

Um estudo de dízimas periódicas em sistemas de numeração não decimais por meio de tarefas de natureza exploratória

A study of repeating decimals in non-decimal number systems through exploratory tasks

Leniedson Guedes dos Santos ^{a,*}, Ana Maria Porto Nascimento ^a, Edmo Fernandes Carvalho ^b

^a Universidade Federal do Oeste da Bahia: Barreiras, Bahia, BR ; ^b Universidade Federal da Bahia: Salvador, BR

* Autor Correspondente: leniedsonguedes@gmail.com

Resumo: Esse artigo tem como objetivo relatar e analisar uma experiência de aplicação de uma tarefa de natureza exploratória em uma turma do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Disciplina Tópicos em Matemática, que teve como objetivo responder ao seguinte questionamento: será possível determinar o período da dízima correspondente a qualquer fração de denominador 11 sem efetuar a divisão? As etapas de realização e discussão da tarefa proporcionaram não só que os estudantes chegassem à resposta, mas também que encontrassem uma generalização do problema para sistemas de numeração não decimais.

Palavras-chave: Ensino Exploratório; Tarefas; Dízimas; Sistemas de Numeração.

Abstract: This article aims to report and analyze an experience applying an exploratory task in a class of the Professional Master's Program in Mathematics in the National Network - PROFMAT, in the subject Topics in Mathematics, which aimed to answer the following question: is it possible to determine the period of the repeating decimal corresponding to any fraction with a denominator of 11 without performing the division? The stages of carrying out and discussing the task allowed students not only to arrive at the answer, but also to find a generalization of the problem for non-decimal number systems.

keywords: Exploratory Teaching; Tasks; Decimals; Number Systems.

1 Introdução

Partindo da concepção de que o conhecimento matemático é construído socialmente e historicamente, Canavarro [1] defende que a aprendizagem matemática aconteça a partir da realização de tarefas que permitam emergir a necessidade dos conceitos matemáticos e que a sistematização desses conhecimentos seja realizada em discussão coletiva.

Segundo ela, com o ensino exploratório:

Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática [1, p. 11].

Nessa proposta, a tarefa é entendida como uma situação problemática que visa beneficiar a discussão e a interação entre os alunos. Elas devem ser desafiantes e possibilitar o desenvolvimento das habilidades de comunicação, questionamento, reflexão e colaboração [3].

Essa metodologia de ensino provoca uma mudança de perspectiva com relação ao papel do docente. Ao invés de o professor expor o conhecimento e resolver problemas ao seu modo, servindo como modelo a ser seguido, nessa proposta ele é responsável por conduzir o estudante a obter o conhecimento de maneira independente.

Assim, o professor deixa de ser visto como o único detentor do saber, com a missão de explanar o conteúdo e “depositar” o conhecimento na mente dos alunos, para assumir compromissos mais complexos, como o de escolher criteriosamente tarefas, gerir o trabalho dos alunos, interpretar e compreender as resoluções das tarefas e explorar as respostas a fim de articular e aproximar as ideias desenvolvidas pelos estudantes com o conteúdo formal.

Dessa forma, acreditamos que o ensino exploratório pode contribuir para a melhoria do ensino de matemática, pois esta proposta tem o intuito de desenvolver a autonomia do estudante no processo de aprendizagem. O aluno deixa de contemplar o conhecimento matemático historicamente estabelecido e passa a manipulá-lo com o objetivo de resolver problemas, fazendo com que os conceitos aprendidos façam sentido.

Esse tipo de proposta, inclusive, nos parece mais adequado às exigências da atualidade, em que as tecnologias digitais facilitam a obtenção de informação e conhecimento. Diante desse contexto, não faz sentido manter um paradigma de professor detentor único do saber, mas sim de um docente que norteie o estudante com tarefas e questionamentos que o façam pensar e resolver problemas de forma autônoma e crítica.

2 Ensino exploratório

A proposta de Ensino Exploratório idealizada por Oliveira, Menezes e Canavarro [3] é composta por quatro fases: introdução, realização e discussão da tarefa, além da sistematização das aprendizagens matemáticas.

Na fase de introdução, a tarefa, que consiste habitualmente em um problema ou uma investigação, é apresentada à turma. As grandes preocupações do professor nessa fase estão relacionadas à garantia da apropriação da tarefa por parte dos alunos, ou seja, ele deve se certificar de que os estudantes compreenderam o objetivo da proposta e promover a adesão dos alunos. Para que isso aconteça, é importante que os discentes estejam familiarizados com o contexto do problema proposto, que estabeleçam conexões com experiências anteriores, que

se sintam desafiados e que interpretem claramente o enunciado [1].

Durante a realização da tarefa, o professor deve acompanhar e assegurar que todos os alunos, individualmente ou em grupos, estejam envolvidos ativamente com a proposta, buscando sempre que eles a realizem com autonomia. O foco dessa fase é garantir o desenvolvimento da atividade e manter o desafio cognitivo. Dessa forma, ele pode dar pistas, fazer perguntas, sugerir representações, pedir classificações e justificativas, sempre focando em ideias produtivas, além de se policiar para não responder ou validar a correção matemática das respostas dos alunos [3].

Na fase de discussão da tarefa, em plenário, individualmente ou em grupos, os alunos devem apresentar os resultados encontrados na realização da tarefa. O professor deve escolher e ordenar estrategicamente as resoluções a serem apresentadas, garantir a qualidade matemática das apresentações, pedindo explicações, justificativas sobre os resultados, as formas de representação utilizadas e discutindo a diferença e eficácia das resoluções. Deve também regular as interações entre os alunos, incentivar o questionamento para o esclarecimento de dúvidas, a análise, o confronto e a comparação de resoluções, identificando e colocando para a discussão erros matemáticos [3].

A última fase do Ensino Exploratório proposto por Canavarro [1] está relacionada à sistematização das aprendizagens matemáticas. Nessa fase, o objetivo é institucionalizar ideias e procedimentos relativos aos conceitos matemáticos e às capacidades transversais provocadas pela exploração da tarefa. Para isso, o professor deve identificar conceitos matemáticos, esclarecer as definições e explorar as várias representações; identificar procedimentos matemáticos, elucidar as condições de aplicação e rever seu uso.

Acompanhar a resolução das tarefas e organizar as discussões é uma atividade extremamente exigente para o professor, pois ele pode se deparar com situações não previstas e que exigem bastante domínio de conteúdo e autocontrole para não dar as respostas, tendo sempre em mente o compromisso de promover o debate e o raciocínio dos estudantes.

Para não ser surpreendido, o professor deve, no momento de planificação das atividades, realizar a antecipação, ou seja, realizar uma previsão sobre a forma com que os alunos provavelmente realizarão a tarefa. Para isso, o professor deve prever a interpretação e o desenvolvimento dos alunos, elencando uma diversidade de estratégias, corretas e incorretas, e com diferentes graus de sofisticação [1].

3 Discussão

Durante a disciplina de Tópicos em Matemática, em uma turma do PROFMAT, depois de trabalharem as leituras e discussões sobre textos que apresentavam as propostas metodológicas de Investigação Matemática e Ensino Exploratório, os professores da componente curricular resolveram aplicar em sala de aula algumas tarefas expostas em artigos sobre o tema.

Uma tarefa sobre dízimas periódicas apresentada por Segurado e Ponte [4] no artigo intitulado “Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo” foi escolhida para trabalhar em sala de aula. Seu enunciado é apresentado na figura 1.

Figura 1. Tarefa de Dízimas periódicas.

Divisões por 11, 111...

1. Determina o período das dízimas representadas pelas fracções:

$$\frac{3}{11} \quad \frac{9}{11} \quad \frac{18}{11} \quad \frac{47}{11} \quad \frac{52}{11} \quad \frac{125}{11}$$

- Que tipo de período se obtém quando dividimos um número inteiro por 11?
- Será possível, sem efectuar a divisão, indicar o período da dízima correspondente a qualquer fracção de denominador 11? Investiga e apresenta as tuas conjecturas.

2. Experimenta agora divisões por 111. Apresenta os resultados.

3. Podes ainda investigar o que se passa nas divisões por 1111...

Fonte: [1, p. 37]

No decorrer do texto, Segurado e Ponte [4] analisam o comportamento e o desempenho de um aluno durante a aplicação desta tarefa em uma turma de sexto ano. Por conta da escolaridade e da resolução da tarefa apresentada no artigo, acreditamos que o que se queria explorar era a quantidade de casas que teria o período das dízimas.

Sobre o raciocínio e o comportamento apresentado do aluno em questão, Segurado e Ponte afirmam que:

[...] quando conjectura que se o denominador é 11 o período é 2, quando o denominador é 111 é 3 e quando é 1111 deve ser 4, não se preocupa muito em testar ele próprio a validade desta afirmação, mas recorre à professora para que esta diga se está bem [4, p. 16].

Embora, aparentemente, Segurado e Ponte estivessem preocupados apenas que os estudantes identificassem o tipo de dízima encontrada, como estávamos a trabalhar com uma turma de mestrado, pensamos em explorar a tarefa com mais profundidade e perguntar se eles conseguiriam encontrar, sem realizar a divisão, o período da dízima, e não a quantidade de algarismos do período.

Essa atividade foi aplicada durante dois encontros de 200 minutos. Nos encontros foram reservados 15 minutos para a introdução da tarefa, 100 para a realização e mais 85 para a discussão e sistematização. A turma tinha 6 estudantes que foram divididos em três duplas.

Durante a realização da atividade, percebemos um grande engajamento das duplas. Todos se empenharam em resolver o problema usando diversos recursos, como realizar o cálculo de

casos particulares para generalizar, lançando mão da tentativa e erro, conjecturando regras e testando hipóteses.

Embora tenhamos discutido o enunciado da tarefa e tentado nos certificar de que houve entendimento sobre as questões, percebemos durante a realização uma certa confusão com relação aos termos.

Uma das duplas respondeu assim:

Podemos verificar que os períodos das dízimas resultantes dessas frações geratrizes são múltiplos de 9, composto por 02 algarismos. As mesmas se repetem a continuamente de acordo com o número que é obtido pela subtração do algarismo da unidade do numerador da fração pelo ante período da dízima, (que será multiplicado por 9), quando o algarismo da unidade for menor que o ante período, usa-se uma dezena do algarismo da dezena junto com da unidade para subtraí-lo. Por exemplo: $15/11=1,363636\dots(5-1=4; 4\times 9=36)$, $73/11=6,6363\dots(13-6=7; 7\times 9=63)$ [sic] (registro da resolução da tarefa de uma das duplas).

Nesse trecho do registro da resolução da tarefa de uma das duplas, percebemos que não ficou claro para os estudantes que a ideia seria partir da fração para encontrar o período da dízima periódica, já que há uma confusão entre os procedimentos realizados com a fração e o conceito de antiperíodo.

Com relação à resolução da tarefa, vimos que as duplas chegaram a alguns consensos. Um deles foi que o número de algarismos do período das dízimas depende do número de algarismos do denominador. Assim, se o denominador for 11, o período da dízima terá dois algarismos. Se for 111, terá três e assim sucessivamente. Outro é que o valor do período seria um múltiplo de 9.

Figura 2. registro escrito da realização da tarefa.

Os resultados nas divisões com frações cujo denominador seja 11, é possível verificar o seguinte padrão:	
$1/11 = 0,090909\dots$	$2/11 = 0,181818\dots$
$3/11 = 0,272727\dots$	$4/11 = 0,363636\dots$
$5/11 = 0,454545\dots$	$6/11 = 0,545454\dots$
$7/11 = 0,636363\dots$	$8/11 = 0,727272\dots$
$9/11 = 0,818181\dots$	$10/11 = 0,909090\dots$
$11/11 = 1$	$12/11 = 1,0909\dots(2-1=1; 1\times 9=9)$

Fonte: Dados da pesquisa.

Durante as discussões, uma dupla observou que numa fração própria, o período é a multiplicação do numerador por 9 e que essa regra vale para 111, para 1111 e etc.

Por exemplo:

Tendo em vista que $32 \times 9 = 288$, temos que $\frac{32}{111} = 0,288288288\dots$

Tendo em vista que $742 \times 9 = 6.678$, temos que $\frac{742}{1111} = 0,667866786678\dots$

Assim, para as frações impróprias, bastaria transformá-las em um número misto, ou seja, descobrir quantos 11 “cabem” no numerador, ou quantos 111 “cabem” no numerador etc. Assim, teríamos uma parte inteira e outra com a fração própria, onde aplicaríamos a regra encontrada.

Embora as duplas tenham chegado a uma regra para obter o período da dízima sem realizar a divisão da fração geratriz, eles teriam que validar esse resultado. Ou seja, descobrir por que essa regra dá certo.

Durante a etapa de sistematização das aprendizagens matemáticas, o professor sugeriu que as duplas encontrassem uma regra para quando os denominadores das frações geratrizes fossem 9, 99, 999 etc. Logo as duplas perceberam que, ao dividir um número natural menor que 9 por 9, a fração geraria uma dízima em que o período seria o numerador da fração geratriz. O mesmo acontece quando se divide um número menor que 99 por 99, mudando apenas a quantidade de algarismos do período da dízima que, nesse caso, seria 2. A mesma coisa acontece quando o denominador é 999, só que agora o período teria 3 algarismos, e assim por diante.

Por exemplo:

$$\frac{4}{9} = 0,4444\dots$$

$$\frac{8}{99} = 0,080808\dots$$

$$\frac{15}{99} = 0,151515\dots$$

$$\frac{237}{999} = 0,237237237\dots$$

Para frações impróprias, bastaria então transformá-las em números mistos e aplicar a regra na fração própria resultante. Ou seja, descobrir quantas vezes o 9 “cabe” no numerador, ou quantas vezes o 99 “cabe” no numerador etc.

Logo após encontrarem a regra com 9, 99, 999 etc., o professor pediu para que eles relacionassem essa regra com a do 11, 111, 1111 etc.

Assim, eles perceberam que, se multiplicassem a fração geratriz cujo denominador fosse 11, 111, 1111 etc. por nove (obviamente, multiplicar tanto o numerador quanto o denominador por 9), eles obteriam uma fração cujo denominador seria 99, 999, 9999 etc. Portanto, o período da dízima seria o novo numerador e o número de algarismos seria o mesmo do denominador da fração geratriz.

A figura 3 mostra que uma das duplas usou esse procedimento para encontrar o período de frações impróprias de numerador 11.

Figura 3. Registro escrito da realização da tarefa.

$$\frac{12}{11} = \frac{11}{11} + \frac{1 \times 9}{11 \times 9} = 1 + \frac{9}{99} = 1,090909 \dots$$

$$\frac{15}{11} = \frac{11}{11} + \frac{4 \times 9}{11 \times 9} = 1 + \frac{36}{99} = 1,363636 \dots$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Embora as duplas tivessem encontrado uma regra para descobrir o período dessas dízimas sem realizar a divisão da fração geratriz e tenham entendido o porquê desse procedimento ser válido, ainda tinha ficado uma pergunta no ar: por que a regra das razões de denominador 9, 99, 999 etc. é válida?

Essa questão ficou para ser respondida no próximo encontro. Durante a investigação da validação da regra para 9, 99, 999 etc., as duplas começaram a realizar as divisões para encontrar algum padrão e perceberam que a regra advém do fato de que esses números são os antecessores de múltiplos de 10.

Para auxiliá-los na validação, um dos professores sugeriu que verificassem o procedimento de transformar essas dízimas periódicas em frações geratrizes e que depois fizessem o caminho inverso: a partir das frações geratrizes encontrassem as dízimas periódicas estudadas. Isso resultou no seguinte procedimento:

Seja a um número natural formado por apenas um algarismo (de 1 a 8), temos que:

$$\frac{a}{9} = \frac{a}{10 - 1}.$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração por 10, temos que:

$$\frac{\frac{a}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{a}{10}}{1 - \frac{1}{10}}.$$

Supondo que esse último resultado seja a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita cuja razão é $\frac{1}{10}$ ($0 \leq \frac{1}{10} \leq 1$) e que o primeiro termo seja $\frac{a}{10}$, temos que:

$$\frac{\frac{a}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{a}{10} + \frac{a}{10^2} + \frac{a}{10^3} + \dots + \frac{a}{10^n} + \dots = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \frac{a}{1000} + \dots + \frac{a}{10^n} + \dots = 0,aaaa\dots$$

Ou seja,

$$\frac{a}{9} = 0,aaaa\dots \quad [2]$$

Da mesma forma, seja ab um número natural menor que 99, em que a é o algarismo das dezenas e b o algarismo das unidades, temos que:

$$\frac{ab}{99} = \frac{ab}{100 - 1} = \frac{\frac{ab}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{ab}{100} + \frac{ab}{100^2} + \frac{ab}{100^3} + \dots + \frac{ab}{100^n} + \dots \Rightarrow$$

$$\frac{ab}{99} = 0,abababab\dots$$

Assim, pode-se facilmente verificar que:

$$\frac{abc}{999} = 0,abcabcabc\dots$$

$$\frac{abcd}{9999} = 0,abcdabcdabcd\dots$$

etc.

Para todo abc e $abcd$ naturais menores que 999 e 9999, respectivamente.

Depois de chegarem a esses resultados, o professor propôs a eles verificarem se essas regras valem para sistemas de numeração não decimais. Por exemplo, para verificar se de fato a regra dos 9 ou dos 11 vale para números na base 5. No caso, o número equivalente a 9 no sistema de base 5 seria o 4, pois esse seria o antecessor da base. Na figura 4 apresentamos a divisão do número 3 por 4 na base 5.

Figura 4. Divisão na base 5.

$$3 \overline{)4} \Rightarrow 30 \overline{)4} \Rightarrow 30 \overline{)4} \Rightarrow \begin{array}{r} 30 \overline{)4} \\ -22 \quad 0,3 \\ \hline 03 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse trabalho vamos indicar a base em que o número será escrito com um índice. Por exemplo, 12_5 significa 12 na base 5. Quando dividimos 3_5 por 4_5 pelo algoritmo de Euclides acrescentamos o zero no quociente pela impossibilidade de dividir 3_5 por 4_5 diretamente. Assim, acrescentamos um zero ao três indicando que este número foi multiplicado pela base, no nosso caso 5 (lembrando que 30_5 significa $3 \times 5^1 + 0 \times 5^0$). Logo, dividimos 30_5 por 4_5 o que resulta em 22_5 ($3 \times 4 = 12 = 22_5$, pois, $12 = 2 \times 5^1 + 2 \times 5^0$). Subtraindo 30_5 por 22_5 temos o resto 3_5 que é o mesmo número do começo da divisão indicando que o processo vai se repetir e que a dízima será $0,333\dots_5$ [2].

3_5 por 4_5 (o antecessor da base, que no caso do sistema decimal é 9). De fato,

$$\frac{3_5}{11_5} = 0,222\dots_5,$$

já que $3_5 \times 4_5 = 22_5$. Da mesma forma $23_5 \times 4_5 = 202_5$, o que indica que

$$\frac{23_5}{111_5} = 0,202202202\dots_5 \quad [2].$$

4 Considerações

Ao longo desse texto descrevemos a experiência de um grupo de professores da Disciplina de Tópicos em Matemática, que aplicaram uma tarefa de natureza exploratória para o ensino de dízimas periódicas. Para abordar esse conteúdo, foi possível trabalhar com a estrutura do sistema de numeração decimal, de sistemas de numeração não decimais, o conceito de soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, entre outros conteúdos relevantes. É importante destacar que outros assuntos também poderiam ter sido explorados, como a ideia de limite de sequência.

Com essa experiência, podemos afirmar que, com esse tipo de atividade em sala de aula, foi possível provocar os estudantes a realizar as tarefas e fazê-los lançar mão de recursos tecnológicos e da criatividade. Além disso, é relevante destacar que essa atividade permitiu identificar dificuldades, como no caso em que houve uma confusão com relação ao conceito de antiperíodo.

Trabalhar com esse tipo de desafio faz com que os estudantes melhor se aproximem do fazer matemático realizado pelos profissionais da Matemática, que buscam identificar padrões e resolver problemas, lançando mão de todos os recursos materiais, tecnológicos e teóricos disponíveis para esse fim.

Dessa forma, acreditamos que para aprender Matemática se faz necessário fazer Matemática. Essa atitude pode muito bem fundamentar nos estudantes a concepção de que a Matemática não é um objeto que serve apenas para ser contemplado e que muitas vezes parece ser intocável e inalcançável.

Declarações complementares

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Uso de Inteligência Artificial

Não foram empregadas ferramentas de inteligência artificial generativa na concepção, execução ou redação deste estudo.

Orcid

Leniedson Guedes dos Santos  <https://orcid.org/0000-0001-6666-8378>

Ana Maria Porto Nascimento  <https://orcid.org/0000-0003-2048-5554>

Edmo Fernandes Carvalho  <https://orcid.org/0000-0002-6959-2652>

Referências

1. CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, n. 115, 2011. Disponível em <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1982/3323>.
2. DOMINGUES, H. Fundamentos de Aritmética. São Paulo: *Atual*, 1991.
3. OLIVEIRA, H; MENEZES, L; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, v. 22, n. 2, p. 29-54, 2013. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22895>
4. SEGURADO, I. PONTE, J. P. Concepções sobre Matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, v.7, n. 2, p. 5-40, 1998. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22710>

Editora: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), [Edições UESB](#). As opiniões, declarações e dados apresentados neste artigo são de inteira responsabilidade dos autores, não refletindo a visão institucional dos editores ou da universidade.

Equipe Editorial / Organizadores do Dossiê

Érica Marlúcia Leite Pagani (CEFET-MG)

Marcela Richele Ferreira (CEFET-MG)

Davidson Paulo Azevedo Oliveira (CEFET-MG)

