, ou em casa, de uma forma completamente desvinculada do ensino convencional. Em vez disso, deve ser entendido como o estímulo de reflexões históricas ou epistemológicas do professor em conexão com seu ensino (Barbin, 2010), para dar datas importantes para um conceito, para explicar seu significado histórico, para consultar e /ou ler textos originais, para resolver "problemas históricos", etc.

É neste sentido que o presente artigo tem como objetivo apresentar um artefato cultural usado pelos indianos e islâmicos como apoio ao cálculo aritmético, o quadro de areia que, com base em nosso estudo, é considerado um artefato com potencialidades didáticas e pedagógicas nas aulas de matemática, tanto no ensino fundamental como nos cursos de formação inicial ou continuada de professores de matemática.

Entendemos que para apresentar adequadamente o quadro de areia necessitamos responder, na medida do possível, às indagações que surgem em relação ao artefato mencionado, ou seja: em que consiste tal objeto? Qual sua aparência? Como funciona? Como deve ser usado? Qual o autor, qual obra o menciona ou descreve? Qual a relação desse artefato e sua apresentação na obra com o contexto de sua produção?

Para responder, ainda que parcialmente tais indagações, começamos por apresentar ao leitor a obra Tratado Aritmético de al-Khwarizmi na qual o quadro de areia não é mencionado explicitamente, mas, por meio do estudo realizado, notamos que os algoritmos das operações que ali aparecem só podem ser compreendidos, se pensados a partir do uso do quadro de areia.

Convém ressaltar que ainda que o mencionado Tratado seja uma fonte importantíssima na história do sistema de numeração que usamos hoje, de modo geral, há uma carência de publicações brasileiras que tratem da referida obra [2]. Sendo assim, o presente artigo inclui uma sessão onde se discorre, ainda que brevemente, sobre o Tratado, esperando que tal leitura possa ser útil para alunos e professores de matemática.

[1] Enciclopedia of Mathematics Education, 2. Edição, Stephen Lerman (Edit.) 1st edition: ©Springer Science+Business Media Dordrecht 2014, 2nd edition: ©Springer Nature Switzerland AG 2020

A apresentação do quadro de areia é seguida por exemplos que mostram como funciona o algoritmo da adição, quando se usa este artefato. Por último, nas considerações finais, falamos sobre as possibilidades didáticas de uso do quadro de areia.

2 Uso implícito do quadro de areia no tratado aritmética

Apensar de não haver menção explícita do uso do quadro de areia do texto de al-Khwarizmi percebemos que, havia a necessidade, em sua época, do uso de um instrumento para registrar os cálculos. Tal ideia nos veio ao lermos a obra mencionada seguindo os cálculos com lápis e papel e não conseguirmos compreender os procedimentos indicados por [3].

O entendimento dos algoritmos expostos foi possível apenas quando consideramos o Quadro de areia como um artefato histórico atrelado ao texto. E neste tópico do artigo iremos iniciar o leitor na aritmética indiana apresentado o Tratado Aritmético de al-Khwarizmi. Mostraremos como chegamos ao quadro e como essa ferramenta era utilizada na prática, lançando as bases para estudos futuros que utilizem do conteúdo aqui apresentado para a elaboração de atividades para o ensino de matemática.

2.1 O Tratado Aritmético de al-Khwarizmi

O estudioso Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780-850), bastante conhecido na literatura como al-Khwarizmi, viveu e trabalhou em Bagdá, capital do império islâmico medieval. Em Bagdá, al-Khwarizmi trabalhou sob a proteção do califa abássida al-Ma'Mun (813-833) [4].

Em Bagdá desta época se criara um ambiente científico de intensas trocas culturais, o que promoveu a atividade científica de estudiosos como al-Khwarizmi, intelectual que contribuiu de forma significativa para a atualização de saberes científicos na sociedade islâmica medieval.

Bulgákov e Rozenfeld [4] atribuem a al-Khwarizmi a autoria de várias obras, algumas das quais não foram localizadas. Entre as mais conhecidas cabe destacar aqui duas delas: uma é o Livro de álgebra e al-mukabala, também conhecido como Álgebra de al-Khwarizmi, que introduz um novo campo de estudo, com um conteúdo matemático original, estudo das equações de primeiro e segundo graus. A segunda obra é Livro do cálculo indiano, que se constitui em uma exposição detalhada dos procedimentos e das figuras usadas pelos indianos para contar e calcular. Em nossos estudos, para diferenciar estas duas obras, nos referimos a elas como o Tratado Algébrico e Tratado Aritmético de al-Khwarizmi, respectivamente.

No presente artigo nos interessa o Tratado Aritmético de al-Khwarizmi. Infelizmente para nós o original em árabe não foi preservado, sendo localizadas atualmente duas versões em latim do século XIV [5] [6], depositadas respectivamente nas bibliotecas de Cambridge e do Centro de Estudos Hispânicos em Nova York.

Em nossos estudos, elaboramos uma versão de trabalho do Tratado Aritmético que foi constituída da seguinte maneira: Yushkiévitch [7] traduziram, a partir do manuscrito de Cambridge, o Tratado para o idioma russo; em posse desta versão em russo, iniciamos o trabalho de tradução para o português.

A tradução para o russo é bastante cuidadosa [7, p. 5-19]. No mesmo livro em que foi publicada a tradução para o russo há uma sessão exclusiva para as observações referentes ao Tratado [7, p. 111-120].

Como o Tratado propriamente dito não é nosso foco no presente artigo, deixamos por enquanto de lado os argumentos de [7] que fundamentam cada uma das observações, uma vez que podemos voltar a este tópico futuramente. Por enquanto nos limitamos a transcrever algumas das observações feitas por este autor a respeito do manuscrito de Cambridge.

1. O autor que traduziu o Tratado de al-Khwarizmi para o latim é desconhecido, mas, é possível que tenha sido Gherardo de Cremona ou Adelardo de Bath (século XII).

2. Mais tarde, um copista transcreveu a tradução obtendo o manuscrito que se tem hoje.

3. O manuscrito (da biblioteca de Cambridge) não é de forma alguma uma tradução exata do trabalho de al-Khwarizmi.

4. O copista adaptou o trabalho de al-Khwarizmi às necessidades do leitor europeu, substituindo os algarismos arábicos e os numerais usados por al-Khwarizmi por algarismos romanos usados na Europa Ocidental naquela época.

5. Ele, (o copista) se permitiu inserções irrelevantes e, por vezes, simplesmente distorceu o texto.

6. O manuscrito está inacabado e termina com a análise de um exemplo de operações com frações.

7. (O manuscrito) contém uma série de omissões óbvias, algumas das quais são marcadas pelo editor por reticências.

8. Em quase nenhum lugar aparecem os algarismos indianos referidos no texto e exemplos de operações com números no sistema posicional.

9. A obra é um texto corrido sem divisão em subtópicos ou partes.

Graças às observações feitas por [7] pudemos, no decorrer do processo de tradução para o português, ter uma ideia mais clara das diferenças do texto em russo para o texto latim e suposições do que podia ter constado no original árabe.

Sendo assim, nosso estudo sobre o Tratado Aritmético de al-Khwarizmi teve como primeira etapa a tradução do texto russo para o português[2] e nas etapas seguintes, por exemplo, na etapa da leitura do texto já traduzido para o português, a leitura foi feita comparando os textos em russo e em português.

Passemos então a apreciar de modo bastante breve a página inicial do texto do Tratado (Figura 1) que pode ser considerada como uma introdução. Mesmo estando o texto em russo, podemos distinguir na primeira linha, centralizado, o nome do autor al-Kwharizmi. A seguir na linha abaixo, em maiúsculas, centralizado vem título do texto LIVRO SOBRE O CÁLCULO INDIANO. Podemos distinguir ainda nesta página três parágrafos que passaremos a comentar.

O primeiro parágrafo, conforme a tradição islâmica, é uma saudação a Alá. Começa com os dizeres:

> Disse Algorizmi[3]: Alcemos louvor a Deus, nosso guia e defensor e multipliquemos o louvor com adoração, orando para que ele nos dirija no caminho da justiça, que nos leve ao caminho da verdade, para que possamos cumprir o que decidimos esclarecer sobre o cálculo indiano usando .IX. letras[4] pelas quais eles expressaram qualquer número com facilidade e brevidade, facilitando o mister daquele que estuda aritmética, isto é, o maior e o menor número, e tudo o que há nele desde multiplicação e divisão, adição e subtração e outras coisas. [3, p. 5-19, Tradução nossa]

No segundo parágrafo, al-Khwarizmi expõe a essência do sistema posicional e o motivo de seu interesse pelo mesmo: "Quando vi que os indianos faziam qualquer número a partir de .IX. sinais graças à posição relativa estabelecida (para os sinais), desejei revelar, se for do agrado de Deus, o que se obtém dessas letras para a facilidade daquele que estuda. [3, p. 5, Tradução nossa]

No terceiro parágrafo, começa a exposição da aritmética propriamente dita com a apresentação do sistema posicional decimal

> Eles escrevem .IX. letras, cujas figuras são as seguintes [...] Em suas figuras, também existem diferenças de pessoa para pessoa: tal diferença na figura seria nas letras cinco e seis, bem como sete e oito. Mas não há nenhum obstáculo nisso. Afinal, esses são sinais que expressam um número, e os números em que há diferenças são os seguintes... [3, p. 5, Tradução nossa]

A representação dos números como usados pelos indianos é uma das omissões do manuscrito. Yushkiévitch [9] comenta que, no manuscrito em latim, os demais números

[2] A tradução como um todo foi o resultado de parceria entre as autoras deste artigo: a professora Bernadete Morey respondeu mais pela tradução propriamente do texto em russo e a professora Suziê Albuquerque se encarregou dos muitos aspectos técnicos de preparação do texto em russo e finalização do texto em português.

[3] Algorizmi é o nome latinizado de al-Khwarizmi.

[4] No manuscrito, quase todos os numerais são registrados em cifras romanas, amplamente aceitas na Europa de então. Com toda razão, supõem-se que no manuscrito árabe foram usadas cifras indianas e não romanas, uma vez que o tratado é dedicado à apresentação do cálculo com cifras indianas.

Figura 1. Página inicial da versão russa do Tratado Aritmético

Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми

КНИГА ОБ ИНДИЙСКОМ СЧЕТЕ

Сказал Алгоризми[1]: Вознесем достойную похвалу богу, правите-
лю и защитнику нашему, воздадим ему должное и хвалу умно-
жим прославлением, помолимся ему, чтобы направил он нас по 104
стезе справедливости, чтобы вел нас дорогой истины, чтобы по-
мог нам исполнить то, что мы решили разъяснить об индийском
счете с помощью .IX. букв[2], которыми они выражали любое свое
число для легкости и краткости, облегчая дело тому, кто изучает
арифметику, т. е. число самое большое и самое малое, и все, что
есть в нем от умножения и деления, сложения, вычитания и
прочее.

Сказал Алгоризми: Когда увидел я, что индийцы[3] составляли из .IX. знаков любое свое число, благодаря расположению, какое они установили, я пожелал раскрыть, если будет угодно богу, что получается из этих букв для облегчения изучающему. Если индийцы именно того хотели и смысл для них в этих .IX. буквах был тот, который мне открыт, да направит меня бог на это. Если же они делали это по другой причине, кроме той, которую я указал, из моего изложения и эту причину можно будет найти точно и без всякого сомнения. И она легче откроется наблюдающему и изучающему.

Пишут же они .IX. букв, фигуры которых такие... В фигурах их имеются также различия у разных людей: такое различие бывает в фигуре буквы пять и шесть, а также семь и восемь. Но в этом нет никакой помехи. Ведь это знаки, выражающие число, а фигуры, в которых имеются различия, следующие...[4] Я уже открыл в книге алгебры и алмукабалы, т. е. восполнения и противопоставления[5], что всякое число является составным и что всякое число составляется из единиц. Итак, единица находится в каждом числе. И об этом говорится в другой книге по арифметике. Единица есть корень всякого числа, и она находится вне чисел. Корень числа она потому, что через нее определяют всякое

5

Fonte: [3, p. 5]

são escritos em algarismos romanos, prática comum na Europa na época em que esta versão do tratado foi produzida. Ainda com referência à representação dos números, Yushkiévitch diz, no artigo O tratado aritmético de Mohammed bin Musa al-Khwarizmi [3], que apesar de não haver cópias em árabe do texto de al-Khwarizmi, supõe-se que no manuscrito árabe foram usadas cifras indianas e não romanas, uma vez que o tratado é dedicado à apresentação do cálculo com cifras indianas.

Tendo dedicado alguma atenção à introdução do Tratado, vamos agora o conteúdo do tratado como um todo e para este fim elaboramos o Quadro 1.

Quadro 1. Conteúdo do Tratado Aritmético de al-Khwarizmì

PARTES	CONTEÚDOS
INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDIANO	Saudação a Alá; Motivo do interesse do al-Khwarizmi pelo sistema indiano; sobre os sinais que representam os números no sistema indiano
	Exposição sobre como se representa um número, introduzindo já a noção de ordem (das unidades, dezenas, centenas, etc.)
	A figura do pequeno círculo para indicar uma ordem vazia
	Os valores dos números de acordo com as ordens
	Como se escreve um número de acordo com suas ordens
	A transferência de números entre as ordens
	Como conhecer o número de acordo com a quantidade de ordens que ele tem
OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS	Como somar e subtrair
	Ensinando a somar
	Duplicação de um número
	Multiplicação
	Divisão de um número por dois
	Verificação do resultado da multiplicação
	Divisão
	Divisão de um número de muitas ordens por um número de uma ordem
OPERAÇÕES COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS	Frações sexagesimais
	Multiplicação de frações
	Divisão de um número por fração
	Dobrando um número ou fração

Fonte: Adaptado [2, p. 54]

Após a introdução, al-Khwarizmi [3] começa por ensinar como lidar com os números no sistema decimal posicional: como compor os números por unidades e ordens, como os definir, escrevê-los e lê-los de acordo com a quantidade de ordens. Discorre também sobre o valor relativos dos números (algarismos) a depender da posição que cada figura (algarismo) ocupa no número. Fala também sobre a transferência de valor entre as ordens e o uso do pequeno círculo para preencher as ordens vazias.

As regras para as operações, seguindo os passos de [3], são iniciadas com a adição e a subtração seguidas da duplicação, multiplicação, divisão por dois, divisão e operações com frações, conforme os princípios de funcionamento do sistema de numeração indiano previamente exposto na obra.

No que se refere às operações aritméticas, o autor explica o passo-a-passo dos cálculos, porém não traz nenhum esquema visual ou figura da realização dos cálculos, abrindo espaço para dúvidas quanto ao instrumento de cálculo utilizado para registro dos números. Isso dificultou nossa compreensão, pois realizamos os cálculos acompanhando as orientações no texto [3] e estes não eram finalizados com sucesso, algo não se encaixava.

2.2 Como chegamos ao quadro de areia

No processo de tradução para o português tivemos cuidado redobrado nos trechos de descreviam algoritmos de operações. Alguns destes trechos eram bastante simples e de fácil compreensão. Outros, no entanto, geravam dúvidas e, para ter certeza de que a tradução estava correta, nós mesmos tivemos de refazer os cálculos indicados.

Por exemplo, no referente à ordem de escrita e leitura dos números al-Khwarizmi a explicação sobre o valor relativo de um algarismo a depender de sua posição relativa no número é clara para nós nem que seja graças à nossa familiaridade com o sistema decimal posicional:

> Desse modo, sempre que um número cresce, aumentam as ordens, e haverá uma distribuição do número tal que: a toda unidade em uma ordem superior corresponderá a .X. na ordem imediatamente inferior; e aquela que era .X. na [ordem] inferior, será a unidade na [ordem] superior, que a antecede. O início das ordens será à direita daquele que escreve. E esta ordem será a primeira, composta de unidades [3, p. 6, tradução nossa].

No entanto, a descrição das operações adição e subtração já não é tão clara, como podemos ver adiante:

> Se você quiser adicionar um número a outro número ou subtrair um número de outro, coloque os dois números em duas linhas, ou seja, um sob o outro, de modo que a ordem das unidades fique sob a ordem das unidades e a ordem das dezenas fique sob a ordem das dezenas. Se você quiser adicionar os dois números, i.e., adicionar um ao outro, então você adiciona cada ordem a cada ordem do mesmo tipo da que está acima dela, ou seja, unidades a unidades, dezenas a dezenas. Se em qualquer uma das ordens, ou seja, na ordem das unidades ou das dezenas, ou em qualquer outro lugar, a soma for dez, coloque em seu lugar uma unidade e a deslize na linha superior, ou seja, se você obtiver X na primeira ordem, que é a ordem das unidades, faça desse dez uma unidade e a suba para a ordem das dezenas, e aí [a unidade] significará dez. Se sobrar alguma coisa do número que seja menor que dez, ou se o número em si for menor que dez, deixe-o na mesma ordem. E, se não sobrar nada, coloque um pequeno círculo para que a ordem não fique vazia, mas haja nela um círculo, que vai ocupá-la. Para que não aconteça de ela||ficar vazia e as ordens diminuam e a segunda seja tomada pela primeira, e você se engane em seu número. [3, p. 9-10, tradução nossa].

Devemos atentar para o detalhe de que as instruções de al-Khwarizmi indicam que a operação aritmética deve se desenvolver da esquerda para a direita (começa-se operando a maior ordem enquanto a transferência de valor entre as ordens dá-se no sentido contrário (da direita para a esquerda). Porém, al-Khwarizmi, não deixa isto claro, mas as leituras de [8], [9], [10] e [11] nos levaram até a ideia de um instrumento usado na aritmética indiana medieval, o *takht* ou quadro de areia que permitia realizar as operações usando o apagamento de números (algarismos).

Segundo al-Uqlidisi [8], o cálculo no takht era realizado por escribas nos mercados islâmicos, sendo de fácil acesso e uso para quem estava familiarizado com ele. Contudo, algumas pessoas não gostavam do *takht* pela dificuldade de carregar essa ferramenta consigo.

Yushkiévitch [9], nos diz que no *takht* são utilizadas apenas duas linhas horizontais para a soma de dois números ou a subtração de um número por outro, o que nos leva a crer que na adoção de tal algoritmo para as operações aritméticas foi influenciada pela comodidade de se usar um *takht* de dimensões menores. Percebemos aí uma relação dialética entre o desenvolvimento dos algoritmos de cálculo e os materiais que servem de suporte a este algoritmo.

Foi em Yushkiévitch [9] que encontramos uma boa síntese dos algoritmos das operações aritméticas com apagamento que pode ser enunciada em quatro pontos:

1. Os dois números que serão objeto da operação aritmética, tanto no caso da adição como no da subtração, deverão ser sobrepostos em duas linhas e posicionados de tal modo que a ordem de um número fique abaixo da homônima do outro número. Deste modo, os dois números ocuparão não mais do que um pequeno espaço referente a duas linhas.

2. Os cálculos serão realizados ordem a ordem (uma por vez), da esquerda para a direita.

3. Cada algarismo da linha superior, ao ser operado com o da linha inferior operada, é apagado e substituído pelo resultado obtido. Pode haver a necessidade de apagar e alterar a ordem seguinte (esquerda), caso a soma acumule dez ou mais na transferência entre as ordens.

4. Na subtração é do algarismo na linha superior que é retirado o valor da mesma ordem da linha inferior. O número na linha superior do qual foi subtraído o valor do número da ordem inferior é apagado e dá lugar ao que sobrou da subtração. Caso seja subtraído um número maior de um menor, é necessário fazer a transferência entre as ordens (da ordem à esquerda para a direita), para que seja possível a subtração.

Do exposto antes, vemos que os cálculos parciais tanto na adição como na subtração são apagados ao longo da operação, restando apenas o resultado na linha superior e o segundo número operado na linha inferior.

Acompanhar o raciocínio de al-Khwarizmi utilizando papel e caneta foi inviável, pois estava implícito o apagamento dos números. Os resultados parciais de cálculo não ficavam registrados como quando são realizados no papel. Neste método “os números sumiam”. Isso nos fez reconstruir de forma gráfica o instrumento como mostraremos no tópico seguinte.

3 Operações no quadro de areia

Como não existem exemplares físicos do quadro de areia, utilizado pelos islâmicos no período de al-Khwarizmi, buscamos conceber a possível estrutura física desse instrumento a partir das pistas encontradas nas fontes que elencamos nos tópicos anteriores. Não sabemos exatamente as dimensões reais do quadro. Uqlidisi (1978) relata que havia resistências ao uso desse artefato pelo fato de ser um instrumento externo ao corpo, diferentemente da aritmética digital que se usava as próprias mãos, e causava a demanda de ser transportado.

Como os cálculos eram realizados em apenas duas linhas, supomos que o quadro de madeira encoberto com areia não fosse tão grande, até mesmo para facilitar o transporte do instrumento.

Inicialmente apresentamos uma representação gráfica (Figura 2) na qual pudemos operar, de forma similar no que diz respeito ao método de cálculo indiano conhecido pelos islâmicos, inserindo os números e apagando de acordo com o necessário.

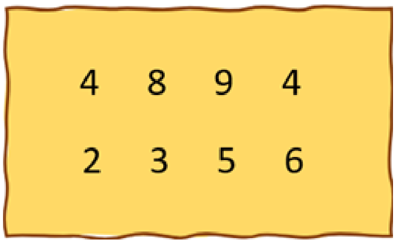
Figura 2. Representação gráfica do quadro de areia

Fonte: Elaborada pelas autoras

A título de ilustração, mostremos exemplos numéricos, supondo que o calculista possuísse apenas um pequeno quadro encoberto de areia e o estilo para escrita. Começaremos com um exemplo de adição, no qual se adicionam os números 4894 e 2356 ordem a ordem seguindo os passos apresentados para a escrita dos números a serem operados:

> Se você quiser adicionar um número a outro número ou subtrair um número de outro, coloque os dois números em duas linhas, ou seja, um sob o outro, de modo que a ordem das unidades fique sob a ordem das unidades e a ordem das dezenas fique sob a ordem das dezenas [3, p. 9].

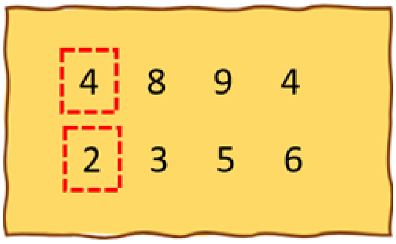
Figura 3. A disposição dos números para a adição no quadro de areia



Fonte: Elaborada pelas autoras

Com os números dispostos (Figura 3), o calculista inicia a adição, seguindo a ordem indicada: "Se você quiser adicionar os dois números, i.e., adicionar um ao outro, então você adiciona cada ordem a cada ordem do mesmo tipo da que está acima dela, ou seja, unidades a unidades, dezenas a dezenas" (al-Khwarizmi, 1983, p. 9). Porém, neste trecho não é informado o sentido do cálculo. Ao adiantarmos a leitura, na parte específica da subtração, o autor indica que "[...] e na adição e na subtração sempre comece pela ordem mais alta, e depois, passe para a seguinte imediata, pois assim o trabalho será mais útil e mais fácil [...]" [3, p. 10]. Assim o faremos na Figura 4, destacando as figuras os números na ordem mais alta, a das unidades de milhares para a posterior adição:

Figura 4. Indicação da ordem de início da operação

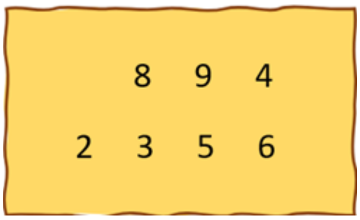


Fonte: Elaborada pelas autoras

As recomendações no texto de [3, p.10], dizem que: "[...] se você quiser adicionar os dois números, i.e., adicionar um ao outro, então você adiciona cada ordem a cada ordem do mesmo tipo da que está acima dela, ou seja, unidades a unidades, dezenas a dezenas". Ou seja, só podem ser adicionados números de mesma ordem. Entretanto, não há a informação do local de registro do resultado.

Poderíamos tender a registrar o resultado abaixo dos números operados se não tivéssemos recorrido a [9], que menciona a substituição por apagamento do número superior operado pelo resultado obtido, conforme mostraremos na Figura 5 que ao adicionarmos 4 e 2 obteremos 6. O calculista guarda esse resultado na mente enquanto apaga o número adicionado na linha superior.

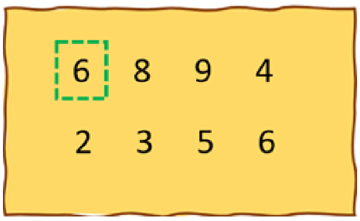
Figura 5. Apagamento do número da linha superior adicionado na quarta ordem



Fonte: Elaborada pelas autoras

O próximo passo (Figura 6) corresponde ao registro escrito do resultado obtido ocupando justamente a posição do número que foi apagado.

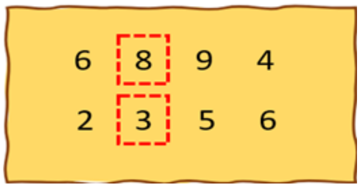
Figura 6. Substituição do número apagado pelo primeiro resultado obtido



Fonte: Elaborada pelas autoras

Adicionados os números da ordem mais alta, continuamos os cálculos na próxima ordem à direita, a ordem das centenas, assim prosseguimos somando 8 e 3 (Figura 7).

Figura 7. Indicação dos números a serem adicionados na ordem das centenas



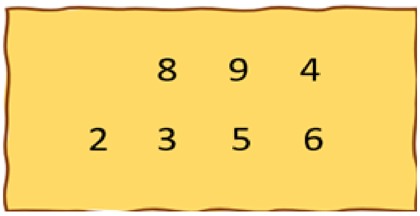
Fonte: Elaborada pelas autoras

Ao adicionarmos 8 e 3, obtemos o resultado 11. Sobre o registro desse número no procedimento de cálculo é orientado que:

> Se em qualquer uma das ordens, ou seja, na ordem das unidades ou das dezenas, ou em qualquer outro lugar, a soma for dez, coloque em seu lugar uma unidade e a deslize [para a esquerda, N.T.]) na linha superior, ou seja, se você obtiver X na primeira ordem, que é a ordem das unidades, faça desse dez uma unidade e a suba para a ordem das dezenas, e aí [a unidade] significará dez [3, p. 9–10].

Deste modo, como se acumularam mais de dez unidades na ordem das centenas, iremos fazer a transferência entre as ordens. No caso dez unidades de centena se converterão em uma unidade de milhar, que será anotada na linha superior, deslizando uma casa à esquerda. O calculista que está com as 11 unidades de centenas guardadas em sua mente, ao se voltar para o quadro, precisará realizar um apagamento na ordem imediatamente maior à esquerda (Figura 8).

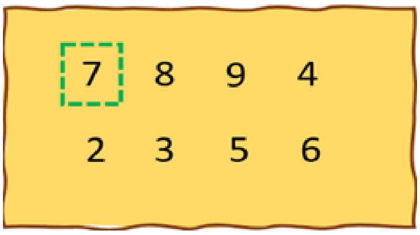
Figura 8. Apagamento do número na quarta ordem para a transferência de valores



Fonte: Elaborada pelas autoras

Ao apagar o 6 o calculista precisa estar atento para adicionar a unidade de milhar recebida, após o apagamento da figura o número a ser adicionado está presente apenas na mente de quem está manuseando o cálculo. Somando-se 6 unidades de milhares com 1 unidade de milhar, totalizando 7 unidades de milhares que serão colocadas na ordem que estamos operando (Figura 9).

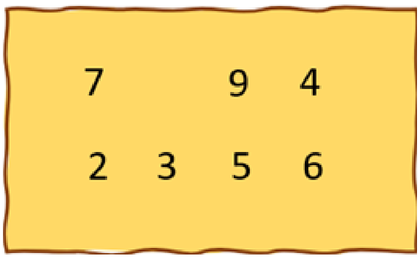
Figura 9. Inserção do valor acumulado na quarta ordem



Fonte: Adaptada de Albuquerque [2]

Agora realizaremos um outro apagamento (Figura 10), na própria ordem das centenas para registrar a unidade que sobrou, pois "[...] se sobrar alguma coisa do número que seja menor que dez, ou se o número em si for menor que dez, deixe-o na mesma ordem" [3, p. 10].

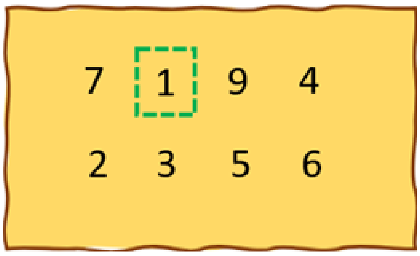
Figura 10. Primeiro apagamento do número da terceira ordem



Fonte: Elaborada pelas autoras

Agora, com a ordem vazia, podemos colocar o símbolo 1 (Figura 11) que equivale a uma unidade de centena que sobrou na soma dos números da terceira ordem.

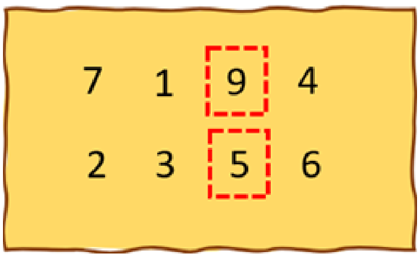
Figura 11. Inserção do número que sobrou na terceira ordem



Fonte: Elaborada pelas autoras

Dando prosseguimento, teremos a adição na segunda ordem, obedecendo os passos adotados nas duas ordens anteriores, o calculista adiciona 9 e 5 (Figura 12).

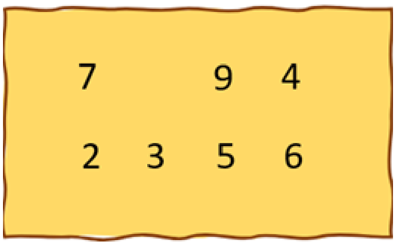
Figura 12. Indicação dos números a serem adicionados na ordem das dezenas



Fonte: Elaborada pelas autoras

A adição desses números resulta em 14 unidades de dezena, havendo necessidade de transferir 10 destas como 1 unidade de centena, recorrendo mais uma vez ao apagamento do número da ordem imediatamente maior (Figura 13), a das centenas.

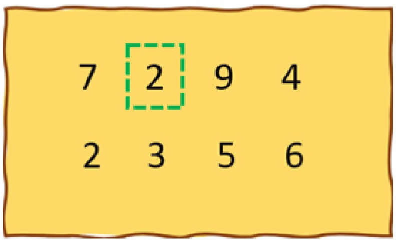
Figura 13. Segundo apagamento do número da terceira ordem



Fonte: Elaborada pelas autoras

Tendo o calculista guardado em sua mente a 1 unidade de centena apagada, ele irá somá-la com a unidade de centena deslizada para esta ordem, totalizando agora 2 unidades de centena que serão escritas na ordem correspondente (Figura 14).

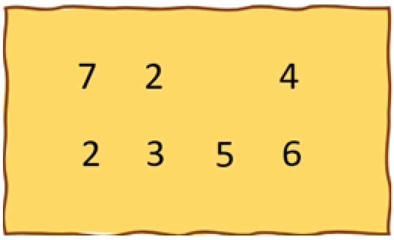
Figura 14. Inserção do valor acumulado na terceira ordem



Fonte: Elaborada pelas autoras

Após realizar a transferência do excedente para a terceira ordem, a representação do número na ordem das dezenas será apagada (Figura 15).

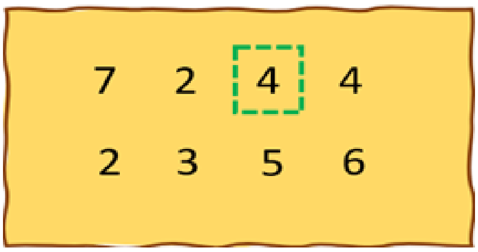
Figura 15. Primeiro apagamento do número da segunda ordem



Fonte: Elaborada pelas autoras

O calculista busca em sua mente o valor que sobrou na ordem das dezenas, no caso 4 e insere a figura correspondente nesta ordem (Figura 16). Recapitulando que das 14 unidades de dezenas resultantes da adição na terceira ordem, 10 destas foram transferidas e sobraram 4 que serão deixadas na ordem operada.

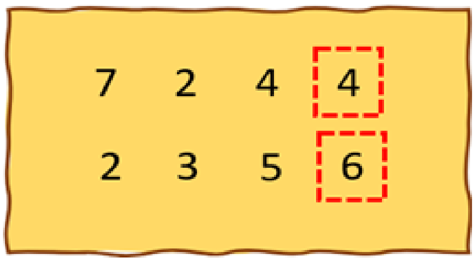
Figura 16. Inserção do número que sobrou na segunda ordem



Fonte: Elaborada pelas autoras

Agora passaremos à adição na primeira ordem, com os números 4 e 6 (Figura 17). Na ordem que será concluída a operação.

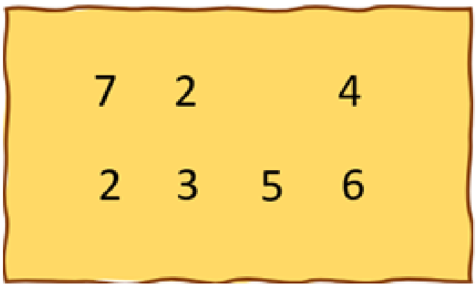
Figura 17. Indicação dos números a serem adicionados na ordem das unidades



Fonte: Adaptada de Albuquerque [2]

Ao adicionarmos 4 e 6 o resultado será uma dezena. Como se acumularam dez ou mais, esta será transferida para a ordem superior, no caso das dezenas. Havendo assim a necessidade de apagar o acumulado nas dezenas (Figura 18).

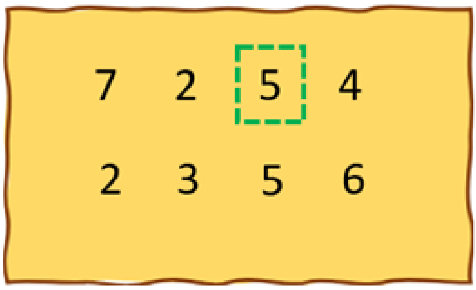
Figura 18. Segundo apagamento do número na segunda ordem



Fonte: Adaptada de Albuquerque [2]

As 4 dezenas apagadas, guardadas na mente do calculista, são adicionadas à 1 dezena deslizada da primeira ordem, totalizando 5 dezenas que serão escritas na segunda ordem (Figura 19).

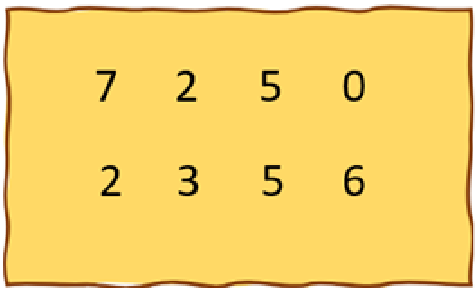
Figura 19. Inserção do valor acumulado na segunda ordem



Fonte: Adaptada de Albuquerque [2]

Acontece que ao adicionarmos 4 a 6 e resultar em 1 dezena esta foi transferida e a ordem das unidades ficou vazia. Sobre isso, al-Khwarizmi [3, p. 9-10] informa que "[...] se não sobrar nada, coloque um pequeno círculo para que a ordem não fique vazia, mas haja nela um círculo, que vai ocupá-la". Assim o faremos na Figura 20.

Figura 20. Inserção do pequeno círculo na primeira ordem



Fonte: Adaptada de Albuquerque [2]

Finalizando assim a adição de 4894 e 2356 na qual tem o resultado 7250 escrito na primeira linha no quadro de areia. Observe que o primeiro número adicionado "sumiu" totalmente, pois foi apagado a medida em que os cálculos foram realizados. Esse procedimento parece longo nessa explicação, mas o leitor, ao dispor de um quadro ou placa coberta com uma camada de areia ou pó, após se apropriar do algoritmo operatório descrito, poderá chegar ao resultado em pouco tempo.

Com o exemplo dado mostramos como realizar a adição de dois números usando o quadro de areia. Com isto consideramos feita uma primeira apresentação do quadro de areia. No entanto, nosso trabalho na temática uso do quadro de areia está apenas começando. Temos ainda que tratar dos demais algoritmos de operações e do interessantíssimo assunto das provas, isto é, o que os estudiosos islâmicos consideravam como prova de que uma dada operação foi realizada corretamente. Todos estes assuntos são nosso foco em estudos em andamento.

4 possibilidades para o uso do quadro de areia em sala de aula

Uma vez que queremos ver como se insere o quadro de areia na sala de aula, examinemos a BNCC [12] no que diz respeito ao aprendizado de números e operações. O dito documento, além de listar habilidades, relaciona objetos de conhecimento a partir do segundo ano do ensino fundamental em diferentes unidades temáticas, em particular, tem-se a unidade de números.

Para o segundo ano é previsto o trabalho em sala de aula com números até três ordens, o que inclui como objetos de conhecimento: leitura, escrita, comparação e ordenação de números de até três ordens pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e papel do zero); composição e decomposição de números naturais (até 1000); construção de fatos fundamentais da adição e da subtração.

Para o terceiro ano é previsto que se trabalhe em sala de aula com números até a quarta ordem e os objetos de conhecimento relacionados são os procedimentos de cálculo mental e de cálculo escrito com números naturais para a adição e subtração. Em relação a tais objetos de conhecimentos, são citadas as seguintes habilidades: EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito; (EF03MA05) Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito, inclusive os convencionais, para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração com números naturais.

Já para o quarto ano, a BNCC [12] indica como objeto de conhecimento: composição e decomposição de um número natural de até cinco ordens, por meio de adições e multiplicações por potências de 10 e; propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais. Para o quinto ano, é recomendado que haja maior foco maior nos números racionais.

Vemos então que o terceiro ano é o que mais dá abertura para se trabalhar com o quadro de areia nas aulas de matemática, o que não exclui, de modo algum, o trabalho nos demais anos do Ensino Fundamental. Além disso, nos objetivos do Ensino Fundamental [12, p. 268]: diz que “no tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras”, o que está em sintonia com a introdução do uso de artefatos históricos do tipo do quadro de areia.

No entanto, a nosso ver, a dificuldade está em como disponibilizar para o professor que ensina matemática no ensino fundamental material didático que lhe dê sugestões metodológicas do quadro de areia ou materiais similares. Esta será a próxima etapa de nossos estudos na qual, alicerçados pela Teoria da Objetivação[5] , investigaremos atividades de ensino-aprendizagem para sala de aula usando o quadro de areia.

[5] Teoria de ensino e aprendizagem sociocultural elaborada por Luiz Radford.

5 Conclusão

Formulamos como principal do presente artigo apresentar ao leitor o artefato cultural que chamamos de quadro de areia. Tal artefato serve como material de escrita para efetuar operações aritméticas pode ser confeccionado em qualquer material que permita que se obtenha a partir dele algo similar a uma bandeja de fundo plano, aproximadamente retangular e com bordas. O quadro de areia deve ser preenchido com areia ou pó (daí a função das bordas) e os números que são operados são traçados na areia com uma haste de comprimento conveniente.

A importância sobre o relato sobre o quadro de areia se reside no fato da constante necessidade de apresentar aos professores mais um modo de explorar as operações por meio de artefatos culturais e históricos, pois, como diz Radford [13], a atividade de sala de aula inclui a linguagem, os signos, os artefatos, o corpo e mais a construção teórica central [na Teoria da Objetivação] que é o labor conjunto. E é

> [...] através da inteligência histórica que eles trazem, os signos e os artefatos proporcionam ao labor conjunto dos indivíduos possibilidades de organização da ação e do pensamento. Como parte da cultura material, os signos e artefatos estão entrelaçados com o corpo e a cognição em geral. Mas o corpo e a cognição são aqui entendidos no seu sentido materialista dialético, e não como entidades que evoluem naturalmente; são entendidos como formas cultural e historicamente constituídas, incorporadas e materialmente sencientes de agir, sentir, imaginar, transformar, responder e dar sentido ao mundo. ([13, p. 60])

No entanto, o quadro de areia foi tratado aqui como um artefato histórico e cultural o que nos levou ao relato sobre como tal artefato emergiu da leitura da obra Tratado Aritmético de al-Khwarizmi e, sendo assim, foi necessário fazer um relato sobre a referida obra devido a sua importância na história da matemática. Mostramos também qual a relação da obra com o quadro de areia. Falamos também sobre quais autores da matemática islâmica medieval nos ajudaram a precisar melhor a aparência e uso do quadro de areia.

Por fim, convém ressaltar que o quadro de areia é um instrumento de registro. O instrumento de cálculo é a mente do calculista. É na mente que acontece a mágica. Foi a partir da concepção visual do instrumento físico que os cálculos de al-Khwarizmi se tornaram compreensíveis a nós, calculistas modernos e autoras deste artigo.

Deste modo, antes de ler as regras do cálculo indiano propostas por [3] aconselhamos que o leitor conheça o quadro de areia. Por esse motivo, o primeiro artigo de nossa tese apresenta justamente o referido instrumento, para facilitar a compreensão do leitor quando for ler a obra e resolver os cálculos.

Além disso, ao esboçamos alguns elementos potencialmente didáticos no uso do quadro de areia quando estabelecemos conexões com os objetos de ensino da matemática presentes em [12] como o desenvolvimento do cálculo mental e a diversificação dos algoritmos de cálculo.

Assim, fornecemos ao leitor pistas para o uso do quadro de areia em sala de aula, abrindo a possibilidade para a elaboração e aplicação de atividades para o ensino de matemática seja na formação de professores ou na educação básica.

Declarações complementares

Contribuições

Todas as autoras contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e interpretação dos dados; na redação e revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Uso de Inteligência Artificial

Não foram empregadas ferramentas de inteligência artificial generativa na concepção, execução ou redação deste estudo.

Orcid

Suzie Albuquerque https://orcid.org/0000-0002-2531-0385
Bernadete Morey https://orcid.org/0000-0003-3253-0383

Referências

1. L. Radford e G. Santi, "Learning as a critical encounter with the other: prospective teachers conversing with the history of mathematics". *ZDM Mathematics Education 54*, 1479–1492. 2022. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01393-z
2. S. M. de Albuquerque, "Um estudo histórico-epistemológico e matemático do Tratado Aritmético de al-Khwarizm". Orientadora: Dra. Bernadete Barbosa Morey. 2024. 125f. *Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática)* - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2024. https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/60972
3. Al-Khwarizm. "Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми: Книга об индийском снете" (Trad. A.P. Yushkiévitch). In: Академии наук Узбекской ССР С.Х. СИРАЖДИНОВ (Editor). *Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми*: Трактаты по математике. Издательство «Фан» Узбекской ССР: Москва, 1983, p. 5–19.
4. B. A. Bulgakov e B. Rozenfeld. "Эпоха, жизнь и окружение". In: B. A. Bulgakov, ROSENFELD, A. P. Rozenfeld e A. A. Akhmedov, *Мухаммад ал-Хорезми*. Editora Nauka, 1983. p. 8-52.
5. K. Volgel, "*Mohammed ibn Musa Alchwarizmis*: algorismus, das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern Nach der einzigen (lateinischen) Handschrift" (Cambridge Un. Lib. Ms. I i. 6. 5.) in Faksimile mit Transkription und Kommentar herausgegeben. Otto Zeller Verlagsbuchhandlung: Aalen, 1963.

6. M. Folkers, "*Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al- Kwharizmı*". Edition, Übersetzung und Kommentarvon M. Folkerts unter Mitarbeit von Paul Kunitzsch. München:Bayerische Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse, Abhandlungen, NeueFolge, 1997.
7. A. P. Yushkiévitch, *"Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми*:Трактаты по математике. [примечания к переводу]". Издательство «Фан» Узбекской ССР: Москва, 1983.
8. Al-Uqlidisi. "Kitab AL-fusul fi AL-hisab AL-hindi". In: SAIDAN, A. S. *The arithmetic of Al-Uqlidisi*: the story of hindu-arabicaritmétic as told in Kitab al-fusul fi al-hisab al- híndi. 1 ed. Boston: Reidel Publishing Company, 1978.
9. A. P. Yushkiévitch, "Арифметический Трактат Мухаммеда Бен Муса ал-Хорезми". In: A. P. YUSHKIÉVITCH (Editor). *Труды института истории естествознания и техники.* Академия Наук ССтооСР: Москва, 1954, p. 85-127.
10. A. S. Saidan, "*The arithmetic of Al-Uqlidisi*: the story of hindu-arabic aritmétic as told in Kitab al-fusul fi al-hisab al-híndi". 1. ed. Boston: Reidel Publishing Company, 1978.
11. Al-Nasawi."Абу-л-Хасан Али ибн Ахмад ан-Насави" (Tradução do árabe por M. I. Medovoy, notas de M. I. Medovoy com a participação de B. A. Rosenfeld. Достаточное об индийской арифметике. In: RYBKIN, G. F; YUSHKIÉVITCH, A. P. (Editores).Историко-математические исследования. Государственное издательство физико-математической литературы: Мокба, 1963, p. 8-52. Medovoi e Rozenfeld (1960, tradução do al-Nasawi)
12. Brasil. Ministério da Educação. "Base Nacional Comum Curricular". Brasília, 2018.
13. Radford, L. "Teoria da objetivação: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática". São Paulo: Livraria da Física, 2021 (Tradução de B. Morey e S. Gobara).

Editora-científica: Ana Paula Perovano. Orcid iD: https://orcid.org/0000-0002-0893-8082