



# Aplicação da distância de ponto a reta em problemas de minimização: generalização do ponto de Lemoine

## *Application of the point-to-line distance in minimization problems: generalization of the Lemoine point*

João Paulo Martins dos Santos <sup>a,\*</sup>, Marcus Vinícius de Araújo Lima <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Academia da Força Aérea, Pirassununga, SP, Brasil

\* Autor Correspondente: [jp2@alumni.usp.br](mailto:jp2@alumni.usp.br)

**Resumo:** O ponto de mínimo da função de duas variáveis, que representa a soma dos quadrados das distâncias, ponderadas por constantes não negativas, de um ponto  $P(x, y)$  aos lados de uma poligonal foi obtido de forma analítica. Embora o uso da distância de ponto a reta como uma função de duas variáveis reais introduza alguma dificuldade técnica, tal abordagem permitiu obter a expressão do ponto de mínimo utilizando técnicas de Cálculo Diferencial em duas variáveis. O determinante da matriz Hessiana foi relacionado com a desigualdade de Cauchy-Schwarz para garantir a condição de ponto de mínimo. A investigação subsequente incluiu a análise de casos específicos, como o de uma poligonal fechada e o cenário em que as constantes ponderadoras são idênticas. Os resultados podem ser interpretados como uma generalização do problema clássico de minimização da soma dos quadrados das distâncias aos lados de um triângulo, o qual é um caso particular em que uma poligonal fechada e constantes idênticas são consideradas. Em todos os casos, geral e especiais, o *software* GeoGebra foi utilizado para implementar as soluções analíticas e ilustrar a visualização das poligonais, dos pontos de mínimo, dos valores minimantes, bem como das funções de duas variáveis e suas componentes. Os resultados analíticos são apresentados de forma interativa e dinâmica e ilustram uma outra forma para a interpretação do problema geométrico associado ao ponto de Lemoine.

**Palavras-chave:** Ponto de Lemoine; Otimização; Poligonais; Centro de massa; Geometria.


**Abstract:** The minimum point of the two-variable function, which represents the sum of the squares of the distances, weighted by non-negative constants, from a point  $P(x, y)$  to the sides of a polygonal chain, was obtained analytically. Although using the point-to-line distance as a function of two real variables introduces some technical difficulties, this approach allowed for the expression of the minimum point to be derived using Differential Calculus techniques in two variables. The determinant of the Hessian matrix was related to the Cauchy-Schwarz inequality to ensure the minimum point condition. The subsequent investigation included the analysis of specific cases, such as that of a closed polygonal chain and the scenario in which the weighting constants are identical. The results can be interpreted as a generalization of the classical problem of minimizing the sum of the squares of the distances to the sides of a triangle, which is a particular case where a closed polygonal chain and identical constants are considered. In all cases, both general and special, the GeoGebra software was used to implement the analytical solutions and illustrate the visualization of the polygonal chains, the minimum points, the minimizing values, as well as the two-variable functions and their components. The analytical results are presented in an interactive and dynamic manner, providing an alternative interpretation of the geometric problem associated with the Lemoine point.

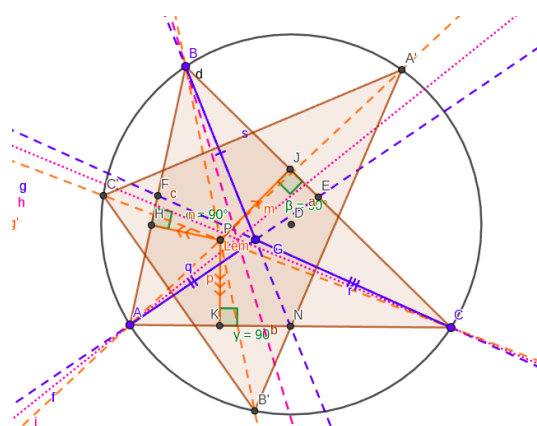
**keywords:** Lemoine Point; Optimization; Polygons; Mass Center; Geometry.

## 1 Introdução

O ponto simediano, ponto de Lemoine ou ponto de Grebe é definido geometricamente como o ponto de concorrência das simedianas de um triângulo  $\Delta ABC$ . O ponto de Lemoine é denotado por  $X(6)$ , em referência ao sexto ponto da Enciclopédia dos Centros de Triângulos (Ver [3]). Tal ponto possui relação com o centroide  $G$  no triângulo  $\Delta ABC$ , pois é um caso especial dos pontos conjugados isogonais, os quais são determinados por meio de reflexões em torno das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo. A Figura 1 ilustra essa relação entre o ponto de Lemoine e o baricentro.

Um resultado interessante é que o triângulo  $\Delta A'B'C'$ , obtido por meio das interseções das retas pelos vértices e o ponto de Lemoine, mostrado na Figura 1 como *Lem*, com a circunferência por  $A, B, C$  possui o mesmo ponto simediano. Outros resultados relacionados ao ponto simediano, com referências, podem ser encontrados em [9]. Uma análise mais pormenorizada, com as respectivas demonstrações, pode ser encontrada em [2]. Construções e discussões de resultados relacionados aos pontos conjugados isogonais utilizando GeoGebra podem ser encontrados em [5].

**Figura 1.** Ilustração da relação entre os pontos de Lemoine e o Baricentro de um triângulo  $\Delta ABC$ . Disponível .



Fonte: Os autores.

De forma geral, os dois problemas anteriores podem ser classificados como problemas de minimização. O ponto de Lemoine é o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos lados do triângulo  $\Delta ABC$ , enquanto o baricentro  $G$  é o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos vértices. As discussões anteriores estão relacionadas ao ponto de vista geométrico, e as respectivas demonstrações podem ser encontradas, respectivamente, em [4] e [1, p. 24].

Uma alternativa à abordagem baseada em argumentos da geometria plana é a abordagem via Cálculo Diferencial. Nesse caso, é necessário estabelecer a função que descreve as relações geométricas em termos das variáveis independentes no plano cartesiano. A seguir, os problemas de minimização anteriores são discutidos do ponto de vista das funções de duas variáveis.

## 1.1 Funções e problemas de minimização

Os problemas de minimização, segundo [1, p. 01], podem ser resolvidos por meio do emprego de transformações geométricas, desigualdades algébricas, Cálculo Diferencial, método das variações parciais ou princípio da tangência. Ainda, [1, p. 28] afirma que, em geral, a função obtida da modelagem de um problema geométrico é complicada e pode ocasionar dificuldades para a investigação por meio das ferramentas do Cálculo, mas, eventualmente, é possível reduzir o problema para encontrar o mínimo ou máximo de uma função de variáveis reais. Desse ponto de vista, os problemas de minimização propostos neste artigo empregam as ferramentas de Cálculo Diferencial e Integral e, portanto, trabalham com funções provenientes dos problemas geométricos. A vantagem desse tratamento em relação a uma abordagem puramente geométrica está na facilidade de realizar generalizações dos problemas, de triângulos para polígonos convexos e poligonais não fechadas.

A seguir, são enunciados dois problemas de otimização para os quais foi possível obter soluções analíticas a partir de funções de duas variáveis associadas. O primeiro problema é relacionado ao baricentro (Ver [7]) e o segundo é relacionado ao ponto de Lemoine (Ver [8]).

*Problema 1: Considere um triângulo  $\Delta ABC$ ,  $A = P_1(x_1, y_1)$ ,  $B = P_2(x_2, y_2)$  e  $C = P_3(x_3, y_3)$  e seja  $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$  um ponto do plano. Os quadrados das distâncias de  $P$  aos vértices são dados por  $d_i^2 := d^2(x, y)_i = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Determine o ponto que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos vértices do triângulo, ponderadas por constantes  $m_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ou seja, determine o ponto de mínimo de:*

$$f_C(x, y) = \sum_{i=1}^3 d_i^2 = \sum_{i=1}^3 m_i((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)$$

O caso acima é um caso especial da minimização em polígonos convexos quando o número de lados é  $n = 3$  e constantes  $m_i > 0$ . O Gráfico de cada  $d_i^2$  é um paraboloide cujo mínimo é o respectivo vértice. Para  $m_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $f_C(x, y) = \sum_{i=1}^3 (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$ , a solução geral é reduzida ao ponto  $G = (\frac{\sum_{i=1}^3 x_i}{3}, \frac{\sum_{i=1}^3 y_i}{3})$  (Ver [6], [8] para discussões adicionais).

No caso do problema de minimização do quadrado da soma das distâncias aos lados de um triângulo, apesar de similares, as manipulações algébricas e argumentos são um pouco mais elaborados.

*Problema 2: Considere um triângulo  $\Delta ABC$ ,  $A = P_1(x_1, y_1)$ ,  $B = P_2(x_2, y_2)$  e  $C = P_3(x_3, y_3)$  e seja  $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$  um ponto do plano. Os quadrados das distâncias aos lados do triângulo  $\Delta ABC$  são calculados por  $d_{ab}^2 = \text{dist}(AB, P)^2$ ,  $d_{ac}^2 = \text{dist}(AC, P)^2$  e  $d_{bc}^2 = \text{dist}(BC, P)^2$ . Determine o ponto  $P(x_s, y_s)$  que minimiza a soma dos quadrados das distâncias aos lados do triângulo, ou seja, o ponto de mínimo de*

$$f_C(x, y) = d_{ab}^2(x, y) + d_{bc}^2(x, y) + d_{ac}^2(x, y)$$

O cálculo do ponto de mínimo de  $f_C$  segue as técnicas de otimização do Cálculo Diferencial para o cálculo dos candidatos a extremantes locais (Ver [8] para mais informações e referências). O primeiro passo é obter a expressão que descreve a distância de um ponto  $P(x, y)$  à reta suporte do lado do triângulo. Sejam as retas  $l_{ab}$ ,  $l_{bc}$  e  $l_{ac}$  as retas passando pelos pontos  $A$  e  $B$ ,

$B$  e  $C$  e  $A$  e  $C$ , respectivamente. Pela fórmula da distância de ponto à reta no plano, a função  $f_C$  que representa a soma dos quadrados das distâncias aos lados do triângulo  $\Delta ABC$  pode ser reescrita:

$$f_C(x, y) = \frac{(a_{ab}x + b_{ab}y + c_{ab})^2}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{(a_{ac}x + b_{ac}y + c_{ac})^2}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{(a_{bc}x + b_{bc}y + c_{bc})^2}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}$$

em que  $l_i^2(x, y) := \frac{(a_i x + b_i y + c_i)^2}{a_i^2 + b_i^2}$ ,  $i = ab, ac, bc$  são funções de duas variáveis reais a valores reais que descrevem a distância de um ponto  $P(x, y)$  às retas que contêm os lados do triângulo  $\Delta ABC$ . O sistema de equações associado à condição  $\nabla f_C = 0$  (para encontrar pontos críticos de  $f_C$ ) pode ser resolvido diretamente pela regra de Cramer para obter o candidato a máximo/mínimo local  $P(x_s, y_s)$ :


$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y &= b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y &= b_2 \end{aligned} \Rightarrow x_s = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \quad \text{e} \quad y_s = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$


$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{a_{ab}^2}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{a_{ac}^2}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{a_{bc}^2}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}, & a_{12} &= \frac{a_{ab} \cdot b_{ab}}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{a_{ac} \cdot b_{ac}}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{a_{bc} \cdot b_{bc}}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}, \\ a_{12} &= \frac{a_{ab} \cdot b_{ab}}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{a_{ac} \cdot b_{ac}}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{a_{bc} \cdot b_{bc}}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}, & a_{22} &= \frac{b_{ab}^2}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{b_{ac}^2}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{b_{bc}^2}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}, \\ b_1 &= \frac{c_{ab} \cdot a_{ab}}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{c_{ac} \cdot a_{ac}}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{c_{bc} \cdot a_{bc}}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}, & b_2 &= \frac{c_{ab} \cdot b_{ab}}{a_{ab}^2 + b_{ab}^2} + \frac{c_{ac} \cdot b_{ac}}{a_{ac}^2 + b_{ac}^2} + \frac{c_{bc} \cdot b_{bc}}{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}. \end{aligned}$$

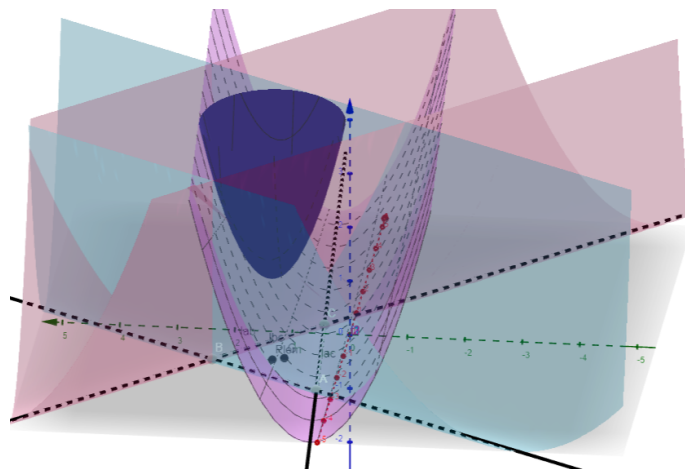
Colocando  $u = \left( \frac{a_{ab}}{\sqrt{a_{ab}^2 + b_{ab}^2}}, \frac{a_{ac}}{\sqrt{a_{ac}^2 + b_{ac}^2}}, \frac{a_{bc}}{\sqrt{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}} \right)$ ,  $v = \left( \frac{b_{ab}}{\sqrt{a_{ab}^2 + b_{ab}^2}}, \frac{b_{ac}}{\sqrt{a_{ac}^2 + b_{ac}^2}}, \frac{b_{bc}}{\sqrt{a_{bc}^2 + b_{bc}^2}} \right)$ , então o determinante da matriz Hessiana avaliada no ponto  $P(x_s, y_s)$  é:

$$|H| = \det(H) = \frac{\partial^2 f_C}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f_C}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f_C}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4 \cdot \left( (u, u) \cdot (v, v) - (u, v)^2 \right) \geq 0$$

A igualdade ocorre quando os vetores  $u$  e  $v$  são proporcionais. Neste caso, as equações das retas são  $x + \lambda y = c_{ab}/a_{ab}$ ,  $x + \lambda y = c_{ac}/a_{ac}$  e  $x + \lambda y = c_{bc}/a_{bc}$ , implicando que as retas são paralelas ou coincidentes, o que não ocorre por se tratar de um triângulo (não degenerado).

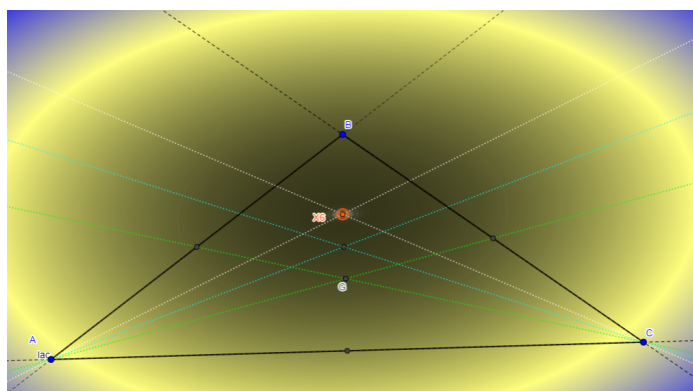
Por consequência,  $H > 0$  e  $\frac{\partial^2 f_C}{\partial x^2} > 0$ , então o ponto de  $(x_s, y_s)$  (Lemoine) é um ponto de mínimo. As funções  $f_C$ ,  $l_{ab}^2$ ,  $l_{ac}^2$  e  $l_{bc}^2$  são ilustradas na Figura 2, enquanto que a Figura 3 mostra curvas de nível  $f_C(x, y) = k$ ,  $k$  em um intervalo, coloridas por meio do modelo de cores RGB (em inglês, *Red*, *Green*, *Blue*) e sobrepostas por meio da função *rastro*. Os pormenores da implementação podem ser consultados em  (link interativo) ou no código *.ggp* disponível no anexo.

**Figura 2.** A função  $f_C(x, y) = \sum_{i=1}^3 l_i^2(x, y)$  com respectivas componentes  $l_i^2(x, y) := \frac{(a_i x + b_i y + c_i)^2}{a_i^2 + b_i^2}$ ,  $i = ab, ac, bc$ . Disponível .



Fonte: Os autores.

**Figura 3.** Cores dinâmicas para a função  $f_C$  em um triângulo  $\Delta ABC$ . Disponível .



Fonte: Adaptado de [8].

Uma consequência natural é a extensão do cálculo do análogo do ponto de Lemoine para um conjunto de pontos do plano  $A_i(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$  ponderados por constantes  $m_i$ , com  $m_i > 0$  para algum  $i$ .

O presente artigo é uma extensão dos resultados apresentados em [8] para o ponto de Lemoine, considerando poligonais abertas, polígonos não convexos e constantes não negativas  $m_i$ , com  $m_i > 0$  para algum  $i$ , ponderando os respectivos quadrados das distâncias. As ilustrações, provenientes de *App's* desenvolvidos com o GeoGebra, levam em conta as superfícies que fornecem os quadrados das distâncias de ponto à reta suporte das arestas da poligonal, respectivos valores mínimos, curvas de nível e modelo de cores RGB. Os *App's* proporcionam uma forma interativa de explorar os elementos matemáticos, respectivas visualizações e fornecem uma visão mais ampla do problema de otimização. Também, os códigos *.ggb* foram disponibilizados na versão atual do GeoGebra Online.

## 2 Materiais e métodos

Do ponto de vista computacional, os materiais utilizados no desenvolvimento do artigo são os elementos disponíveis no software GeoGebra. Este está disponível em duas formas: *desktop* e online em <https://www.geogebra.org/>. A opção pelo modo online é devido à possibilidade de disponibilizar os *links* interativos, os quais facilitam o acesso dos leitores às implementações. De forma complementar, os códigos completos (*.ggb*) foram fornecidos como arquivos suplementares.

De forma geral, os elementos essenciais relacionados ao GeoGebra são os pontos, os segmentos de retas e retas, as funções de uma e duas variáveis, as listas, os controles deslizantes, os comandos para sequências e o comando *zip*. A descrição de cada comando utilizado pode ser encontrada na documentação online, porém as implementações, visualizadas por meio do protocolo de construção, disponível em cada um dos *App*'s, podem ser fundamentais para o entendimento dos pormenores relacionados à forma interativa das implementações.

Por outro lado, do ponto de vista matemático, é necessário distinguir claramente as duas questões a seguir. No caso da minimização da soma dos quadrados das distâncias aos vértices ponderadas, as constantes  $m_i$  podem ser vistas como massas pontuais unicamente associadas aos vértices  $A_i(x_i, y_i)$ . Nesse caso, a disposição dos pontos não é relevante para que o problema de minimização possua uma definição clara e objetiva, fornecendo um problema bem posto. Ver [8], [7] para mais informações e referências. No caso da minimização da soma ponderada dos quadrados das distâncias aos lados, há dois elementos que devem ser levados em conta: a ordenação dos vértices para a construção das arestas da poligonal (aberta ou fechada) e a atribuição das ponderações  $m_i$  de forma única.

Os pormenores são considerados com base em um conjunto de pontos  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $m_i > 0$  para algum  $i = 1, \dots, 4$  e  $A_1A_2A_3A_4$  formando um quadrilátero. Nesse caso, diferentemente do contexto do cálculo do centro de massa, a ordem em que os pontos são utilizados dá origem a diferentes poligonais. Por exemplo,  $A_1A_2A_3A_4A_1$  (poligonal fechada - quadrilátero) deve possuir constantes  $m_1, m_2, m_3, m_4$  associadas às arestas  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$  e  $A_4A_1$ , respectivamente. Analogamente, constantes  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são associadas às arestas de  $A_1A_2A_3A_4$  (a poligonal aberta). Assim, sem perda de generalidade, uma poligonal fixa e as constantes  $m_i$  são assumidas por hipótese.

Por fim, as constantes  $m_i$  são entendidas como ponderações das distâncias. A interpretação em termos de massas pontuais, análoga ao caso do centro de massa, não é realizada; também não é objeto do artigo estabelecer uma relação entre as constantes que ponderam as distâncias aos lados e as constantes que ponderam as distâncias aos vértices, apesar dos problemas geométricos possuírem como soluções pontos que são conjugados isogonais.

## 3 Resultados e discussões

Nesta seção, a minimização da somatória dos quadrados das distâncias ponderadas por constantes foi considerada para poligonais definidas por um conjunto de pontos  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sem perda de generalidade, será assumido que  $m_i$ , em que  $i$  representa a  $i$ -ésima aresta da poligonal, são dados do problema, independente se a poligonal é aberta ou fechada.

### 3.1 Soma dos Quadrados das distâncias ponderadas

Este problema foi baseado no problema associado à determinação do ponto de Lemoine apresentado em [1, p. 24]. Considere uma poligonal aberta definida pelos pontos  $A_1(x_1, y_1)$ ,

$A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)A_{n+1}(x_1, y_1)$  e sejam constantes não negativas  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , com  $m_i > 0$  para algum  $i$ . Determine o ponto  $P(x_s, y_s)$  tal que a soma dos quadrados das distâncias aos lados da poligonal, ponderadas por  $m_i$ , seja mínima.

A função de duas variáveis que descreve o problema é baseada na distância de ponto a reta no plano, dada por:

$$f_C(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{(a_i x + b_i y + c_i)^2}{a_i^2 + b_i^2} \quad (3.1)$$

em que  $l_i^2 := l_i^2(x, y) = \frac{(a_i x + b_i y + c_i)^2}{a_i^2 + b_i^2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  são as funções que utilizam a equação de distância de ponto às retas que contêm os segmentos  $A_i A_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

O sistema de equações associado à condição de  $\nabla f_C = 0$  é dado por:

$$\nabla f_C(x, y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{i=1}^n 2m_i \cdot \frac{(a_i x + b_i y + c_i)}{a_i^2 + b_i^2} \cdot a_i = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sum_{i=1}^n 2m_i \cdot \frac{(a_i x + b_i y + c_i)}{a_i^2 + b_i^2} \cdot b_i = 0 \end{cases}$$

Agrupando os termos em  $x$  e  $y$  temos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n m_i \cdot a_i \cdot \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{a_{11}} x + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n m_i \cdot b_i \cdot \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{a_{12}} y &= \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \cdot c_i \cdot \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2}}_{b_1} \\ \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n m_i \cdot a_i \cdot \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{a_{21}} x + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n m_i \cdot b_i \cdot \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{a_{22}} y &= \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \cdot c_i \cdot \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2}}_{b_2} \end{aligned}$$

cuja solução, obtida pela **Regra de Cramer**, é dada por:

$$x_s = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \quad \text{e} \quad y_s = \frac{b_2 \cdot a_{11} - b_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \quad (3.2)$$

O determinante da matriz Hessiana avaliado em (3.2) resulta:

$$|H| = \underbrace{\left( 2 \sum_{i=1}^n m_i \frac{a_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{\frac{\partial^2 f_C}{\partial x^2}} \cdot \underbrace{\left( 2 \sum_{i=1}^n m_i \frac{b_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{\frac{\partial^2 f_C}{\partial y^2}} - \underbrace{\left( 2 \sum_{i=1}^n m_i \frac{a_i \cdot b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{\left( \frac{\partial^2 f_C}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (3.3)$$

$$|H| = 4 \cdot ((u, u) \cdot (v, v) - (u, v)^2) \geq 0 \quad (\text{Desigualdade de Cauchy-Schwarz})$$


$$u = \left( \frac{\sqrt{m_1} \cdot a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \frac{\sqrt{m_2} \cdot a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \dots, \frac{\sqrt{m_n} \cdot a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right), \quad v = \left( \frac{\sqrt{m_1} \cdot b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \frac{\sqrt{m_2} \cdot b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \dots, \frac{\sqrt{m_n} \cdot b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right).$$

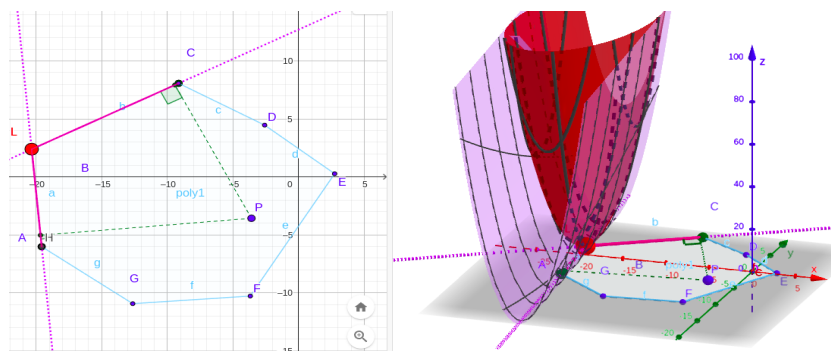
O determinante  $|H| = 0$  ocorre quando os vetores  $u$  e  $v$  na desigualdade de *Cauchy-Schwarz* são proporcionais, ou seja,  $v_i = \lambda \cdot u_i \Rightarrow b_i = \lambda \cdot a_i$ . Neste caso, as equações das retas são

$x + \lambda y = c_i/a_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , ou seja, as retas têm todas os mesmos coeficientes angulares (as retas paralelas ou coincidentes), o que não ocorre tratando-se de uma poligonal. Por consequência,  $H > 0$ , e como  $\frac{\partial^2 f_C}{\partial x^2} > 0$ , então o ponto  $P(x_s, y_s)$ , chamado de Lemoine Generalizado, é um ponto de mínimo.

As Figuras a seguir ilustram um conjunto de pontos  $A_i, i = 1, \dots, 7$  (escolhidos de forma arbitrária, porém fixa), e poligonais abertas com número de arestas variando de  $n = 2$  (3 pontos - Figura 4) a  $n = 6$  (7 pontos - Figura 8) e os respectivos pontos de minimização. Os gráficos de  $f_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e uma das componentes  $l_i^2$  também são exibidos. Por fim, as distâncias de um ponto  $P(x, y)$  arbitrário às retas que contêm os lados da poligonal são consideradas ilustrativamente.


A Figura 4 é o caso trivial para a soma dos quadrados das distâncias a duas retas concorrentes. Neste caso,  $f_C(A_2) = f_C(B) = 0$  é o mínimo em  $A_2 = B$ .

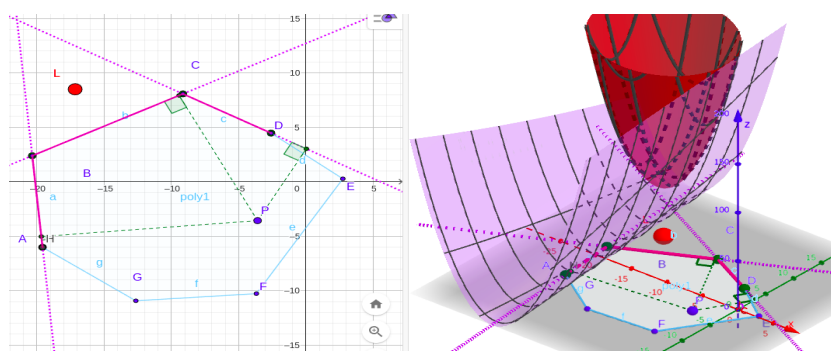
**Figura 4.** Minimização da soma dos quadrados das distâncias aos lados de uma poligonal com  $n = 2$  arestas (3 pontos): poligonal e ponto de mínimo (à esquerda) com gráfico de  $f_C$  e componente  $l_1^2$ . App interativo disponível .



Fonte: Os autores.


A Figura 5 ilustra uma poligonal aberta com três arestas (4 pontos). O ponto de mínimo está contido no triângulo formado por  $B, C$  e a interseção dos prolongamentos das retas por  $AB$  e  $CD$ . Esse resultado é uma consequência da definição de distância de ponto à reta, a qual leva em conta a menor distância à reta que contém a aresta da poligonal.

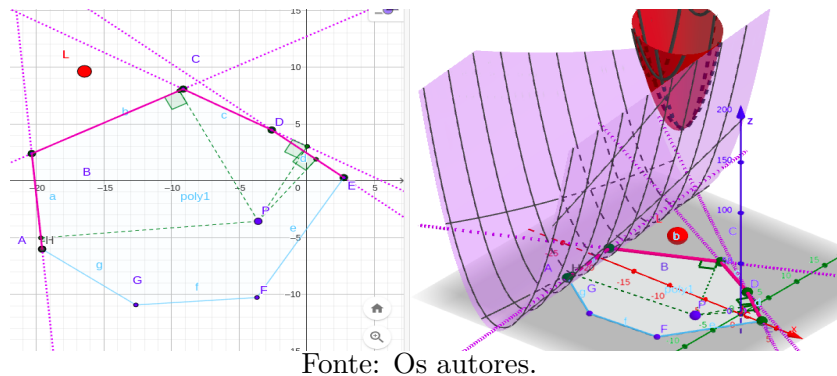
**Figura 5.** Minimização da soma dos quadrados das distâncias aos lados de uma poligonal com  $n = 3$  arestas (4 pontos): poligonal e ponto de mínimo (à esquerda) com gráfico de  $f_C$  e componente  $l_1^2$ . App interativo disponível .




Fonte: Os autores.

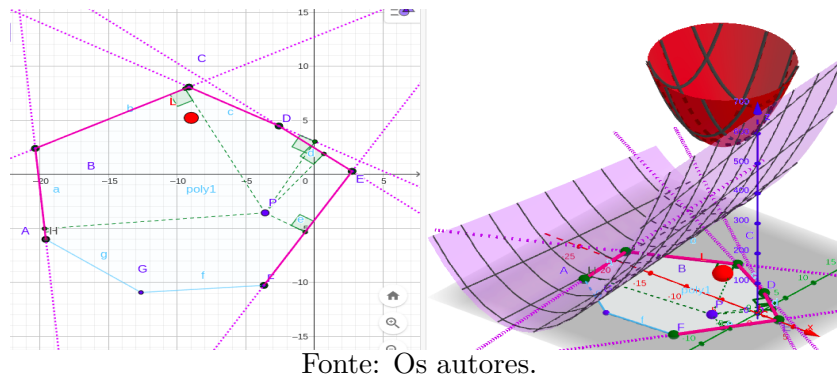
A Figura 6 ilustra uma poligonal aberta com 4 arestas (5 pontos). Como o ângulo de concorrência da aresta adicionada à poligonal do exemplo anterior é pequeno, então o ponto de mínimo  $P(x_s, y_s)$  permanece próximo ao ponto do caso anterior. Apesar disso, o valor mínimo da função  $f_C$  muda sensivelmente.

**Figura 6.** Minimização da soma dos quadrados das distâncias aos lados de uma poligonal com  $n = 4$  arestas (5 pontos): poligonal e ponto de mínimo (à esquerda) com gráfico de  $f_C$  e componente  $l_1^2$ . App interativo disponível .




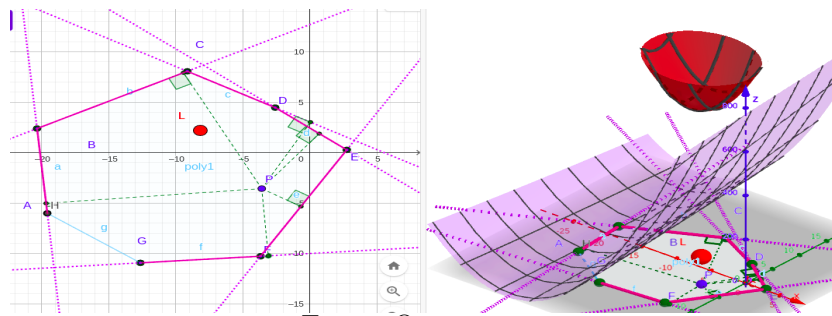
A Figura 7 ilustra uma poligonal aberta com 5 arestas (6 pontos). É perceptível a influência de uma nova aresta tanto na posição do novo ponto minimante quanto no gráfico da função  $f_C$ . Note, ainda, que alterações nos valores das constantes também ocasionam alterações na posição do ponto minimante e no gráfico de  $f_C$ .

**Figura 7.** Minimização da soma dos quadrados das distâncias aos lados de uma poligonal com  $n = 5$  arestas (6 pontos): poligonal e ponto de mínimo (à esquerda) com o gráfico de  $f_C$  e componente  $l_1^2$ . App interativo disponível .




Por fim, a Figura 8 ilustra o caso de uma poligonal com  $n = 6$  arestas (7 pontos). Resultados para poligonais fechadas são analisados na próxima seção.

**Figura 8.** Minimização da soma dos quadrados das distâncias aos lados de uma poligonal com  $n = 6$  arestas (7 pontos): poligonal e ponto de mínimo (à esquerda) com o gráfico de  $f_C$  e componente  $l_1^2$ . App interativo disponível .




Fonte: Os autores.

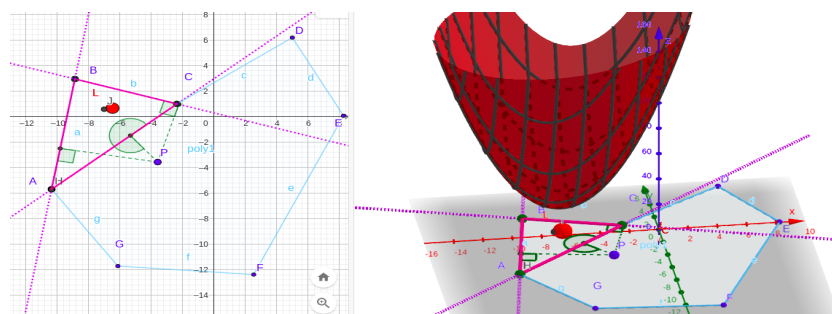
As constantes arbitrárias  $m_i > 0$  (fixas) foram escolhidas com função de densidade de probabilidades uniforme no intervalo  $[1, 2]$ . Essa aleatoriedade para atribuição dos valores das constantes foi uma escolha particular e pode ser alterada por outra função de interesse, desde que os valores sejam não-negativos. Valores específicos para as constantes e uma poligonal particular também podem ser considerados, bastando realizar as modificações na lista das constantes e na lista que define as arestas.

O link interativo  ou o código `.ggb` disponibilizado permite ao leitor explorações adicionais. Dessa forma, todos os elementos, desde a poligonal até a função de densidade de probabilidades, podem ser alterados. A alteração da poligonal pode ser feita de forma interativa na janela de visualização gráfica, enquanto a alteração das constantes requer a modificação da função de densidade de probabilidades. A modificação das constantes  $m_i$  para valores fixos requer a substituição da lista atual. A alteração do número de pontos total  $n = 7$  requer a redefinição da lista inicial e pode ser implementada diretamente na barra de álgebra. O controle deslizante associado permite incrementar o número de lados da poligonal  $k = 2, \dots, n$ , respectivas visualizações e cálculos associados, de forma automatizada.

### 3.2 Poligonais fechadas

Analogamente à seção anterior, exceto pela omissão de  $l_i^2$ , as figuras a seguir ilustram os resultados para poligonais fechadas  $A_1 \cdots A_k A_{k+1}$ ,  $k \geq 3$ ,  $A_{k+1} = A_1$ . A Figura 9 ilustra um triângulo  $\triangle ABC$ , o ponto de Lemoine ( $J = X(6)$ ) obtido pela função  $TriangleCenter(A, B, C, 6)$ , o ponto  $L = P(x_s, y_s)$  e o gráfico de  $f_C$ .


**Figura 9.** Minimização da soma dos quadrados das distâncias em poligonal fechada  $n = 3$  arestas (4 pontos): poligonal e ponto de mínimo (à esquerda) com o gráfico de  $f_C$ . App interativo disponível .

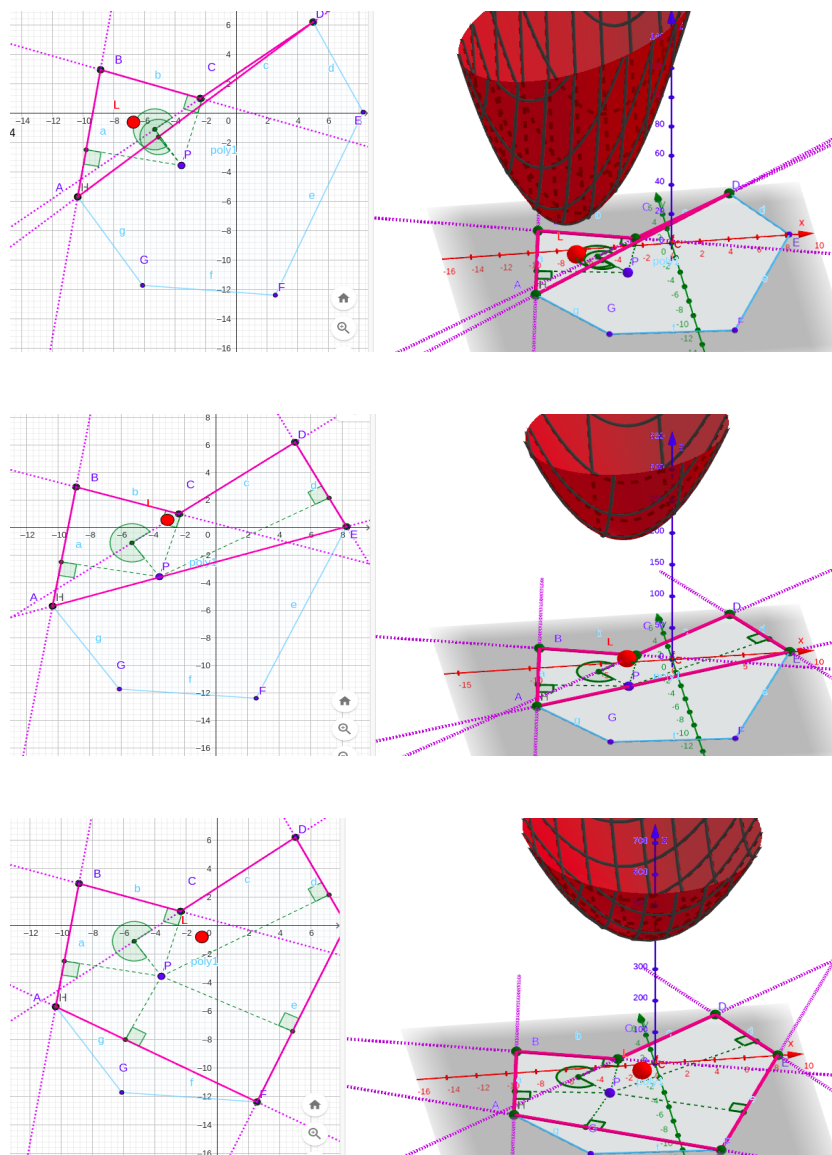


Fonte: Os autores.

É interessante observar que se uma das constantes é nula, por exemplo,  $m_3$  (associada à aresta  $CA = A_3A_1$ , então o resultado é equivalente ao resultado da poligonal aberta.

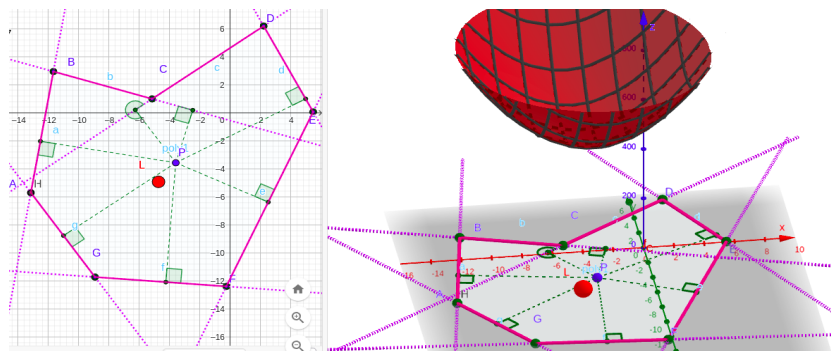
A Figura 10 mostra casos de polígonos não convexos com o ponto  $L$  no interior do polígono. No momento, não é uma preocupação determinar se  $L$  permanece ou não na região poligonal para polígonos não convexos. As demais figuras ilustram outros casos e fornecem elementos visuais para uma compreensão mais acurada do problema.

**Figura 10.** Minimização da soma dos quadrados das distâncias em poligonal fechada  $n = k$  arestas ( $k + 1$  pontos): poligonal e ponto de mínimo (à esquerda) com o gráfico de  $f_C$ . App interativo disponível .



Fonte: Os autores.

continua



Fonte: Os autores.

### 3.3 Constantes $m_i$ idênticas

No caso particular em que todas as constantes  $m_i = m, i = 1, \dots, n, m > 0$  é um valor fixo, a expressão geral é simplificada para:

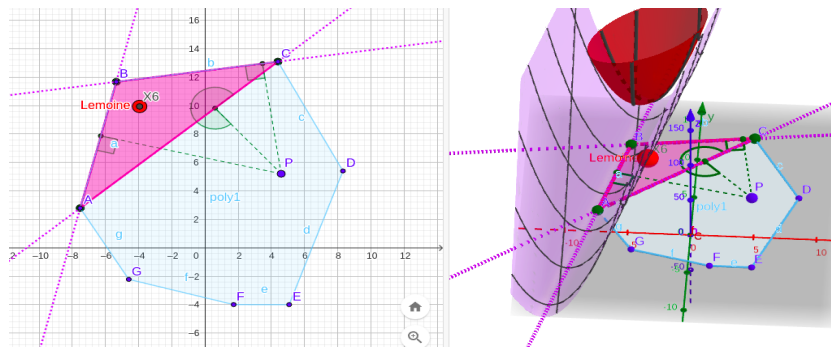
$$m \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{a_{11}} x + m \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{a_{12}} y = m \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2}}_{b_1}$$

$$m \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{a_{21}} x + m \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n b_i \cdot \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2} \right)}_{a_{22}} y = m \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2}}_{b_2}$$

a qual não depende da constante  $m$ . Em palavras, os pontos minimantes  $P(x_s, y_s)$  são idênticos ao caso em que as constantes são unitárias ( $m_i = 1$ ). No entanto, as funções e valores mínimos associados a  $m_i = m$  e  $m_i = 1$  são distintos. Como exemplo, considere  $m_i = 1$  e  $m_i = 2$  e a poligonal  $A_1, A_2, \dots, A_n A_1$  com  $L_1 = (x_s, y_s) = (x_s, y_s) = L_2$  os pontos que as minimizam  $f_{C_1}$  e  $f_{C_2}$ . Logo,  $f_{C_2}(x_s, y_s) = \sum_{i=1}^n 2 \cdot l_i^2(x_s, y_s) = 2 \cdot f_{C_1}(x_s, y_s)$ .


A Figura 11 ilustra o ponto  $X(6)$  (Ponto de Lemoine no triângulo  $\Delta ABC$ , e o ponto  $Lemoine = P(x_s, y_s)$ , coincidente com  $X(6)$  no triângulo. No entanto, caso  $m_i = m \neq 1$ , o valor mínimo calculado para o somatório dos quadrados das distâncias ponderadas não é o mesmo obtido quando  $m = 1$  ( $X(6)$ ).

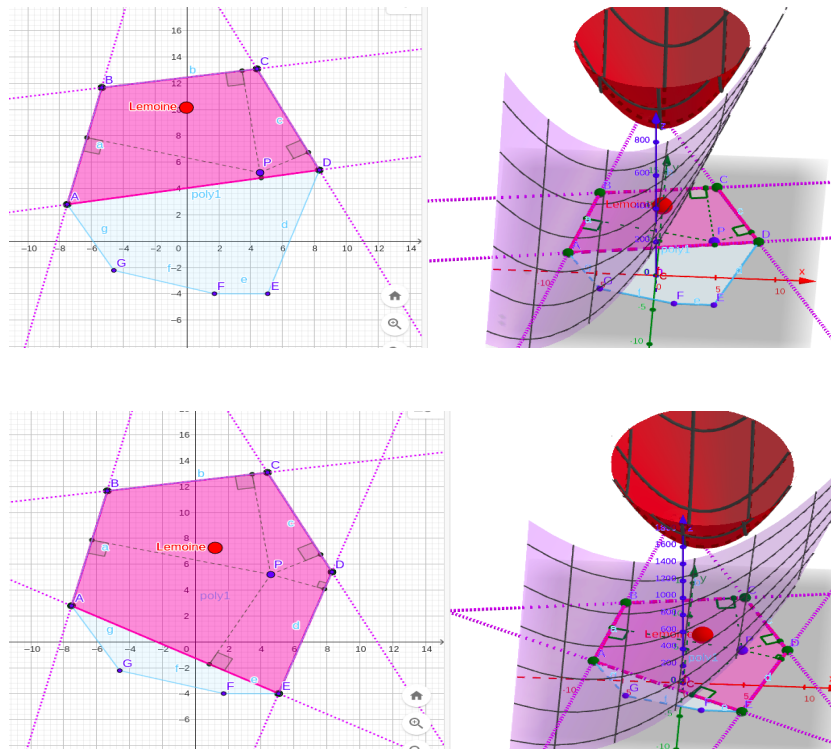
**Figura 11.** Minimização da soma dos quadrados das distâncias em polígonos: ponto de mínimo (à esquerda) com gráfico de  $f_C$  e componente  $l_i^2$  (à direita) com constantes positivas idênticas. App interativo disponível 📱.




Fonte: Os autores.

As Figuras 11 e 12, a seguir, ilustram os resultados para constantes  $m_i = m$  escolhidas arbitrariamente, porém fixadas, em situações análogas aos casos da seção anterior. Neste caso, o ponto  $P(x_s, y_s)$  será denominado *Lemoine*, mas apenas no caso  $n = 3$  é o ponto de Lemoine  $X(6)$  da Enciclopédia de Centros de Triângulos. Ver [3] para mais informações. A seguir, em 12, são ilustrados outros polígonos, os respectivos pontos de minimização, o gráfico de  $f_C$  e a componente  $l_1^2$ .

**Figura 12.** Minimização da soma dos quadrados das distâncias em polígonos: ponto de mínimo (à esquerda) com gráfico de  $f_C$  e componente  $l_1^2$  (à direita) com constantes positivas idênticas. *App* interativo disponível .



Fonte: Os autores.

Os resultados anteriores podem ser explorados no *App*  ou no código *.ggb* em anexo. Ambos permitem reproduzir o exemplo ou testar novas configurações de valores de constantes ou polígonos. Analogamente aos casos anteriores, também é possível realizar a definição do polígono para uma poligonal, aberta ou fechada, por meio da substituição da lista de pontos da forma  $A_1A_2 \cdots, A_jA_1$  por  $A_1A_2 \cdots, A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  e redefinição do polígono para uma seqüência de segmentos de reta.

## 4 Conclusões

A minimização da função  $f_C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que produz a soma dos quadrados das distâncias aos lados de uma poligonal, ponderadas por constantes  $m_i$ ,  $m_i > 0$  para algum  $i$ , foi obtida por meio do emprego de técnicas de Cálculo Diferencial. Como resultado, foi obtida uma expressão analítica para o ponto  $P(x_s, y_s)$  que minimiza a função  $f_C$ , sob condições gerais da poligonal e das constantes de ponderação. A demonstração de que o ponto é um minimante foi baseada na estimativa do determinante da matriz Hessiana com base na desigualdade de Cauchy-Schwarz. Como consequência, tanto a minimização em poligonais fechadas quanto a

adoção de constantes idênticas são casos especiais. Este resulta no caso particular do ponto de Lemoine ao considerar um triângulo qualquer com constantes idênticas. No entanto, ao considerar constantes  $m_i = m$  e  $m_i = n$ , os minimantes são idênticos  $L(x_s, y_s)$ , mas as funções associadas são distintas, porém múltiplas entre si. Do ponto de vista computacional, as ilustrações, utilizando o GeoGebra, permitem capturar a forma dinâmica dos pontos de mínimo ao utilizar diferentes configurações, tanto da poligonal quanto dos valores das constantes. Também permitem visualizar tanto os gráficos associados a cada um dos lados (arestas) da poligonal quanto os paraboloides, gráficos de  $f_C$ , ilustrando a existência do mínimo. A restrição aos casos dos polígonos regulares com constantes unitárias, ou constantes idênticas, recupera os casos particulares do ponto de Lemoine. Em particular, o ponto isogonal conjugado do baricentro, no caso em que as constantes de ponderação são idênticas, é recuperado para um triângulo. As configurações e casos especiais explorados não esgotam as possibilidades, mas refletem casos especiais relevantes. Por fim, espera-se que as investigações possam fomentar novas ideias e proposições de problemas geométricos no plano, com abordagem por meio de funções de duas variáveis.

## Declarações complementares

### Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

### Uso de Inteligência Artificial

Não foram empregadas ferramentas de inteligência artificial generativa na concepção, execução ou redação deste estudo.

### Orcid

João Paulo Martins dos Santos  <https://orcid.org/0000-0002-0957-7119>

Marcus Vinícius de Araújo Lima  <https://orcid.org/0000-0002-9173-7328>

## Referências

1. Andreescu, T., Mushkarov, O., Stoyanov, L., *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhauser, 2006.
2. Honsberger, R. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, New mathematical library, Mathematical Association of America, 1995, ISBN: 9780883856000.
3. Kimberling, C., *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers-ETC*. [online]. University of Evansville. Disponível em: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>. Acesso em: 25 de abril 2024.

4. Linares, Juan López. **Baricentro: teoria, construções e problemas**. Universidade de São Paulo. Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos, 2023. DOI: <https://doi.org/10.11606/9786587023311>. Acesso em 25 abril. 2024.
5. Linares, Juan López; Santos, João Paulo Martins dos; Jesus, Alessandro Firmiano de. **Geometria olímpica com GeoGebra. v. 1**. Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da Universidade de São Paulo, 2022. 86 p. ISBN 978-65-87023-21-2 (e-book). DOI: [10.11606/9786587023212](https://doi.org/10.11606/9786587023212). Acesso em 25 abril 2024.
6. Palacios-Vélez, Ó.L., Pedraza-Oropeza, F.J.A., Escobar-Villagran, B. S., *An algebraic approach to finding the Fermat–Torricelli point*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v. 46, n. 8, p.1252-1259, 2015. DOI: [10.1080/0020739X.2015.1036947](https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1036947).
7. Santos, J. P. M., Lima, M. V. A., de Jesus, A. F., & Linares, J. L. Minimização da soma de quadrados de distâncias aos vértices em polígonos convexos. *Intermaths*, v.3, n.2. 2022. DOI: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i2.11309>
8. Martins dos Santos, J. P., Firmiano, A., López Linares, J., O. Ramalho, M. P. Diferentes perspectivas de um problema de otimização: Matemática Dinâmica com GeoGebra. *InterMaths*, 3(1), 70-87, 2022. DOI: <https://doi.org/10.22481/intermaths.v3i1.10227>
9. Weisstein, E, W. *"Symmedian Point."From MathWorld–A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/SymmedianPoint.html>. Acesso em 11 out.2023.

