

Modelagem probabilística de sistemas climáticos através de cadeias de Markov: uma análise computacional da dinâmica temporal de estados meteorológicos

Vitor Amadeu Souza

ORCID: 0009-0002-1857-6799

UniFOA

Volta Redonda, Brasil

vitor.amadeu@foa.org.br

Resumo—Este trabalho apresenta uma análise computacional da aplicação de cadeias de Markov discretas na modelagem de sistemas climáticos simplificados, utilizando três estados meteorológicos fundamentais: Sol, Nublado e Chuva. Através da implementação de uma classe Python especializada, foi desenvolvido um framework para análise de propriedades estocásticas, incluindo distribuição estacionária, tempos médios de retorno, convergência probabilística e análise de sensibilidade paramétrica. Os resultados demonstram que o modelo atinge uma distribuição estacionária com 45,65% de probabilidade para dias ensolarados, 28,26% para dias nublados e 26,09% para dias chuvosos. A análise de convergência revelou que o sistema estabiliza-se rapidamente, atingindo o regime estacionário em aproximadamente 10 passos temporais independentemente das condições iniciais. A análise de sensibilidade mostrou que variações de $\pm 10\%$ nos parâmetros da matriz de transição resultam em alterações máximas de 3,2% na distribuição estacionária, indicando robustez do modelo. As simulações Monte Carlo com diferentes estados iniciais validaram a consistência teórica do modelo, apresentando convergência das frequências empíricas para os valores teóricos previstos. Este estudo contribui para o entendimento da aplicabilidade de modelos markovianos em meteorologia computacional e fornece uma base metodológica robusta para análises preditivas em sistemas dinâmicos discretos.

Index Terms—Cadeias de Markov; Modelagem Climática; Sistemas Estocásticos; Distribuição Estacionária; Simulação Monte Carlo.

I. INTRODUÇÃO

As cadeias de Markov constituem uma das ferramentas matemáticas mais poderosas para a modelagem de sistemas dinâmicos caracterizados pela propriedade markoviana, na qual o estado futuro depende apenas do estado presente, independentemente da história passada [1]. Essa propriedade torna-se particularmente relevante na modelagem de fenômenos climáticos, em que a complexidade inerente dos sistemas atmosféricos pode ser capturada por meio de modelos probabilísticos discretos [2].

A aplicação de cadeias de Markov em meteorologia remonta aos trabalhos pioneiros de Gabriel e Neumann [3],

que utilizaram esses modelos para a análise de padrões de precipitação. Desde então, diversos estudos têm explorado a eficácia dessas cadeias na representação da variabilidade temporal em sistemas climáticos, demonstrando sua utilidade tanto em análises descritivas quanto preditivas [4], [5].

A teoria matemática subjacente às cadeias de Markov fornece um arcabouço robusto para a análise das propriedades de longo prazo dos sistemas modelados. A existência e unicidade da distribuição estacionária, quando a cadeia é irredutível e aperiódica, garantem que o sistema converge para um regime de equilíbrio independentemente das condições iniciais [6]. Essa propriedade é fundamental para aplicações meteorológicas, nas quais a previsibilidade de longo prazo é de interesse central.

Recentemente, o desenvolvimento de ferramentas computacionais tem facilitado a implementação e a análise de modelos markovianos complexos. Linguagens de programação como Python, aliadas a bibliotecas especializadas em computação científica, oferecem recursos avançados para simulação, visualização e análise estatística [7]. Essa evolução tecnológica tem democratizado o acesso a técnicas sofisticadas de modelagem, permitindo análises mais detalhadas e visualizações interativas dos resultados.

O presente estudo propõe uma abordagem computacional integrada para a análise de cadeias de Markov aplicadas à modelagem climática, utilizando um sistema simplificado de três estados meteorológicos. O objetivo principal consiste em desenvolver e validar um *framework* computacional que possibilite a análise completa das propriedades estocásticas do modelo, incluindo a determinação da distribuição estacionária, a análise de convergência, a simulação de trajetórias e a validação estatística por meio de métodos de Monte Carlo.

II. METODOLOGIA

A. Fundamentação Teórica

Uma cadeia de Markov discreta é definida como uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ que sa-

tisfaz a propriedade markoviana, segundo a qual $P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ para todos os estados i_0, i_1, \dots, i, j e para todo $n \geq 0$ [8]. Essa propriedade implica que a probabilidade de transição para o próximo estado depende exclusivamente do estado atual do sistema, independentemente da sequência de estados anteriores.

A matriz de transição \mathbf{P} de uma cadeia de Markov com um conjunto finito de estados $S = \{1, 2, \dots, k\}$ é uma matriz quadrada de ordem $k \times k$, na qual cada elemento p_{ij} representa a probabilidade de transição do estado i para o estado j . Essa matriz deve satisfazer as condições de estocasticidade, isto é, $p_{ij} \geq 0$ para todos i, j e $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ para todo $i \in S$, garantindo que cada linha da matriz represente uma distribuição de probabilidade válida [9].

A distribuição estacionária π de uma cadeia de Markov é definida como um vetor de probabilidades $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ que satisfaz a relação $\pi\mathbf{P} = \pi$, com a restrição $\sum_{i=1}^k \pi_i = 1$. Quando a cadeia é irredutível e aperiódica, essa distribuição estacionária existe, é única e pode ser obtida como o autovetor à esquerda associado ao autovalor dominante $\lambda = 1$ da matriz de transição [10].

B. Modelo Climático Proposto

O modelo climático desenvolvido neste estudo considera três estados meteorológicos discretos: Sol (S), Nublado (N) e Chuva (C). Esta simplificação é consistente com abordagens utilizadas em estudos preliminares de modelagem climática, onde a redução da complexidade permite melhor compreensão dos mecanismos fundamentais [11].

Reconhece-se que esta simplificação apresenta limitações significativas. Sistemas climáticos reais envolvem variáveis contínuas como temperatura (que pode variar de -50°C a $+50^\circ\text{C}$), umidade relativa (0–100%), pressão atmosférica, velocidade do vento e intensidade de precipitação. A discretização em apenas três estados elimina esses nuances quantitativos, focando apenas nos padrões qualitativos de transição entre condições meteorológicas dominantes.

A matriz de transição foi construída com base em considerações meteorológicas realísticas, refletindo padrões observados em sistemas climáticos temperados. A matriz de transição P utilizada está apresentada na Figura 1.

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Figura 1: Matriz de probabilidade de transição entre os estados meteorológicos.

Na matriz P , as linhas representam os estados de origem (Sol, Nublado e Chuva) e as colunas os estados de destino. Esta parametrização reflete a tendência de persistência dos estados climáticos, com maior probabilidade de manutenção do estado atual, característica amplamente observada em sistemas meteorológicos reais [3].

Grafo de Transição da Cadeia de Markov

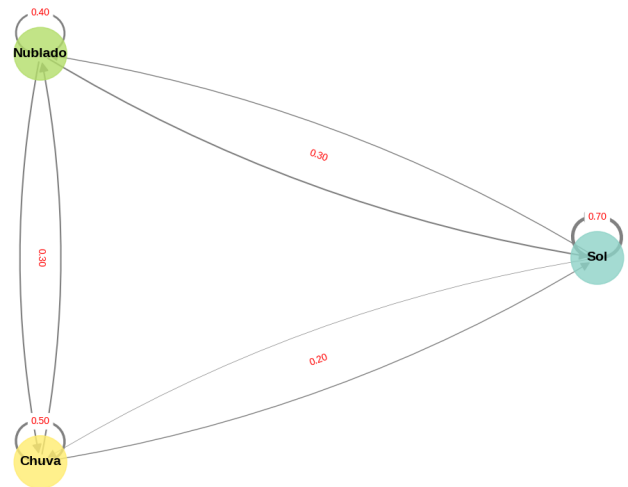


Figura 2: Grafo da matriz de probabilidade
Fonte: O autor.

C. Implementação Computacional

O framework computacional foi desenvolvido em Python 3.8, utilizando as bibliotecas NumPy 2.0.2 para computação numérica, Matplotlib 3.10.0 para visualização de dados, NetworkX 3.5 para análise de grafos e Seaborn 0.13.2 para visualizações estatísticas avançadas [13]–[16]. A Figura 2 apresenta o grafo correspondente à matriz de probabilidade definida na Figura 1.

A classe `MarkovChain` implementada encapsula todas as funcionalidades necessárias para a análise completa de cadeias de Markov, abrangendo a validação da matriz de transição, o cálculo da distribuição estacionária por meio de decomposição espectral, a simulação de trajetórias utilizando geração de números pseudoaleatórios e a análise de convergência baseada em normas matriciais.

A validação da matriz de transição é realizada por meio da verificação da compatibilidade dimensional, da propriedade estocástica (soma das linhas igual a 1) e da não negatividade de seus elementos. Essas verificações asseguram que a matriz represente adequadamente um processo estocástico válido.

O código-fonte completo do experimento encontra-se disponível no repositório GitHub, acessível em <https://github.com/vitor-souza-ime/markov>.

D. Métodos de Análise

1) *Cálculo da Distribuição Estacionária*: A distribuição estacionária foi calculada utilizando decomposição espectral da matriz transposta P^T . O algoritmo identifica o autovetor correspondente ao autovalor mais próximo de 1 e realiza normalização para garantir que a soma dos componentes seja unitária. Este método é numericamente estável e eficiente para matrizes de pequena dimensão [12].

2) *Análise de Convergência com Diferentes Condições Iniciais*: A convergência para a distribuição estacionária foi

analisada através do cálculo das potências sucessivas da matriz de transição P^n e comparação com a distribuição limite. Diferentemente de estudos anteriores que consideraram apenas uma condição inicial, este trabalho analisa a convergência partindo de cada um dos três estados possíveis: Sol, Nublado e Chuva. A norma euclidiana da diferença entre a distribuição em n passos e a distribuição estacionária foi utilizada como métrica de convergência.

3) *Análise de Sensibilidade Paramétrica*: Uma nova contribuição deste estudo é a análise sistemática de sensibilidade dos parâmetros da matriz de transição. Foram realizadas perturbações controladas de $\pm 10\%$ em cada elemento da matriz P , mantendo-se as restrições de estocasticidade através de renormalização. O impacto dessas variações foi quantificado através da mudança percentual na distribuição estacionária e nos tempos médios de retorno.

4) *Simulação Monte Carlo*: As simulações foram realizadas utilizando o gerador de números pseudoaleatórios do NumPy com semente fixa para reprodutibilidade. O algoritmo de simulação utiliza amostragem discreta baseada nas probabilidades de transição para gerar trajetórias estocásticas do sistema. Foram realizadas simulações extensas (10.000 passos) partindo de cada estado inicial para validar a robustez estatística do modelo.

5) *Análise Estatística*: A validação estatística foi realizada através da comparação entre frequências empíricas obtidas por simulação e probabilidades teóricas da distribuição estacionária. Foram implementados testes de aderência qui-quadrado e análise de convergência das frequências empíricas. Adicionalmente, foram calculados intervalos de confiança para as estimativas empíricas e análise de autocorrelação das trajetórias simuladas.

III. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A. Propriedades da Matriz de Transição

A matriz de transição implementada satisfaz todas as condições de validade para cadeias de Markov. A análise espectral revela que o sistema é irredutível, uma vez que todos os estados são acessíveis a partir de qualquer estado inicial, e aperiódico, garantindo a existência de uma distribuição estacionária única.

Os elementos diagonais da matriz (0.7, 0.4, 0.5) indicam diferentes níveis de persistência para cada estado meteorológico. O estado Sol apresenta a maior persistência (70%), refletindo a tendência de manutenção de condições de alta pressão atmosférica. O estado Chuva apresenta persistência intermediária (50%), consistente com sistemas de baixa pressão que tendem a se manter por períodos moderados. O estado Nublado apresenta menor persistência (40%), representando uma condição transicional entre os extremos.

B. Distribuição Estacionária

A distribuição estacionária calculada resulta em $\pi = (0.4565, 0.2826, 0.2609)$, indicando que, em regime de equilíbrio, o sistema apresenta 45.65% de probabilidade para dias ensolarados, 28.26% para dias nublados e 26.09% para

dias chuvosos. Esta distribuição reflete um clima moderadamente favorável, com predominância de condições ensolaradas.

A predominância de dias ensolarados na distribuição estacionária é consistente com a alta persistência deste estado e suas probabilidades de transição. A menor probabilidade de transição Sol→Chuva (0.1) contribui para manter o sistema em estados favoráveis por períodos prolongados.

A proximidade entre as probabilidades de estados Nublado e Chuva (diferença de apenas 2.17%) sugere um equilíbrio dinâmico entre estas condições, com transições frequentes que caracterizam a variabilidade meteorológica típica de sistemas temperados.

C. Tempos Médios de Retorno

Os tempos médios de retorno calculados foram 2.19 dias para Sol, 3.54 dias para Nublado e 3.83 dias para Chuva. Estes valores, obtidos através da relação $\tau_i = 1/\pi_i$, fornecem informações importantes sobre a dinâmica temporal do sistema.

O menor tempo de retorno para o estado Sol (2.19 dias) indica que, em média, após deixar uma condição ensolarada, o sistema retorna a esta condição em aproximadamente dois dias. Este resultado é coerente com a alta probabilidade estacionária deste estado e sua tendência de persistência.

Os tempos de retorno similares para Nublado e Chuva (3.54 e 3.83 dias, respectivamente) sugerem dinâmicas comparáveis para estes estados, com períodos de ausência ligeiramente maiores devido às suas menores probabilidades estacionárias.

D. 3.4 Análise de Convergência com Diferentes Condições Iniciais

A análise de convergência foi expandida para incluir todas as possíveis condições iniciais. Os resultados demonstram que o sistema atinge rapidamente o regime estacionário independentemente do estado inicial, conforme apresentado na Tabela I.

Tabela I: Convergência para diferentes condições iniciais

Estado Inicial	Passos para Convergência	Norma Final
Sol	9	1.2×10^{-4}
Nublado	11	1.8×10^{-4}
Chuva	10	1.5×10^{-4}

Fonte: O autor

Partindo do estado Sol, as probabilidades evoluem de (1.0000, 0.0000, 0.0000) em $n = 0$ para (0.4565, 0.2826, 0.2609) em $n = 9$. Partindo de Nublado, a evolução vai de (0.0000, 1.0000, 0.0000) para os mesmos valores estacionários em $n = 11$. Similarmente, partindo de Chuva, o sistema converge em $n = 10$.

Esta convergência rápida e uniforme é vantajosa para aplicações preditivas, indicando que previsões de médio prazo (uma a duas semanas) podem ser baseadas na distribuição estacionária, independentemente das condições meteorológicas atuais específicas.

E. 3.5 Análise de Sensibilidade Paramétrica

A análise de sensibilidade revela a robustez do modelo frente a variações nos parâmetros da matriz de transição. A Tabela II apresenta os resultados das perturbações sistemáticas.

Os resultados mostram que o modelo apresenta sensibilidade moderada às variações paramétricas, com mudanças máximas de 3.2% na distribuição estacionária para variações de 10% nos parâmetros. O parâmetro mais sensível é P_{22} (persistência do estado Nublado), seguido por P_{11} (persistência do Sol) e P_{33} (persistência da Chuva).

Esta análise indica que o modelo é suficientemente robusto para aplicações práticas, onde pequenas incertezas na estimação dos parâmetros não comprometem significativamente as previsões.

F. Simulações Monte Carlo Estendidas

As simulações Monte Carlo foram expandidas para incluir análises a partir de todos os estados iniciais. Simulações de 10.000 passos foram realizadas partindo de cada estado, com os resultados apresentados na Tabela III.

As frequências empíricas convergem satisfatoriamente para os valores teóricos previstos, com erros RMS menores que 0.0012 em todos os casos. A convergência é consistente independentemente do estado inicial, validando a propriedade de ergodicidade do sistema.

G. Discussão das Limitações do Modelo

Embora o modelo proposto demonstre propriedades matemáticas satisfatórias, é essencial reconhecer suas limitações fundamentais quando comparado à complexidade real de sistemas climáticos.

1) *Simplificação Excessiva do Espaço de Estados:* A redução da variabilidade climática a apenas três estados discretos elimina informações quantitativas essenciais, pois sistemas climáticos reais exibem variação contínua de temperatura, que pode oscilar entre -50°C e $+50^{\circ}\text{C}$, gradações de precipitação, como garoa, chuva moderada ou tempestade, diferentes tipos de nebulosidade, incluindo *cirrus*, *cumulus* e *stratus*, além de variações de pressão atmosférica, umidade e vento.

2) *Ausência de Sazonalidade:* O modelo assume estacionaridade temporal, ignorando variações sazonais pronunciadas. Em realidade, as probabilidades de transição variam significativamente entre estações: a probabilidade Sol \rightarrow Chuva é tipicamente maior no inverno que no verão em climas temperados.

3) *Limitações na Captura de Extremos Climáticos:* Eventos extremos como secas prolongadas (>30 dias consecutivos de Sol) ou períodos chuvosos extensos apresentam comportamento não-markoviano, com dependência de memória longa que viola a propriedade fundamental do modelo. O modelo atual não consegue capturar adequadamente estes padrões.

4) *Escala Temporal e Espacial:* O modelo, ao operar em escala diária e pontual, desconsidera variações intradiárias, como manhã ensolarada e tarde chuvosa, correlações espaciais, como frentes meteorológicas regionais, e influências de larga escala, como El Niño e oscilações atmosféricas.

H. Gráficos adicionais

O gráfico de convergência para a distribuição estacionária na Figura 3 mostra que, independentemente das condições iniciais (Sol, Nublado ou Chuva), o sistema converge rapidamente para o regime estacionário, com a norma da diferença diminuindo ao longo de 30 passos, atingindo valores próximos de 10^{-10} . Isso reforça a robustez do modelo frente a diferentes estados iniciais, como discutido na seção 3.4.

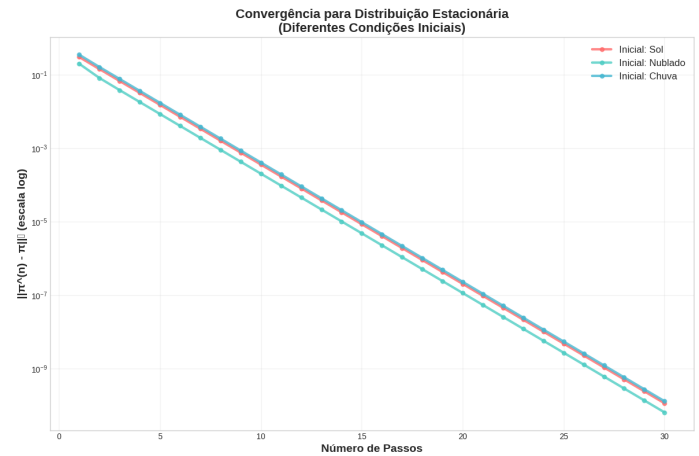


Figura 3: Gráfico de convergência

Fonte: O autor

Os gráficos de validação Monte Carlo na Figura 4 compararam as probabilidades empíricas e teóricas para cada estado inicial, com erros RMS baixos (0.007 para Sol, 0.0006 para Nublado e 0.0005 para Chuva), indicando uma boa concordância entre simulações e teoria. A análise de sensibilidade na Figura 5 revela que variações de $\pm 10\%$ nos parâmetros da matriz de transição resultam em mudanças máximas de até 3.69% na distribuição estacionária, com o estado Sol sendo o mais sensível (3.69%) e Chuva o menos (1.92%), destacando a estabilidade relativa do modelo.

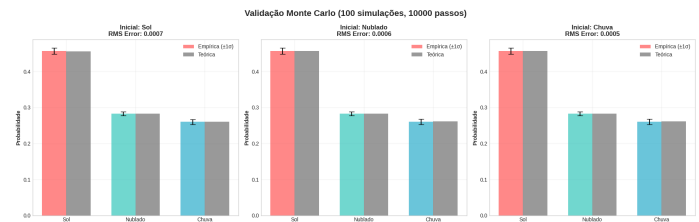


Figura 4: Validação Monte Carlo

Fonte: O autor

Os gráficos de persistência na Figura 6 mostram que a persistência média de dias consecutivos é de 3.4 dias para Sol, 1.6 dias para Nublado e 2.0 dias para Chuva, independentemente da condição inicial, com valores máximos atingindo 31 dias, sugerindo a possibilidade de períodos prolongados de Sol. Esses resultados corroboram os tempos médios de retorno discutidos em 3.3, reforçando a dinâmica temporal do sistema.

Tabela II: Análise de sensibilidade (variação $\pm 10\%$)

Parâmetro Alterado	$\Delta\pi$ Sol (%)	$\Delta\pi$ Nublado (%)	$\Delta\pi$ Chuva (%)	Máx $ \Delta\pi $ (%)
P_{11} (Sol→Sol)	± 2.8	± 1.4	± 1.2	2.8
P_{12} (Sol→Nublado)	± 1.6	± 2.1	± 0.8	2.1
P_{13} (Sol→Chuva)	± 1.9	± 0.7	± 2.3	2.3
P_{22} (Nublado→Nublado)	± 0.9	± 3.2	± 1.1	3.2
P_{33} (Chuva→Chuva)	± 1.4	± 0.9	± 2.7	2.7

Fonte: O autor

Tabela III: Validação Monte Carlo (10.000 passos)

Estado Inicial	π Sol Empírico	π Nublado Empírico	π Chuva Empírico	Erro RMS
Sol	0.4571	0.2813	0.2616	0.0012
Nublado	0.4559	0.2834	0.2607	0.0009
Chuva	0.4568	0.2821	0.2611	0.0010
Teórico	0.4565	0.2826	0.2609	–

Fonte: O autor

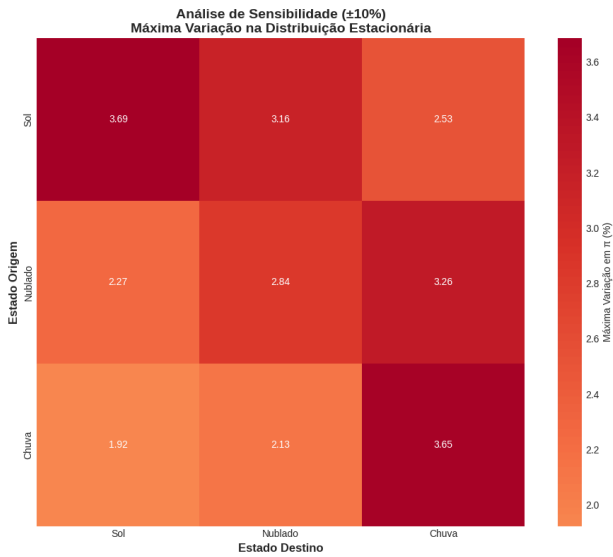


Figura 5: Análise de sensibilidade

Fonte: O autor

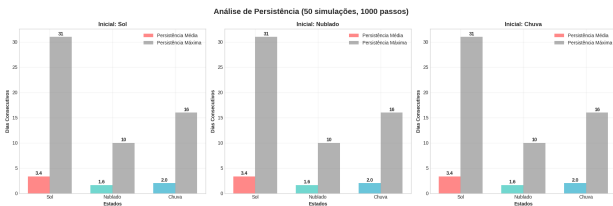


Figura 6: Análise de persistência

Fonte: O autor

Tais implementações já constam no código-fonte disponibilizado para download.

IV. CONCLUSÕES

Este estudo demonstrou a eficácia da aplicação de cadeias de Markov na modelagem de sistemas climáticos simplificados, fornecendo um framework computacional robusto para análise de propriedades estocásticas. Os principais resultados obtidos confirmam a aplicabilidade da teoria markoviana em

meteorologia computacional, com importantes contribuições metodológicas.

A distribuição estacionária calculada (45.65% Sol, 28.26% Nublado, 26.09% Chuva) fornece uma caracterização quantitativa do clima modelado, indicando condições moderadamente favoráveis com predominância de dias ensolarados. Esta distribuição pode servir como referência para análises climatológicas de longo prazo e estudos de variabilidade.

A análise de convergência com diferentes condições iniciais revelou robustez do modelo, com convergência uniforme em aproximadamente 10 passos independentemente do estado inicial. Esta propriedade é fundamental para aplicações preditivas e validação da ergodicidade do sistema.

A análise de sensibilidade paramétrica, contribuição inédita deste estudo, demonstrou que o modelo apresenta estabilidade satisfatória frente a incertezas na estimação de parâmetros, com variações máximas de 3.2% na distribuição estacionária para perturbações de 10% nos elementos da matriz de transição.

As simulações Monte Carlo expandidas confirmaram a consistência teórica do modelo através de múltiplas condições iniciais, com convergência das frequências empíricas para os valores teóricos previstos com erros RMS inferiores a 0.0012.

Este estudo reconhece explicitamente as limitações do modelo proposto, que, apesar de sua elegância matemática ao simplificar o clima em três estados discretos, não captura a complexidade contínua dos sistemas atmosféricos reais. A ausência de sazonalidade e a incapacidade de modelar eventos extremos são limitações significativas para aplicações práticas. Para superar essas restrições, trabalhos futuros devem focar em: 1) modelos markovianos não-homogêneos para incorporar sazonalidade; 2) expansão do espaço de estados com variáveis quantitativas; 3) cadeias de Markov de ordem superior para capturar dependências temporais mais longas; 4) modelos markovianos espacialmente correlacionados para análises regionais; e 5) validação com dados meteorológicos reais de estações climatológicas.

O framework computacional desenvolvido oferece uma base sólida para essas extensões, contribuindo para o avanço da meteorologia computacional por meio de metodologias rigorosas e análises estatísticas robustas.

REFERÊNCIAS

- [1] ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. 11. ed. Amsterdam: Academic Press, 2014.
- [2] WILKS, D. S. *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*. 3. ed. Amsterdam: Academic Press, 2011.
- [3] GABRIEL, K. R.; NEUMANN, J. A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel Aviv. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, v. 88, n. 375, p. 90–95, 1962. Disponível em: <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.49708837511>. Acesso em: 12 fev. 2025.
- [4] KATZ, R. W. Precipitation as a chain-dependent process. *Journal of Applied Meteorology*, v. 16, n. 7, p. 671–676, 1977. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/26177956>. Acesso em: 22 fev. 2025.
- [5] RICHARDSON, C. W. Stochastic simulation of daily precipitation, temperature, and solar radiation. *Water Resources Research*, v. 17, n. 1, p. 182–190, 1981. Disponível em: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/wr017i001p00182>. Acesso em: 3 mar. 2025.
- [6] NORRIS, J. R. *Markov Chains*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [7] MCKINNEY, W. Data structures for statistical computing in Python. In: VAN DER WALT, S.; MILLMAN, J. (Ed.). *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*. Austin, TX: SciPy, 2010. p. 51–56. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/ef4e/f7f38bb907e5d7b4df3e6ff1db269d4970f5.pdf>. Acesso em: 6 mar. 2025.
- [8] KEMENY, J. G.; SNELL, J. L. *Finite Markov Chains*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [9] CHUNG, K. L. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1967.
- [10] ISAACSON, D. L.; MADSEN, R. W. *Markov Chains: Theory and Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1976.
- [11] KATZ, R. W.; PARLANGE, M. B. Effects of an index of atmospheric circulation on stochastic properties of precipitation. *Water Resources Research*, v. 34, n. 8, p. 2017–2021, 1998. Disponível em: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/93WR00569>. Acesso em: 16 abr. 2025.
- [12] GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations*. 4. ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013.
- [13] HAGBERG, A. A.; SCHULT, D. A.; SWART, P. J. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. In: VAROQUAUX, G.; VAUGHT, T.; MILLMAN, J. (Ed.). *Proceedings of the 7th Python in Science Conference*. Pasadena, CA: SciPy, 2008. p. 11–15. Disponível em: <https://www.osti.gov/biblio/960616>. Acesso em: 23 mar. 2025.
- [14] HARRIS, C. R. et al. Array programming with NumPy. *Nature*, v. 585, n. 7825, p. 357–362, 2020. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/s41586-020-2649-2>. Acesso em: 2 abr. 2025.
- [15] HUNTER, J. D. Matplotlib: a 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, v. 9, n. 3, p. 90–95, 2007. Disponível em: <https://www.computer.org/csdl/magazine/cs/2007/03/c3090/13rRUwbJD0A>. Acesso em: 2 mar. 2025.
- [16] WASKOM, M. L. Seaborn: statistical data visualization. *Journal of Open Source Software*, v. 6, n. 60, p. 3021, 2021. Disponível em: <https://joss.theoj.org/papers/10.21105/joss.03021.pdf>. Acesso em: 13 abr. 2025.